Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου
Θεωρία και Εφαρμογές

Διδακτικές Σημειώσεις Τμήματος Πληροφορικής και Επικοινωνιών

Τομέας Αρχιτεκτονικής Υπολογιστικών και Βιομηχανικών εφαρμογών

Δρ. Βολογιαννίδης Σταύρος

email: svol@teiser.gr

http://www.teiser.gr/icd/staff/vologian/index.html

http://anadrasis.math.auth.gr/S.Vologiannidis.htm

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, Θεωρία και Εφαρμογές

Δρ. Βολογιαννίδης Σταύρος, (*svol@teiser.gr)*

15 Σεπτεμβρίου 2009

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

1.1 Σήματα και συστήματα

Τις έννοιες ενός **σήματος** και ενός **συστήματος** τις συναντάμε σε πολλούς τομείς των τεχνολογικών και εφαρμοσμένων επιστημών.

Η χρήση των εννοιών αυτών από τους ερευνητές κατά τα τελευταία 50 περίπου χρόνια βοήθησε κατ' αρχή στην μαθηματική διατύπωση ερωτημάτων τα οποία προέκυπταν από την προσπάθεια για καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση πολλών φυσικών, μηχανικών ή οικονομικών φαινομένων και διαδικασιών και στην συνέχεια στην διερεύνηση αντιστοίχων προβλημάτων. Οι τηλεπικοινωνίες, η ηλεκτρονική, η παραγωγή και κατανομή ηλεκτρικής ενέργειας, ο αυτοματισμός και η ρομποτική, η αεροναυτική και αστροναυτική, η οικονομία, και οικονομετρία, και ακόμη η νευρολογία, η βιολογία και η ιατρική είναι μερικά μόνο παραδείγματα επιστημονικών περιοχών για τις οποίες οι έννοιες αυτές έπαιξαν και παίζουν συνεχώς πολύ σημαντικό ρόλο στην διατύπωση, ανάλυση, διερεύνηση και λύση προβλημάτων τα οποία τις απασχολούν. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε και να περιγράψουμε αναλυτικά τις δύο αυτές βασικές έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση του αντικειμένου της μαθηματικής θεωρίας των συστημάτων.

Αν και η φύση των σημάτων και των συστημάτων που εμφανίζονται σε διαφορετικές περιοχές του επιστητού διαφέρουν από περιοχή σε περιοχή, σε όλες τις περιπτώσεις, οι δύο αυτές έννοιες ενός *σήματος* και ενός *συστήματος* έχουν βασικές κοινές ιδιότητες. Αυτό που ονομάζουμε *σήμα* αποτελεί πάντα μία μαθηματική συνάρτηση μίας η περισσοτέρων ανεξαρτήτων μεταβλητών μία από τις οποίες είναι υποχρεωτικά ο χρόνος και τυπικά περιέχει πληροφορίες για τη χρονική εξέλιξη μιας ποσότητας η οποία περιγράφει ένα φαινόμενο ή μία διαδικασία.

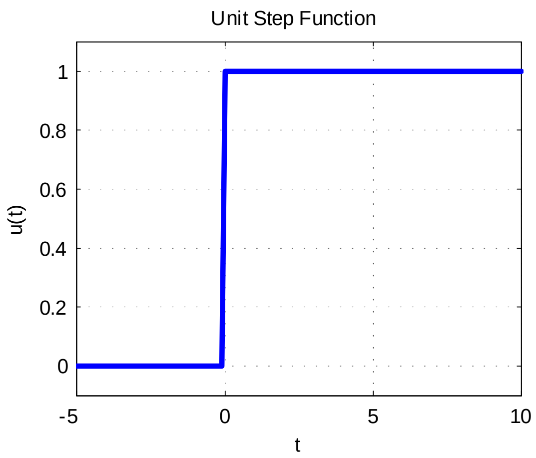
Ο ακριβής ορισμός της έννοιας του *συστήματος* είναι πιο δύσκολος. Ένα *σύστημα* αναγνωρίζεται πιο εύκολα από ό,τι ορίζεται. Με τον όρο *σύστημα* εννοούμε ένα μέρος του φυσικού κόσμου το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων τα οποία λειτουργούν συγχρόνως κατά προδιαγεγραμμένο τρόπο έτσι ώστε να επιτυγχάνεται κάποιος στόχος. Ένα σύστημα επικοινωνεί με το περιβάλλον μέσω σημάτων. Τα σήματα που δέχεται ένα σύστημα ονομάζονται **διεγέρσεις** ή **είσοδοι** και τα σήματα που παράγει ένα σύστημα λόγω των διεγέρσεων και των μη μηδενικών αρχικών συνθηκών ονομάζονται **αποκρίσεις** ή **έξοδοι**.

1.2 Σήματα συνεχούς χρόνου

Ένα *σήμα συνεχούς χρόνου* (ή ένα *αναλογικό σήμα*) είναι μία πραγματική συνάρτηση $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της ανεξάρτητης μεταβλητής t η οποία εκφράζει το συνεχή χρόνο. Παραδείγματα σημάτων είναι η ηλεκτρική τάση $v(t)$ στους ακροδέκτες ενός ηλεκτρικού κυκλώματος ή η ένταση του ρεύματος $i(t)$ σε ένα κλάδο ηλεκτρικού κυκλώματος. Άλλα παραδείγματα σημάτων συνεχούς χρόνου είναι π.χ. η θέση $x(t)$ ή η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού ως προς κάποια αρχή συντεταγμένων.

1. Μοναδιαία συνάρτηση βαθμίδας (unit step function) (Σχήμα 1.1)

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 1.1: Μοναδιαία συνάρτηση βαθμίδας.

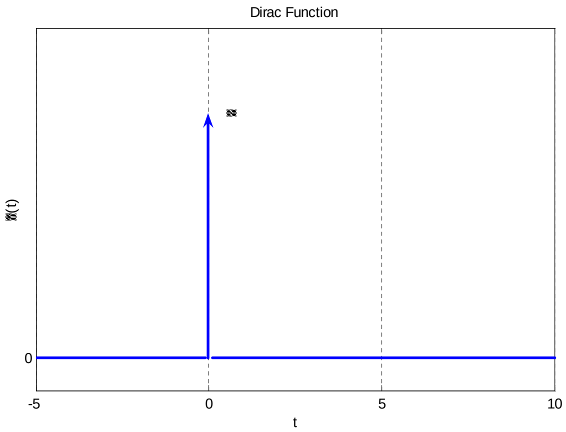
```
t=[-5:0.1:10];
u=[zeros(1,50),ones(1,101)];
plot(t,u,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2)
title('Unit Step Function')
ylim([-0.1,1.1])
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
grid('on')
```

2. Κρουστική συνάρτηση Dirac (Σχήμα 1.2)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

Η κρουστική συνάρτηση Dirac έχει την εξής σημαντική ιδιότητα

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1, \varepsilon > 0.$$



Σχήμα 1.2: Κρουστική συνάρτηση Dirac.

```
t=[-5:0.1:10];
u=dirac(t);
plot(t,dirac(t),'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2);
ylim([-0.1 1]);
title('Dirac Function');
xlabel('t');
ylabel('\delta(t)');
grid('on');
```

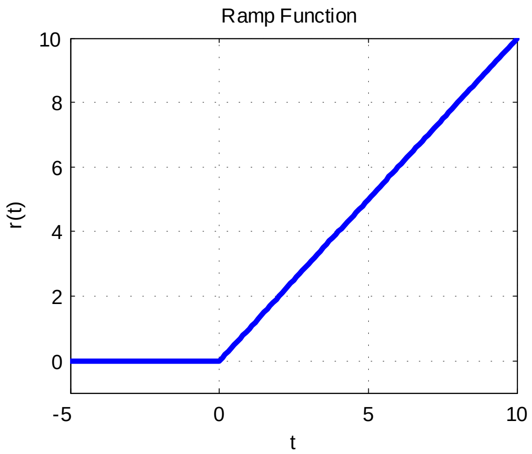
3.Μοναδιαία συνάρτηση ράμπας (Σχήμα 1.3)

$$r(t) = \mathbf{1}(t)t = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

```
t=[-5:0.1:10];
u=[zeros(1,50),ones(1,101)];
r=u.*t;
plot(t,r,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2);
ylim([-1 10]);
title('Ramp Function');
xlabel('t');
ylabel('r(t)');
grid('on');
```

4. Τετραγωνικός παλμός (Σχήμα 1.4)

$$p_\tau(t) = \mathbf{1}(t+\frac{\tau}{2}) - \mathbf{1}(t-\frac{\tau}{2}) = \begin{cases} 1, & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t < -\frac{\tau}{2}, t \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



Σχήμα 1.3: Μοναδιαία συνάρτηση ράμπας.

```
t=[-5:0.1:10];
u1=[zeros(1,40),ones(1,111)];
u2=[zeros(1,60),ones(1,91)];
p=u1-u2;
subplot(3,1,1), plot(t,u1,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2),
    ylim([-0.1 1.1]), grid('on');
subplot(3,1,2), plot1 = plot(t,u2,'Color',[0 0 1], '
    LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]), grid('on');
subplot(3,1,3), plot1 = plot(t,p,'Color',[0 0 1], '
    LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]), title('Unit Pulse'),
    xlabel('t'), ylabel('p(t)'), grid('on');
```

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να γίνει εύκολα η γραφική παράσταση του σήματος

$$y(t) = p_4(t-2)\sin(\pi t)$$

ως εξής

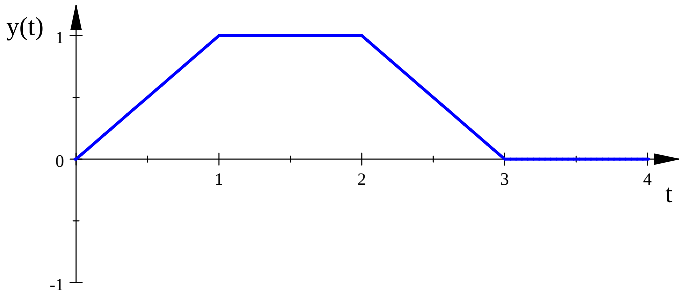
```
t=[-5:0.1:10];
u1=[zeros(1,50),ones(1,101)];
u2=[zeros(1,90),ones(1,61)];
p=(u1-u2).*sin(pi*t);
subplot(3,1,1), plot(t,u1-u2,'Color',[0 0 1], 'LineWidth'
    ,2), ylim([-1.1 1.1]), grid('on');
subplot(3,1,2), plot(t,sin(3*t),'Color',[0 0 1], 'LineWidth
    ',2), ylim([-1.1 1.1]), grid('on');
subplot(3,1,3), plot(t,p,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2),
    ylim([-1.1 1.1]), title('Unit Pulse'), xlabel('t'),
    ylabel('p(t)'), grid('on');
```

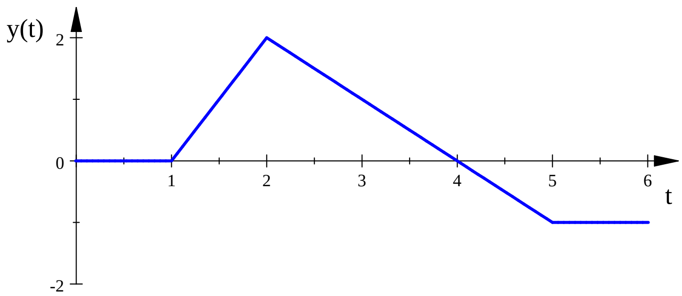
Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 1.5. Ένας εύκολος τρόπος για να παράγουμε σήματα είναι με την εντολή gensig.

```
[u,t]=gensig('square',2,10,0.1);
subplot(3,1,1), plot(t,u,'LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]),
    grid('on'), title('Square wave with period 2, duration
    10, sampling every 0.1'), xlabel('t');
[u,t]=gensig('sin',3,10,0.1);
subplot(3,1,2), plot(t,u,'LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]),
    grid('on'), title('Sin wave with period 3, duration 10,
    sampling every 0.1'), xlabel('t');
[u,t]=gensig('pulse',2,10,0.1);
subplot(3,1,3), plot(t,u,'LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]),
    grid('on'), title('Pulse wave with period 2, duration
    10, sampling every 0.1'), xlabel('t');
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 1.6.

Παράδειγμα 1.1 *Να γραφεί ο αναλυτικός τύπος των παρακάτω σημάτων με τη βοήθεια της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης* $\mathbf{1}(t)$.





Λύση

1. Με βάση το παραπάνω σχήμα αναλύουμε το σήμα σε ”συνδυασμό” παλμών, που αντιστοιχούν στα διαστήματα $[0, 1), [1, 2)$ και $[2, 3)$:

$$y(t) = r(t)p_1(t - \frac{1}{2}) + p_1(t - \frac{3}{2}) + [1 - r(t - 2)]p_1(t - \frac{5}{2})$$

Αλλά, επειδή

$$P_T(t) = \mathbf{1}(t + \frac{T}{2}) - \mathbf{1}(t - \frac{T}{2})$$

έχουμε:

- $p_1(t-\frac{1}{2}) = \mathbf{1}(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) - \mathbf{1}(t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$
- $p_1(t-\frac{3}{2}) = \mathbf{1}(t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}) - \mathbf{1}(t-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}) = \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)$
- $p_1(t-\frac{5}{2}) = \mathbf{1}(t-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}) - \mathbf{1}(t-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}) = \mathbf{1}(t-2) - \mathbf{1}(t-3)$

Άρα:

$$y(t) = r(t)[\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-1)]+\mathbf{1}(t-1)-\mathbf{1}(t-2)+[1-r(t-2)][\mathbf{1}(t-2)-\mathbf{1}(t-3)]$$

ή

$$y(t) = t\mathbf{1}(t) - t\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-3) - (t-2)\mathbf{1}(t-2) + (t-2)\mathbf{1}(t-3)$$

2. Αντίστοιχα με το πρώτο μέρος της άσκησης, αναλύουμε το σήμα τους σχήματος σε ”συνδυασμό” παλμών που αντιστοιχούν στα διαστήματα $[1,2)$ και $[2,5)$ και μια βηματική συνάρτηση που αντιστοιχεί στο διάστημα $[5,+\infty)$:

$$y(t) = 2r(t-1)p_1(t-\frac{3}{2}) + [2-r(t-2)]p_3(t-\frac{7}{2}) - \mathbf{1}(t-5)$$

Αλλά

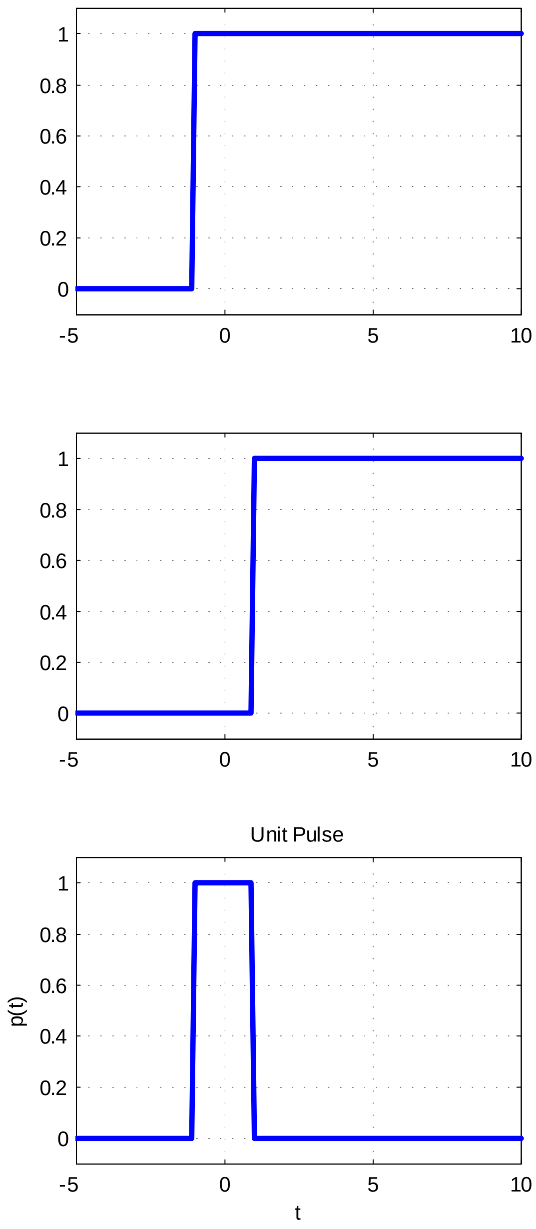
- $p_1(t-\frac{3}{2}) = \mathbf{1}(t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}) - \mathbf{1}(t-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}) = \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)$
- $p_3(t-\frac{7}{2}) = \mathbf{1}(t-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}) - \mathbf{1}(t-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}) = \mathbf{1}(t-2) - \mathbf{1}(t-5)$

Οπότε

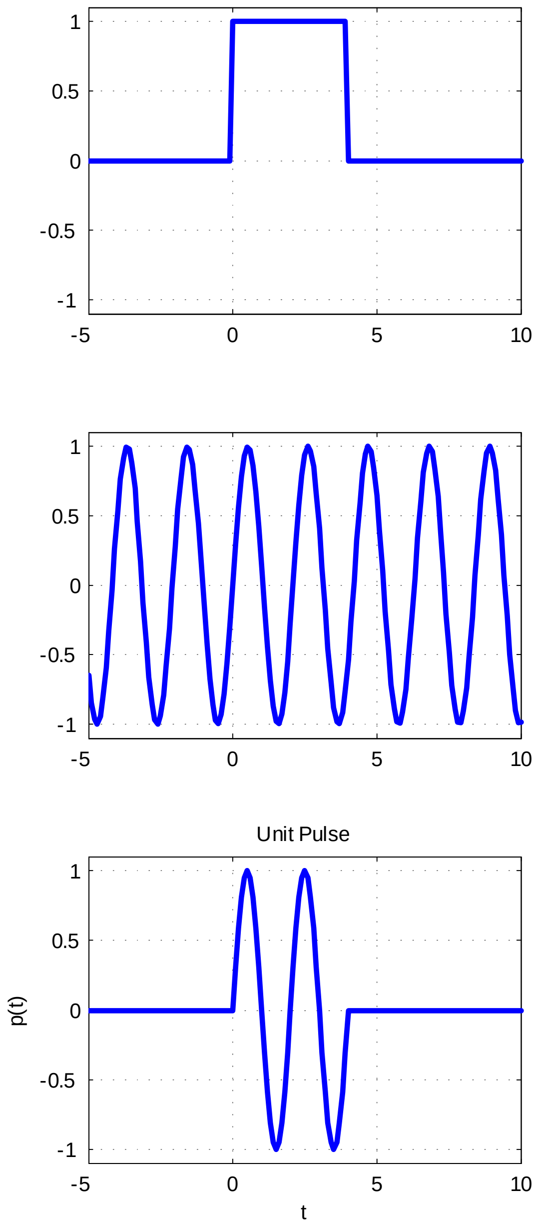
$$y(t) = 2r(t-1)[\mathbf{1}(t-1)-\mathbf{1}(t-2)]+[2-r(t-2)][\mathbf{1}(t-2)-\mathbf{1}(t-5)]-\mathbf{1}(t-5)$$

ή

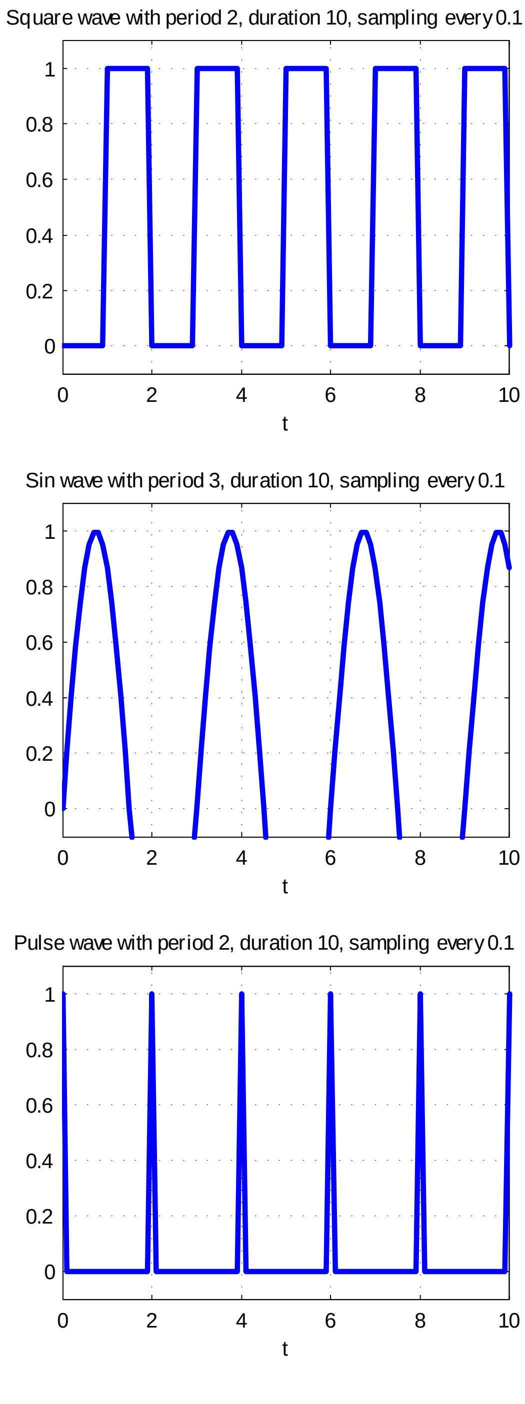
$$\begin{aligned} y(t) = {} & 2(t-1)\mathbf{1}(t-1) - 2(t-1)\mathbf{1}(t-2) + \\ & + 2\cdot\mathbf{1}(t-2) - 3\cdot\mathbf{1}(t-5) - (t-2)\mathbf{1}(t-2) + (t-2)\mathbf{1}(t-5). \end{aligned}$$



Σχήμα 1.4: Τετραγωνικός παλμός



Σχήμα 1.5: $y(t) = p_4(t-2)\sin(\pi t)$



Σχήμα 1.6: Παραγωγή σημάτων με την gensig

Κεφάλαιο 2

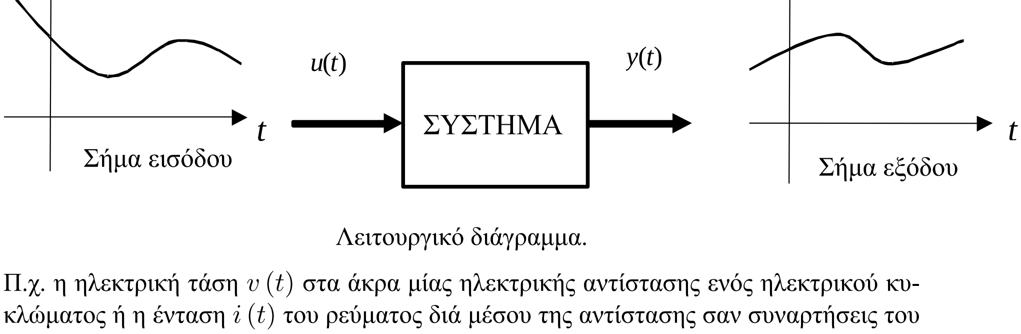
Μαθηματικές περιγραφές συστημάτων

2.1 Διαφορικές εξισώσεις

Ένα σύστημα είναι ένα σύνολο από επιμέρους τμήματα, εξαρτήματα, στοιχεία που συνδέονται μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν επιτελώντας συγκεκριμένο έργο. Συνήθως τα συστήματα θεωρούμε ότι έχουν κάποιες εισόδους και εξόδους. Οι είσοδοι και οι έξοδοι ενός συστήματος είναι σήματα. Έτσι ένα σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας μετασχηματισμός του σήματος εισόδου u στο σήμα εξόδου y. Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε με συνεχή συστήματα που με την σειρά τους έχουν συνεχή σήματα σαν είσοδο και σαν έξοδο. Έτσι τα σήματα μπορούν να γραφτούν σαν μια συνεχή συνάρτηση του χρόνου ($u(t)$ και $y(t)$) ενώ το σύστημα θα περιγράφεται από το μετασχηματισμό F. Έτσι η σχέση εισόδου και εξόδου ενός συστήματος θα είναι

$$y(t) = F\left(u(t)\right).$$

Ένα σύστημα με σήμα εισόδου $u\left(t\right)$ και σήμα εξόδου $y\left(t\right)$ περιγράφεται διαγραμματικά από το επόμενο σχήμα. Ένα τέτοιο διάγραμμα ονομάζεται *λειτουργικό διάγραμμα* (block diagram) του συστήματος.



Λειτουργικό διάγραμμα.

Π.χ. η ηλεκτρική τάση $v\left(t\right)$ στα άκρα μίας ηλεκτρικής αντίστασης ενός ηλεκτρικού κυκλώματος ή η ένταση $i\left(t\right)$ του ρεύματος διά μέσου της αντίστασης σαν συναρτήσεις του χρόνου t είναι παραδείγματα σημάτων. Το ίδιο το ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελεί παράδειγμα συστήματος, το οποίο στην περίπτωση αυτή αποκρίνεται στο εφαρμοζόμενο στους ακροδέκτες εισόδου του κυκλώματος σήμα ηλεκτρικής τάσης παράγοντας ένα συγκεκριμένο σήμα έντασης ρεύματος διά μέσου της αντίστασης το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η έξοδος του συστήματος.

Ορισμός 2.1 *Ένα σύστημα που περιγράφεται από τον μετασχηματισμό F θα λέγεται γραμμικό αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος σημάτων εισόδου $u_1(t)$ και $u_2(t)$ και πραγματικούς αριθμούς a και b, η έξοδος του συστήματος για είσοδο το σήμα $(au_1(t) + bu_2(t))$ είναι $aF(u_1(t)) + bF(u_2(t))$ δηλαδή*

$$F(au_1(t) + bu_2(t)) = aF(u_1(t)) + bF(u_2(t)). \tag{2.1}$$

Παράδειγμα 2.2 *Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου εξόδου*

$$y(t) = (u(t))^2.$$

Να ελεγχθεί αν το σύστημα αυτό είναι γραμμικό.

Λύση

Έστω δύο σήματα $u_1(t)$ και $u_2(t)$. Για ευκολία σε αυτά θα αναφερόμαστε σαν u_1 και u_2 αντίστοιχα. Τότε το πρώτο μέλος της (2.1) γίνεται

$$F(au_1 + bu_2) = (au_1 + bu_2)^2 = a^2u_1^2 + b^2u_2^2 + 2abu_1u_2.$$

Το δεύτερο μέλος της (2.1) γίνεται

$$aF(u_1) + bF(u_2) = au_1^2 + bu_2^2.$$

Για να είναι το σύστημα γραμμικό θα έπρεπε τα δύο μέλη να είναι ίσα κάτι που προφανώς δεν συμβαίνει. Άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3 *Ένα σύστημα είναι γραμμικό αν η σχέση εισόδου εξόδου μπορεί να περιγραφτεί από μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής*

$$\begin{aligned} a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = \\ = b_m(t)\frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + b_0(t)u(t) \end{aligned}$$

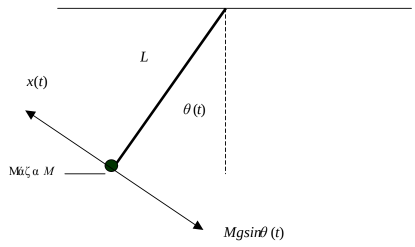
όπου με $\frac{d^k}{dt^k}$ συμβολίζεται η n-οστή παράγωγος, $a_i(t)$, $b_i(t), i = 0, \ldots, n$ και όπου $y(t)$ η έξοδος και $u(t)$ η είσοδος του συστήματος.

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω εξίσωση οι συντελεστές των παραγώγων δεν είναι σταθερές αλλά συναρτήσεις του χρόνου. Στα πλαίσια του μαθήματος θα ασχοληθούμε με γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα, δηλαδή όταν $a_i(t) = a_i$. Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} a_n\tfrac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_0y(t) = \\ = b_m\tfrac{d^m}{dt^m}u(t) + b_{m-1}\tfrac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + b_0u(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

όπου με $\frac{d^k}{dt^k}$ συμβολίζεται η n-οστή παράγωγος, a_i, $b_i, i = 0, \ldots, n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και όπου $y(t)$ η έξοδος και $u(t)$ η είσοδος του συστήματος.

Ας συνεχίσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Θεωρήστε το σύστημα ενός απλού εκκρεμούς μήκους L και μάζας M.



Απλό εκκρεμές.

Η είσοδος $u\left(t\right)$ στο σύστημα είναι η δύναμη η οποία εφαρμόζεται στη μάζα M και έχει διεύθυνση αυτήν της εφαπτομένης στην τροχιά της κίνησης της μάζας, και $Mg\sin\theta\left(t\right)$ είναι η δύναμη λόγω της βαρύτητας η οποία δρα και αυτή εφαπτομενικά στην τροχιά της κίνησης. Σαν έξοδος $y\left(t\right)$ του συστήματος ορίζεται η γωνία $\theta\left(t\right)$ μεταξύ του εκκρεμούς και της κατακόρυφου. Από τούς νόμους της μηχανικής έχουμε ότι η σχέση εισόδου-εξόδου για το απλό εκκρεμές δίδεται από τη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως:

$$ML^2\frac{d^2\theta\left(t\right)}{dt^2}+MgL\sin\theta\left(t\right)=Lu\left(t\right) \tag{2.3}$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Λόγω του όρου $\sin\theta\left(t\right)$ η διαφορική εξίσωση 2.3 είναι μία *μη γραμμική* διαφορική εξίσωση. Η μη γραμμικότητα της 2.3 έχει σαν συνέπεια την μη δυνατότητα εύρεσης αναλυτικής έκφρασης της λύσης $y\left(t\right)$ σαν συνάρτησης της εισόδου $u\left(t\right)$. Αν το μέτρο $\left|\theta\left(t\right)\right|$ της γωνίας $\theta\left(t\right)$ είναι μικρό έτσι ώστε $\sin\theta\left(t\right)\simeq\theta\left(t\right)=y(t)$ η *μη γραμμική* διαφορική εξίσωση 2.3 μπορεί να προσεγγιστεί από την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$ML^2\frac{d^2y\left(t\right)}{dt^2}+MgLy\left(t\right)=Lu\left(t\right). \tag{2.4}$$

Η γραμμικότητα ενός συστήματος όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, μας δίνει την δυνατότητα να εφαρμόσουμε μια ολόκληρη γκάμα από μαθηματικές τεχνικές για την ανάλυση της συμπεριφοράς του.

2.1.1 Ελεύθερη απόκριση συστήματος

Ορισμός 2.4 *Η έξοδος (απόκριση) του συστήματος όταν η είσοδος είναι* 0 *ονομάζεται* ***ελεύθερη απόκριση*** *και συμβολίζεται* $y_{\varepsilon\lambda}(t)$.

Αν στην γενική διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου βάλουμε $u(t)=0$ τότε έχουμε

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_0y(t)=0.$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ονομάζεται ομογενής. Το πολυώνυμο

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της ομογενούς δ.ε. ενώ η εξίσωση

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0=0 \tag{2.5}$$

χαρακτηριστική εξίσωση. Άρα η λύση της ομογενούς δ.ε. μας δίνει την ελεύθερη απόκριση. Η λύση της ομογενούς εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής. Πιο κάτω θα περιγράψουμε ένα τρόπο λύσης της ομογενούς δ.ε.

1. Λύνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση (2.5). Έστω ότι αυτή έχει μια πραγματική ρίζα p πολλαπλότητας k, δύο μιγαδικές $\alpha+ib$ και την συζυγή της $\alpha-ib$ πολλαπλότητας m.

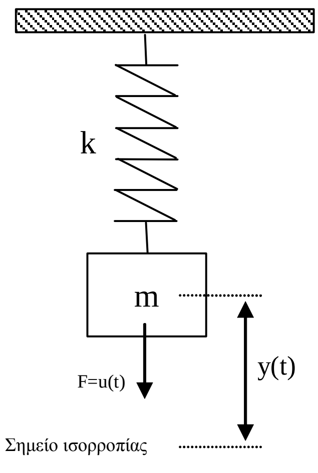
2. Το μέρος της λύσης που αντιστοιχεί στην πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι
$$y_1(t) = \left(c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1}\right) e^{pt}. \tag{2.6}$$
όπου τα c_i είναι πραγματικοί αριθμοί.

3. Το μέρος της λύσης που αντιστοιχεί στις μιγαδικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι
$$y_2(t) = e^{\alpha t}\left[(c_1 + c_2 t + \cdots + c_m t^{m-1})\sin(bt) + (c_1^{'} + c_2^{'} t + \cdots + c_m^{'} t^{m-1})\cos(bt)\right] \tag{2.7}$$
όπου τα $c_i, c_i^{'}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

4. Η συνολική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι το άθροισμα
$$y(t) = y_{\varepsilon\lambda}(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

Αντίστοιχα δουλεύουμε όταν έχουμε περισσότερες από μία πραγματικές ή μιγαδικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Μέχρι στιγμής έχουμε βρει μια οικογένεια λύσεων της ομογενούς μια και δεν έχουμε βρει ακόμα συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους c_i και $c_i^{'}$. Αυτό θα γίνει με την βοήθεια των αρχικών συνθηκών που θα μας δίνονται.

Παράδειγμα 2.5 *Έστω ένα ελατήριο με μια μάζα κρεμασμένη στο ένα άκρο του όπως στο παρακάτω σχήμα.*



Σύστημα ελατήριο-μάζα.

k είναι ο συντελεστής σκληρότητας του ελατηρίου, M η μάζα του ελατηρίου, $y(t)$ ονομάζω την απόσταση του κέντρου βάρους της μάζας από το σημείο ισορροπίας της και $u(t)$ είναι η κάθετη δύναμη την οποία εφαρμόζουμε στη μάζα. Η δ.ε. που περιγράφει το σύστημα είναι

$$M\frac{d^2}{dt^2}y(t) + b\frac{d}{dt}y(t) + ky(t) = u(t)$$

όπου b μια σταθερά που εξαρτάται από την αντίσταση του αέρα. Ποια είναι η ελεύθερη απόκριση του συστήματος όταν την χρονική στιγμή 0 το σώμα βρίσκεται στην θέση $y(0) = 1$ και έχει ταχύτητα $y^{'}(0) = 2$; Δίνεται ότι $M = 10, k = 5, b = 2$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι

$$10p^2 + 2p + 5 = 0$$

και η λύση της είναι

$$p_1 = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i, \bar{p}_1 = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Από την (2.7) έχουμε ότι η λύση είναι

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \sin(bt) + c_1^{'} \cos(bt)\right) = e^{-\frac{1}{10}t}\left(c_1 \sin(\frac{7}{10}t) + c_1^{'} \cos(\frac{7}{10}t)\right).$$

Επιπλέον ξέρουμε ότι

$$y(0) = 1$$

άρα θα πρέπει

$$e^{-\frac{1}{10}t}\left(c_1 \sin(\frac{7}{10}0) + c_1^{'} \cos(\frac{7}{10}0)\right) = 1$$

δηλαδή μετά από πράξεις

$$c_1^{'} = 1.$$

Αντίστοιχα θα πρέπει $y^{'}(0) = 2$. Υπολογίζω την παράγωγο της λύσης $y(t)$

$$y^{'}(t) = -\frac{1}{10}e^{-\frac{t}{10}}\left(c_1^{'} \cos(\frac{7}{10}t) + c_1 \sin(\frac{7}{10}t)\right) + e^{-\frac{t}{10}}\left(\frac{7}{10}c_1 \cos(\frac{7}{10}t) - \frac{7}{10}c_1^{'} \sin(\frac{7}{10}t)\right)$$

και υπολογίζοντας την παραπάνω παράσταση για $t = 0$ έχω

$$y^{'}(0) = \frac{7}{10}c_1 - \frac{1}{10}c_1^{'} \overset{c_1^{'}=1}{=} \frac{7}{10}c_1 - \frac{1}{10}$$

Επειδή $y^{'}(0) = 2$ έχω ότι

$$\frac{7}{10}c_1 - \frac{1}{10} = 2$$

και άρα

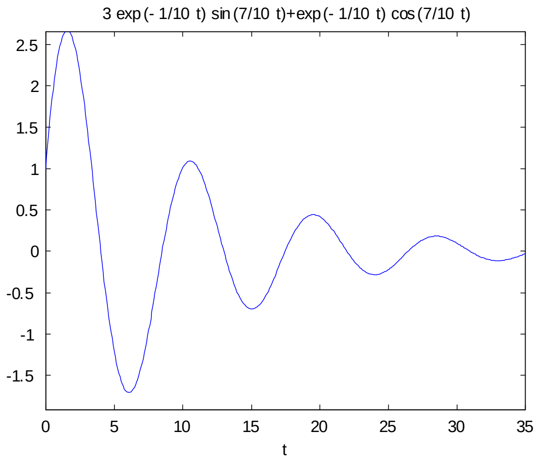
$$c_1 = 3.$$

Έτσι η απόκριση του συστήματος κάτω από τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες είναι

$$y(t) = y_{\varepsilon\lambda}(t) = e^{-\frac{1}{10}t}\left(3\sin(\frac{7}{10}t) + \cos(\frac{7}{10}t)\right)$$

Για να υπολογίσουμε την παραπάνω ελεύθερη απόκριση με το MATLAB χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες εντολές.

```
sol=dsolve('10*D2y+2*Dy+5*y=0','y(0)=1,Dy(0)=2')
ezplot(sol,[0,35])
```



Ελεύθερη απόκριση του συστήματος

2.1.2 Δυναμική (εξαναγκασμένη) απόκριση συστήματος

Δυναμική ή αλλιώς εξαναγκασμένη απόκριση ενός συστήματος που περιγράφεται από μια δ.ε. ονομάζεται η λύση όταν όλες οι αρχικές συνθήκες $y(0)$, $\frac{d}{dt}y(0), \ldots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(0)$ είναι ταυτοτικά μηδέν και θα συμβολίζεται με $y_{\delta\upsilon\nu}(t)$. Άρα προφανώς η δυναμική απόκριση ενός συστήματος εξαρτάται μόνο από την είσοδο στο σύστημα. Έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού της δυναμικής απόκρισης θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace.

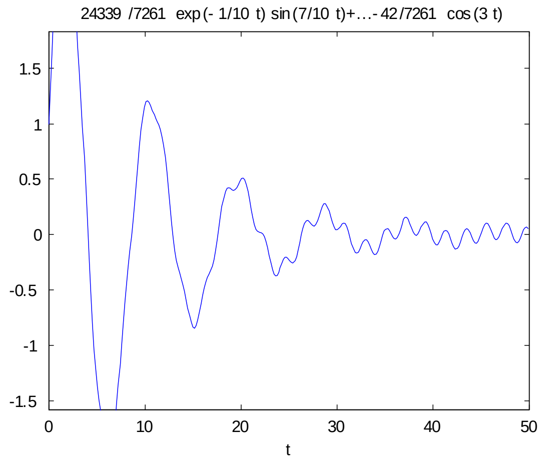
2.1.3 Ολική απόκριση συστήματος

Η **ολική απόκριση** ($y_{o\lambda}(t)$) ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι το άθροισμα της ελεύθερης και της δυναμικής του απόκρισης και αντιστοιχεί στην λύση της διαφορικής εξίσωσης κάτω από συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες και συγκεκριμένο σήμα εισόδου. Άρα

$$y_{o\lambda}(t) = y_{\varepsilon\lambda}(t) + y_{\delta\upsilon\nu}(t).$$

Στο σύστημα μάζας - ελατηρίου του παραδείγματος 2.5, η έξοδος (ολική απόκριση) του συστήματος όταν σαν είσοδο έχουμε $u(t) = 7\sin(3t)$ υπολογίζεται στο MATLAB με τις ακόλουθες εντολές.

```
sol=dsolve('10*D2y+2*Dy+5*y=7*sin(3*t)','y(0)=1,Dy(0)=2')
ezplot(sol,[0,50])
```



Απόκριση του συστήματος

Η λύση που παράγει το MATLAB είναι η

$$\underbrace{\frac{24339}{7261}e^{-0.1t}\sin(0.7t)+\frac{7303}{7261}e^{-0.1t}\cos(0.7t)}_{\text{ελεύθερη απόκριση}}+\underbrace{\left(-\frac{595}{7261}\sin(3t)-\frac{42}{7261}\cos(3t)\right)}_{\text{δυναμική απόκριση}}$$

Στα παρακάτω κεφάλαια θα μάθουμε να υπολογίζουμε την ολική απόκριση του συστήματος με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace.

2.1.4 Μόνιμη και μεταβατική απόκριση συστήματος

Η **μόνιμη απόκριση** $y_{\mu o\nu}(t)$ είναι το μέρος της ολικής απόκρισης το οποίο δεν τείνει στο μηδέν όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Αντίστοιχα **μεταβατική απόκριση** $y_{\mu\varepsilon\tau}(t)$ ενός συστήματος είναι το μέρος της ολικής απόκρισης το οποίο τείνει στο μηδέν όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Σύμφωνα με αυτούς τους ορισμούς, αν $y(t)$ είναι η ολική απόκριση του συστήματος έχουμε

$$y_{\mu o\nu}(t)=\lim_{t\to\infty}y(t) \tag{2.8}$$

και

$$y_{\mu\varepsilon\tau}(t)=y(t)-y_{\mu o\nu}(t).$$

2.1.5 Μεταβλητές κατάστασης

Όπως είδαμε προηγούμενα, τα χρονικά αμετάβλητα γραμμικά συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου περιγράφονται μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης n τάξης της μορφής (2.2). Πολλές φορές μας διευκολύνει η περιγραφή ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου μέσω ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_0y(t)=u(t) \tag{2.9}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να αντικατασταθεί με το παρακάτω σύστημα n το πλήθος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \frac{d}{dt}x_n(t) = -\frac{1}{a_n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}\right) + \frac{1}{a_n}u \end{array} \right. \tag{2.10}$$

όπου έχει είδη γίνει η αντικατάσταση $x_1(t) = y(t)$. Σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις (2.10) γίνονται

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_{n-1}(t) \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + [0]\, u \end{gathered} \tag{2.11}$$

Πιο συνοπτικά μπορούμε να γράψουμε

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{array} \right.$$

όπου

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} A \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Το $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$ ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης, ενώ τα $x_i(t)$ μεταβλητές κατάστασης. Η $y(t)$ συνεχίζει να είναι η έξοδος του συστήματος και $u(t)$ η είσοδος του συστήματος όπως και στην (2.9).

Γενικότερα συστήματα με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους που περιγράφονται από πολλές διαφορικές εξισώσεις της μορφής (2.9) μπορούν να παρασταθούν από ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

ή πιο σύντομα

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x}. \end{cases}$$

Για την λύση διαφορικών εξισώσεων της μορφής (2.12) πρέπει να ορισθεί εκτός από το διάστημα στο οποίο μελετάμε το σύστημα και το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών δηλαδή η τιμή του $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$. Τότε η λύση δίνεται από

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{2.13}$$

όπου με e^{At} συμβολίζουμε

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots .$$

Από την (2.13) παρατηρούμε ότι για να προσδιορίσουμε πλήρως τις μεταβλητές κατάστασης άρα και την έξοδο του συστήματος αρκεί η γνώση των συναρτήσεων εισόδων $u_i(t)$ και των αρχικών συνθηκών $x_i(0)$.

Αντίστοιχα ένας τρόπος για να εισάγουμε στο MATLAB ένα δυναμικό σύστημα είναι μέσω της περιγραφής στο χώρο των καταστάσεων.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα ελατήριο - μάζα. Αν M είναι η μάζα του σώματος, k ο συντελεστής σκληρότητας του ελατηρίου και b συντελεστής τριβής της μάζας με τα τοιχώματα, τότε το σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$M\frac{d^2}{dt^2}y(t) + b\frac{d}{dt}y(t) + ky(t) = u(t) \tag{2.14}$$

όπου $y(t)$ είναι η απόσταση του σώματος από το σημείο ισορροπίας και $u(t)$ μια εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στο ελατήριο. Χρησιμοποιώντας την (2.11) η διαφορική εξίσωση (2.14) γίνεται

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Θέτοντας $M = 10, k = 5, b = 2$ το παραπάνω σύστημα γίνεται

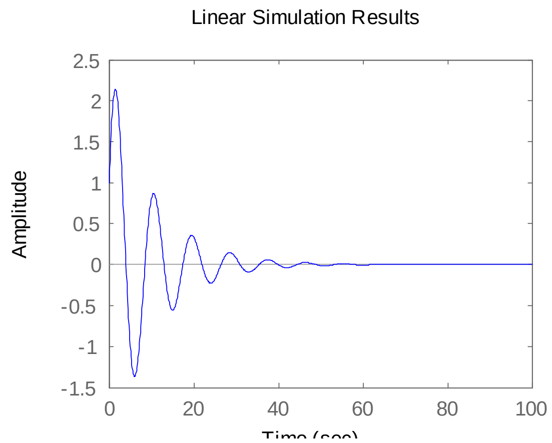
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.5 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Ο ορισμός ενός συστήματος στο χώρο των καταστάσεων γίνεται στο MATLAB με την εντολή `ss()`.

```
ma=[0,1;-0.5,-0.2];
mb=[0;0.1];
mc=[1,0];
sys=ss(ma,mb,mc,0);
```

Για να κάνουμε εξομοίωση αυτού του συστήματος στο MATLAB χρησιμοποιούμε την εντολή `lsim` αφού πιο πριν έχουμε ορίσει το διάνυσμα του χρόνου, το διάνυσμα εισόδου στο σύστημα και τις αρχικές συνθήκες.

```
t=[0:0.1:100];
y0=[1;1.5];
u=zeros(1,1001);
lsim(sys,u,t,y0);
```

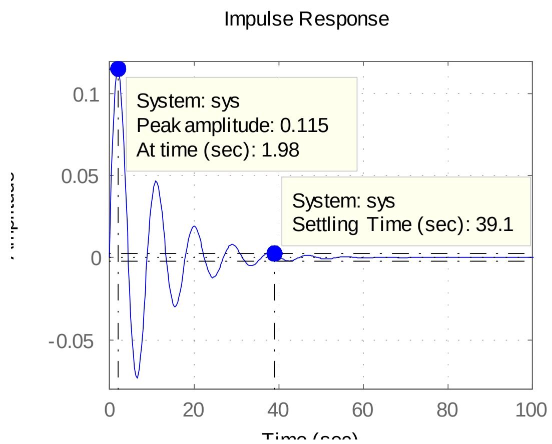


Εξομοίωση συστήματος με την εντολή `lsim`

Το γράφημα που προκύπτει από την εντολή lsim είναι η απόκριση του συστήματος σε μηδενική είσοδο για $y(0) = 1$ και $\dot{y}(0) = 1.5$, δηλαδή είναι η ελεύθερη απόκριση του συστήματος. Για να ελέγξουμε ευκολότερα τις λεπτομέρειες του γραφήματος, μπορώ να αποθηκεύσω το διάνυσμα της απόκρισης του συστήματος σε μια μεταβλητή.

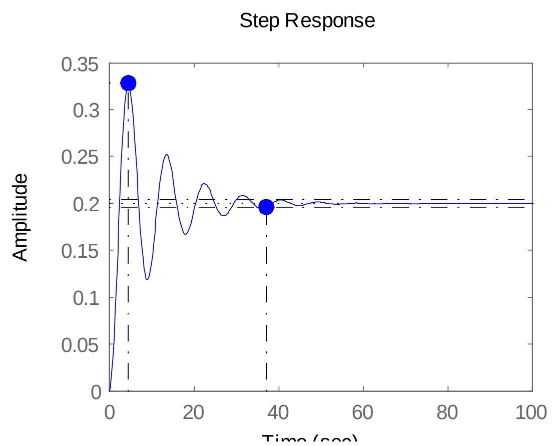
```
y=lsim(sys,u,t,y0);
plot(t,y,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2);
title('Free response of a Mass Spring System'), xlabel('t')
    , ylabel('y(t)'), grid('on');
mx=max(abs(y))
```

Με την τελευταία εντολή υπολογίζω τη μέγιστη απομάκρυνση που παρουσιάζει το ελατήριο από την θέση ισορροπίας. Την ελεύθερη απόκριση μπορώ να πάρω και πολύ πιο απλά με την εντολή `initial(sys,y0,100)` όπου το δεύτερο όρισμα είναι οι αρχικές συνθήκες και το τρίτο ο χρόνος μέχρι τον οποίο θέλουμε να μελετήσουμε το σύστημα. Η απόκριση του συστήματος με είσοδο την κρουστική συνάρτηση Dirac $\delta(t)$ (κρουστική απόκριση) δίνεται από την εντολή `impulse(sys,100)` όπου 100 είναι πάλι το χρονικό διάστημα που μελετάμε το σύστημα (Σχήμα 2.1). Αν κάνουμε δεξί κλικ πάνω στο γράφημα μας δίνονται διάφορες επιπλέον πληροφορίες για το σύστημα.Αντίστοιχα με την



Σχήμα 2.1: Κρουστική απόκριση συστήματος με την εντολή impulse().

εντολή `step(sys)` υπολογίζουμε την βηματική απόκριση δηλαδή την απόκριση του συστήματος για βηματική είσοδο (Σχήμα 2.2).Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε

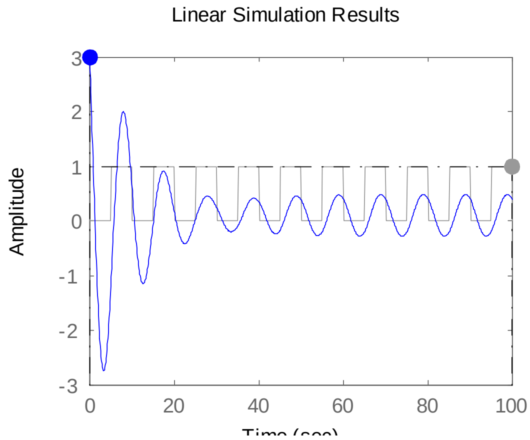


Σχήμα 2.2: Βηματική απόκριση συστήματος με την εντολή step().

την απόκριση του συστήματος για $0 \leq t \leq 100$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες για είσοδο τον παλμό με περίοδο 10.

Σχήμα 2.3

```
[u,t]==gensig('square',10,100,0.1);
lsim(sys,u,t,[0;0]);
```



Σχήμα 2.3: Απόκριση συστήματος.

2.1.6 Διάγραμμα ροής σήματος

Ένας ολοκληρωτής είναι ένα σύστημα του οποίου το σήμα εξόδου $y\,(t)$ ισούται με το ολοκλήρωμα του σήματος εισόδου $u\,(t)$ και στην πράξη μπορεί να κατασκευαστεί με κατάλληλη διασύνδεση ολοκληρωμένων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων. Ένας ολοκληρωτής περιγράφεται διαγραμματικά από ένα κουτί μιας εισόδου και μιας εξόδου με σήμα το $\int$ ή το $\frac{1}{s}$.

Έστω η διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^n}{dt^n}y\,(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y\,(t) + ... + a_0 y\,(t) = b_0 u(t)$$

Τότε για να φτιάξουμε το διάγραμμα ροής σήματος ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα.

- Βάζουμε σε σειρά n ολοκληρωτές ο πρώτος από τους οποίους θεωρούμε ότι δέχεται σαν είσοδο την $\frac{d^n}{dt^n}y\,(t)$.
- Λύνουμε την δ.ε. ως προς τον όρο μέγιστης τάξης δηλαδή

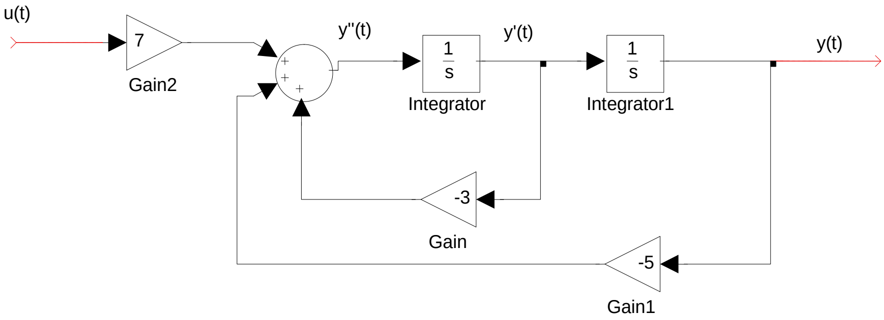
$$\frac{d^n}{dt^n}y\,(t) = -a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y\,(t) - ... - a_0 y\,(t) + b_0 u(t)$$

- Βάζουμε έναν αθροιστή στα δεξιά του πρώτου ολοκληρωτή και προσπαθούμε να δημιουργήσουμε το άθροισμα $-a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y\,(t) - ... - a_0 y\,(t) + b_0 u(t)$.

Έτσι πχ το διάγραμμα ροής σήματος της

$$y^{''}(t) + 3y^{'}(t) + 5y(t) = 7u(t)$$

είναι το ακόλουθο:



2.2 Μετασχηματισμός Laplace

2.2.1 Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός 2.6 *Έστω $f(t)$ μια πραγματική συνάρτηση της μεταβλητής του χρόνου t ορισμένη για $t \geq 0$. Τότε η παράσταση*

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2.15}$$

*όπου $s = \sigma + j\omega$, με σ και ω πραγματικές μεταβλητές και j η μιγαδική μεταβλητή θα ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace** της $f(t)$.*

Από εδώ και πέρα ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ θα συμβολίζεται με $F(s)$.

Ορισμός 2.7 *Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ για $t \geq 0$. Το μιγαδικό ολοκλήρωμα*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{2.16}$$

καλείται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Χάρη σε κάποιες τεχνικές που θα αναπτύξουμε πιο κάτω, πολύ σπάνια θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα (2.16).

2.2.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

Πριν προχωρήσουμε με κάποιες βασικές και πολύ χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace και του αντίστροφού του δίνουμε τον παρακάτω πίνακα ζευγών μετασχηματισμών Laplace

Συναρτηση $f(t)$		Μετασχηματισμός Laplace
Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση	$\delta(t)$	1
Μοναδιαία βηματική συνάρτηση	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
Μοναδιαία συνάρτηση κλίσης	t	$\frac{1}{s^2}$
Πολυώνυμο	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Εκθετική	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Ημιτονοειδής	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Συνημινοτονοειδής	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Αποσβενυμένη Ημιτονοειδής	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Αποσβενυμένη Συνημινοτονοειδής	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

1. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{L}\left(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right) = \mathcal{L}\left(a_1 f_1(t)\right) + \mathcal{L}\left(a_2 f_2(t)\right) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s).$$

2. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι κι αυτός γραμμικός δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{L}^{-1}\left(a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)\right) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t).$$

3. Η φόρμουλα της παραγωγίσεως

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{'}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Εφαρμόζοντας παραδείγματος χάριν την φόρμουλα της παραγωγίσεως στην διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \sin(3t)$$

με αρχικές συνθήκες $\frac{d}{dt} y(0) = 4$ και $y(0) = 5$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + \mathcal{L}\left(y(t)\right) = \mathcal{L}\left(\sin(3t)\right) \iff$$

$$\Big(s^2 y(s) - s^{2-1} y(0) - s^{2-2} y^{'}(0)\Big) + \big(sy(s) - s^{1-1} y(0)\big) + (y(s)) = \frac{3}{s^2+9} \iff$$

$$s^2 y(s) - 5s - 4 + sy(s) - 5 + y(s) = \frac{3}{s^2+9} \iff$$

$$y(s) = \frac{5s^3 + 9s^2 + 45s + 84}{(s^2+s+1)(s^2+9)}.$$

4. Το Θεώρημα της αρχικής τιμής μας λέει ότι η αρχική τιμή μιας συνάρτησης $f(t)$ με μετασχηματισμό Laplace $F(s)$ είναι

$$f(0) = \lim_{s \longrightarrow \infty} sF(s).$$

5. Αντίστοιχα το Θεώρημα της τελικής τιμής μας λέει ότι η τελική μιας συνάρτησης $f(t)$ με μετασχηματισμό Laplace $F(s)$ είναι

$$f(\infty) = \lim_{s \longrightarrow 0} sF(s).$$

6. Κλιμάκωση στο χρόνο
$$\mathcal{L}\left(f(\frac{t}{a})\right) = aF(as).$$

7. Κλιμάκωση στη συχνότητα
$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(\frac{s}{a})\right) = af(at).$$

8. Μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου
$$\mathcal{L}\left(f(t-T)\right) = e^{-sT}F(s)$$
όπου $T > 0$ και $f(t-T) = 0$ για $t \leq T$.

9. Μετατόπιση στο πεδίο της συχνότητα
$$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) = F(s+a).$$

10. Φόρμουλα πολ/μου με μια δύναμη του t
$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

Εφαρμόζοντας παραδείγματος χάριν την φόρμουλα της παραγωγίσεως στην διαφορική εξίσωση
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \sin(3t)$$
με αρχικές συνθήκες $\frac{d}{dt}y(0) = 4$ και $y(0) = 5$ έχουμε
$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + \mathcal{L}\left(y(t)\right) = \mathcal{L}\left(\sin(3t)\right) \iff$$
$$\left(s^2y(s) - s^{2-1}y(0) - s^{2-2}y^{'}(0)\right) + \left(sy(s) - s^{1-1}y(0)\right) + \left(y(s)\right) = \frac{3}{s^2+9} \iff$$
$$s^2y(s) - 5s - 4 + sy(s) - 5 + y(s) = \frac{3}{s^2+9} \iff$$
$$y(s) = \frac{5s^3 + 9s^2 + 45s + 84}{(s^2+s+1)(s^2+9)}.$$

2.2.3 Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Όπως έχουμε δει στα παραπάνω παραδείγματα, ο μετασχηματισμός Laplace συνήθως καταλήγει σε μια ρητή συνάρτηση της μορφής
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$
όπου
$$\begin{aligned} N(s) &= b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ D(s) &= a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$
$a_n = 1$ και $m \leq n$. Για να βρούμε το $\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Βρίσκουμε τις ρίζες του πολυωνύμου $D(s)$. Έστω ότι έχει n_1 ρίζες ίσες με p_1, n_2 ρίζες ίσες με p_2,..., n_r ρίζες ίσες με p_r, όπου προφανώς θα ισχύει ότι ο αριθμός όλων των ριζών θα είναι ίσος με n δηλαδή $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. Τότε μπορούμε να γράψουμε το $D(s)$ ως εξής
$$D(s) = \prod_{i=1}^{r} (s + p_i)^{n_i} \tag{2.17}$$

2. Το κλάσμα $X(s)$ μπορεί να γραφτεί με βάση την (2.17) ως εξής
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{\prod_{i=1}^{r} (s + p_i)^{n_i}}.$$
Τότε το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα της $X(s)$ είναι
$$X(s) = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s + p_i)^k} \tag{2.18}$$
όπου $b_n = 0$ εκτός αν $m = n$. Τους συντελεστές c_{ik} τους υπολογίζω από την
$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \left[(s + p_i)^{n_i} X(s) \right] \Big|_{s=-p_i} \tag{2.19}$$

3. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι
$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = b_n \delta(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-p_i t}. \tag{2.20}$$

Παράδειγμα 2.8 *Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της* $X(s) = \frac{5s-1}{s^3 - 3s - 2}$. *Οι ρίζες του πολυωνύμου που βρίσκεται στον παρονομαστή είναι οι* -1 *πολ/τας* 2 *και* 2 *πολ/τας* 1.

Λύση

Έχω ότι
$$p_1 = -1, n_1 = 2$$
$$p_2 = 2, n_2 = 1.$$
Άρα
$$X(s) = 0 + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s + p_i)^k} = \frac{c_{11}}{(s+1)} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_{21}}{(s-2)} \tag{2.21}$$
Υπολογίζω τα c_{11}, c_{12}, c_{21}.
$$c_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{5s-1}{(s+1)^2 (s-2)} \right] \Bigg|_{s=-1} \Longleftrightarrow$$
$$c_{11} = \frac{d}{ds} \left[\frac{5s-1}{s-2} \right] \Bigg|_{s=-1} = \frac{(5s-1)^{'}(s-2) - (s-2)^{'}(5s-1)}{(s-2)^2} \Bigg|_{s=-1} \Longleftrightarrow$$

$$c_{11} = \left.\frac{5(s-2)-(5s-1)}{(s-2)^2}\right|_{s=-1} = -\left.\frac{9}{(s-2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

Αντίστοιχα έχω

$$c_{12} = \frac{1}{(2-2)!}\,(s+1)^2\left.\frac{5s-1}{(s+1)^2(s-2)}\right|_{s=-1} = \left.\frac{5s-1}{(s-2)}\right|_{s=-1} = 2$$

και

$$c_{21} = 1.$$

Άρα με βάση την σχέση (2.21) έχω ότι

$$X(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s-2)}$$

και από την σχέση (2.20) ή από τους πίνακες μετασχηματισμών Laplace έχω

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(s+1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)}\right)$$

και άρα

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = -e^{-t} + 2te^{-t} + e^{2t}.$$

Ένας πιο εύκολος τρόπος για να υπολογίζω τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ενός πολυωνυμικού κλάσματος φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.9 *Έστω η*

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Y(s)$.
Λύση
Αναλύουμε τη $Y(s)$ σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 που εμφανίζονται στους αριθμητές των μερικών κλασμάτων μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1(s+2)+c_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} \Longleftrightarrow \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s(c_1+c_2)+2c_1+c_2}{(s+1)(s+2)}.$$

Άρα για να ισχύει η παραπάνω ισότητα θα πρέπει οι συντελεστές των δύο αριθμητών της ισότητας να είναι ίσοι, δηλαδή

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

Άρα η $Y(s)$ γράφεται ως εξής

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

όποτε εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace σε καθένα από τα μέλη του αθροίσματος και με βάση τον τύπο

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{s+a}$$

παίρνουμε ότι

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

Προφανώς το πως θα αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα ένα κλάσμα πολυωνύμων εξαρτάται από τις ρίζες του παρονομαστή. Αυτή την μέθοδο καλό είναι να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν ο παρονομαστής έχει πραγματικές ρίζες. Ας δούμε τώρα στο επόμενο παράδειγμα τι συμβαίνει όταν έχω διπλή ρίζα στον παρονομαστή

Παράδειγμα 2.10 *Έστω το*

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)}.$$

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Y(s)$.
Λύση
Θα αναλύσουμε τη $Y(s)$ σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s+2}$$

Άρα

$$\frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{(c_1+c_3)\,s^2 + (3c_1+c_2+2c_3)\,s + (2c_1+2c_2+c_3)}{(s+1)^2\,(s+2)}$$

και έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\left\{\begin{array}{r} c_1 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 = -1 \end{array}\right.$$

δηλαδή

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \\ c_3 = -3 \end{array}\right.$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{3}{s+2}$$

όποτε εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε

$$y_{\delta\upsilon\nu}(t) = 3e^{-t} - 2te^{-t} + 3e^{-2t}$$

Παρατήρηση 2.11 *Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω άσκηση, η διπλή ρίζα -1 του παρονομαστή "παράγει" δύο όρους στα μερικά κλάσματα τον $\frac{c_1}{s+1}$ και τον $\frac{c_2}{(s+1)^2}$. Αντίστοιχα αν είχα τριπλή ρίζα θα είχα τρεις όρους τους $\frac{c_1}{s+1}$ και τον $\frac{c_2}{(s+1)^2}$ και $\frac{c_3}{(s+1)^3}$.*

Μια ειδική περίπτωση για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι όταν στον παρονομαστή εμφανίζονται μιγαδικές ρίζες $\alpha \pm \beta j$, δηλαδή όταν εμφανίζεται ένας όρος της μορφής

$$(s - \alpha - \beta j)(s - \alpha + \beta j) = s^2 - 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2).$$

Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.12 *Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)s}.$$

Θα αναλύσουμε τη $Y(s)$ σε μερικά κλάσματα θεωρώντας το πολυώνυμο $s^2 + 2s + 2$ με μιγαδικές ρίζες $-1 \pm i$ ως ανάγωγο:

$$\frac{1}{(s^2 + 2s + 2)s} = \frac{c_{10} + c_{11}s}{s^2 + 2s + 2} + \frac{c_2}{s} \tag{2.22}$$

Παρατηρήστε ότι ο αριθμητής του πρώτου κλάσματος υποτέθηκε ως πρώτου βαθμού. Για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_{10}, c_{11}, c_2, εργαζόμαστε ως εξής:

- *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.22) με $(s^2 + 2s + 2)$, οπότε παίρνουμε*

  $$\frac{1}{s} = c_{10} + c_{11}s + (s^2 + 2s + 2)\frac{c_2}{s}.$$

  Θέτοντας διαδοχικά $s = -1 + j$ και $s = -1 - j$ στην παραπάνω σχέση, μετά από πράξεις παίρνουμε

  $$c_{10} = -1, c_{11} = -\frac{1}{2}.$$

- *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.22) με s, οπότε παίρνουμε*

  $$\frac{1}{(s^2 + 2s + 2)} = s\frac{c_{10} + c_{11}s}{s^2 + 2s + 2} + c_2.$$

  Θέτοντας $s = 0$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε

  $$c_2 = \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{-1 - \frac{1}{2}s}{s^2 + 2s + 2} + \frac{1/2}{s} = \frac{-1 - \frac{1}{2}s}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1/2}{s}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους γνωστούς τύπους:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin t\} &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ \mathcal{L}\{\cos t\} &= \frac{s}{s^2 + 1} \\ \mathcal{L}\{e^{at}x(t)\} &= X(s - a) \end{aligned}$$

έχουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\} &= \frac{1}{(s+1)^2+1}\\ \mathcal{L}\{e^{-t}\cos t\} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\end{aligned}$$

Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε το κλάσμα $\frac{-1-\frac{1}{2}s}{s^2+2s+2}$, *σαν γραμμικό των δύο παραπάνω γνωστών τύπων. Πράγματι εύκολα προκύπτει*

$$\frac{-1-\frac{1}{2}s}{s^2+2s+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

Άρα συνολικά

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s}$$

οπότε

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t + \frac{1}{2}u(t).$$

Έστω τώρα μια ρητή συνάρτηση της μορφής

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

όπου

$$\begin{aligned}N(s) &= b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\\ D(s) &= a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\end{aligned}$$

$a_n = 1$ και $m > n$, δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του παρονομαστή. Έστω $Q(s)$, $R(s)$ το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $N(s)$ δια του $D(s)$ έτσι ώστε

$$N(s) = D(s)Q(s) + R(s) \tag{2.23}$$

και

$$\begin{aligned}\deg Q(s) &= m-n\\ \deg R(s) &< n.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Τότε

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}. \tag{2.25}$$

Λόγω γραμμικότητας ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$ ισούται με το άθροισμα των αντιστρόφων μετασχηματισμών Laplace του πολυωνύμου $Q(s)$ και της ρητής συνάρτησης $\frac{R(s)}{D(s)}$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $Q(s)$ μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^n\} = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t), n = 1,2,3,...$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $\frac{R(s)}{D(s)}$ μπορεί να υπολογιστεί βάσει των παραπάνω μια και από την (2.24), ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από αυτόν του παρονομαστή.

Με τον μετασχηματισμό Laplace, μπορούμε εύκολα να υπολογίζουμε την ελεύθερη και δυναμική απόκριση ενός συστήματος.

Παράδειγμα 2.13 *Δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:*

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u'(t) - u(t) \tag{2.26}$$

1. *Να υπολογιστεί η ελεύθερη απόκριση του συστήματος για* $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 0$.

2. *Να υπολογιστεί η δυναμική απόκριση του συστήματος για* $u(t) = 1(t)$.

3. *Να υπολογιστεί η ολική απόκριση του συστήματος δεδομένων των αρχικών συνθηκών του ερωτήματος 1) και της εισόδου του 2).*

4. *Να υπολογιστεί η δυναμική απόκριση του συστήματος για* $u(t) = e^{-t}$.

Λύση

1. *Αφού ζητείται η ελεύθερη απόκριση του συστήματος θεωρούμε ότι η είσοδος είναι μηδενική, άρα* $u(t) = 0$. *Η ομογενής εξίσωση είναι:*

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης παίρνουμε

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 0$$

ή

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = y(0)(s + 3) + y'(0)$$

οπότε για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \tag{2.27}$$

Για να υπολογίσουμε την ελεύθερη απόκριση, πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $Y(s)$. *Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε μερικά κλάσματα:*

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} \tag{2.28}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 *που εμφανίζονται στους αριθμητές των μερικών κλασμάτων μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:*

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1(s+2) + c_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} \Longleftrightarrow \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s(c_1+c_2) + 2c_1 + c_2}{(s+1)(s+2)}.$$

Άρα για να ισχύει η παραπάνω ισότητα θα πρέπει οι συντελεστές των δύο αριθμητών της ισότητας να είναι ίσοι, δηλαδή

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$c_1 = 2$$
$$c_2 = -1$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

όποτε εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε

$$y(t) = y_{\varepsilon\lambda}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

2. *Εφόσον ζητείται η δυναμική απόκριση του συστήματος θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ.* $y(0) = 0, y'(0) = 0$ *και* $u(0) = 0$. *Ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου είναι*

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης (2.26) (για μηδενικές αρχικές συνθήκες):

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sU(s) - U(s)$$

ή

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)s} \tag{2.29}$$

Θα αναλύσουμε τη ρητή συνάρτηση της (2.29) σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s}$$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2, c_3, *εργαζόμαστε αντίστοιχα με το πρώτο ερώτημα. Κάνοντας τα μερικά κλάσματα ομώνυμα και μετά από πράξεις έχουμε*

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{(c_1+c_2+c_3)\,s^2 + (2c_1+c_2+3c_3)\,s + 2c_3}{(s+1)(s+2)s}.$$

Άρα για να ισχύει η παραπάνω ισότητα θα πρέπει οι συντελεστές των δύο αριθμητών της ισότητας να είναι ίσοι, δηλαδή

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 1 \\ 2c_3 = -1 \end{array} \right.$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 = 2 \\ c_2 = -\frac{3}{2} \\ c_3 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3/2}{s+2} - \frac{1/2}{s}$$

όποτε εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε

$$y(t) = y_{\delta\upsilon\nu}(t) = 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}u(t)$$

3. *Η ολική απόκριση του συστήματος για τα δεδομένα των ερωτημάτων 1) και 2) θα δίνεται από το άθροισμα ελεύθερης και δυναμικής απόκρισης που έχουμε υπολογίσει ήδη. Δηλαδή*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{\varepsilon\lambda}(t) + y_{\delta\upsilon\nu}(t) = \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}u(t) = \\ &= 4e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}u(t) \end{aligned}$$

4. *Εργαζόμενοι αντίστοιχα με το 2), θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες και ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου είναι*

$$U(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης (2.26) (για μηδενικές αρχικές συνθήκες):

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sU(s) - U(s)$$

ή

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)} \tag{2.30}$$

Θα αναλύσουμε τη ρητή συνάρτηση της (2.30) σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s+2}$$

Άρα

$$\frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{(c_1+c_3)\,s^2 + (3c_1+c_2+2c_3)\,s + (2c_1+2c_2+c_3)}{(s+1)^2\,(s+2)}$$

και έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 = -1 \end{cases}$$

δηλαδή

$$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \\ c_3 = -3 \end{cases}$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{3}{s+2}$$

όποτε εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε

$$y_{\delta\upsilon\nu}(t) = 3e^{-t} - 2te^{-t} + 3e^{-2t}$$

2.3 Συναρτήσεις μεταφοράς

2.3.1 Συνάρτηση μεταφοράς

Όπως έχουμε ήδη δει, ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου Σ_1 περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση της μορφής (2.2)

$$\begin{aligned} a_n \tfrac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = \\ = b_m \tfrac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \tfrac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \cdots + b_0 u(t). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Αν θεωρήσουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες και πάρουμε μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0\right) U(s)$$

και όπως έχουμε ξαναπεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος θα είναι

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} U(s)$$

Ορισμός 2.14 *Συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (2.31) ορίζεται να είναι ο λόγος του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $y(t)$ προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου $u(t)$ με την προϋπόθεση ότι όλες οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδέν.*

$$T_{\Sigma_1}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}. \tag{2.32}$$

Αν είναι γνωστή η συνάρτηση μεταφοράς $T_{\Sigma_1}(s)$ ενός συστήματος Σ_1, μπορώ να υπολογίσω τον μετασχηματισμό Laplace της εξόδου από

$$Y(s) = T_{\Sigma_1}(s)U(s).$$

Ορισμός 2.15 *Έστω μια ρητή συνάρτηση $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$. Οι τιμές του s για τις οποίες ισχύει η απόλυτη τιμή του $X(s)$ να είναι 0 δηλαδή*

$$|X(s)| = 0$$

*ονομάζονται **μηδενικά της ρητής συνάρτησης**.*

Ορισμός 2.16 *Έστω μια ρητή συνάρτηση $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$. Οι τιμές του s για τις οποίες ισχύει η απόλυτη τιμή του $X(s)$ δηλαδή η $|X(s)|$ να απειρίζεται, ονομάζονται **πόλοι της ρητής συνάρτησης**.*

Παράδειγμα 2.17 *Έστω η ρητή συνάρτηση $X(s) = \frac{s-1}{s^3-3s-2} = \frac{(s-1)}{(s+1)^2(s-2)}$. Η $X(s)$ παρουσιάζει μηδενικά στο $s = 1$ και πόλους στα $s = -1$ (πολ/τας 2) και $s = 2$.*

Αντίστοιχοι ακριβώς ορισμοί ισχύουν και για τα γραμμικά συστήματα.

Ορισμός 2.18 *Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $T(s)$ όπως στην σχέση (2.32). Οι τιμές του s για τις οποίες ισχύει $|P(s)| = 0$ ονομάζονται **μηδενικά του συστήματος.***

Ορισμός 2.19 *Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $T(s)$ όπως στην σχέση (2.32). Οι τιμές του s για τις οποίες η $|P(s)|$ απειρίζεται ονομάζονται **πόλοι του συστήματος.***

Παράδειγμα 2.20 *Έστω ένα σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση*

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) - 3\frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = \frac{d}{dt}u(t) - u(t)$$

το οποίο έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες. Να βρεθούν οι πόλοι και τα μηδενικά αυτού του συστήματος.

Λύση

Εφόσον μου ζητείται τα μηδενικά και οι πόλοι του συστήματος και έχω και μηδενικές αρχικές συνθήκες, θα υπολογίσω πρώτα την συνάρτηση μεταφοράς σύμφωνα με την (2.32). Θα έχω ότι

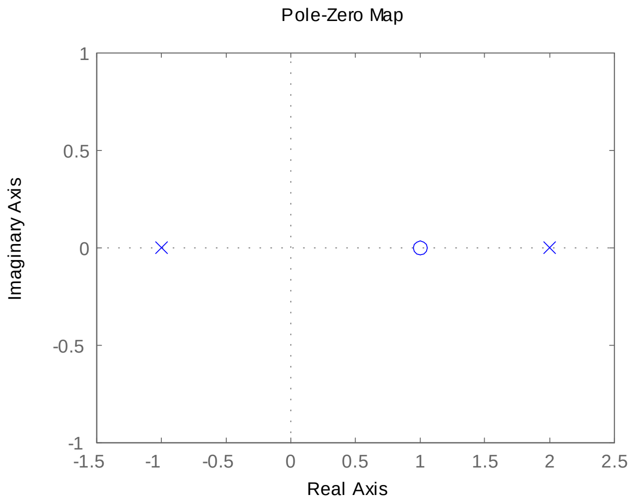
$$T(s) = \frac{s-1}{s^3 - 3s - 2}.$$

Τα μηδενικά και οι πόλοι της ρητής συνάρτησης $\frac{s-1}{s^3-3s-2}$ έχουν υπολογιστεί στο παράδειγμα 2.17 και άρα το σύστημά μου παρουσιάζει μηδενικά στο $s = 1$ και πόλους στα $s = -1$ (πολ/τας 2) και $s = 2$.

Ο υπολογισμός στο MATLAB των μηδενικών και των πόλων ενός συστήματος γίνεται με τις εντολές `zero` και `pole` αντίστοιχα.

(Σχήμα 2.4)

```
sys=tf([1 -1],[1 0 -3 -2])
zero(sys)
pole(sys)
pzmap(sys), sgrid
```



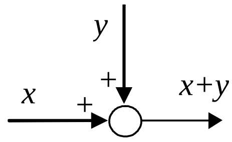
Σχήμα 2.4: Χάρτης πόλων - μηδενικών συστήματος.

Το σχήμα 2.4 που παρείχθηκε από την εντολή `pzmap` ονομάζεται χάρτης πόλων - μηδενικών του συστήματος. Η θέση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο συμβολίζεται με (x) ενώ αυτή των μηδενικών με (o).

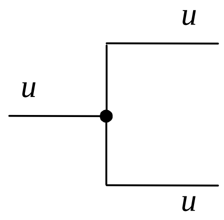
2.4 Λειτουργικά διαγράμματα - διασυνδέσεις συστημάτων

Τα λειτουργικά διαγράμματα συναρτήσεων μεταφοράς είναι μια εικονική αναπαράσταση της σχέσης εισόδου και εξόδου ενός συστήματος.

Τα βέλη αντιπροσωπεύουν την κατεύθυνση ροής του σήματος. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αντιστοιχεί σε ένα σύστημα το οποίο δρα πάνω στο σήμα. Ένας κύκλος που συνοδεύεται από κατάλληλο αριθμό προσήμων και σημάτων που καταλήγουν σε αυτόν ονομάζεται σημείο άθροισης.

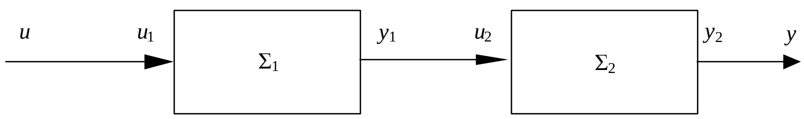


Για να δείξουμε ότι ένα σήμα διακλαδώνεται και είναι είσοδος σε περισσότερα από ένα συστήματα ή σημεία άθροισης χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό.



Δεν πρέπει να μπερδεύουμε τα λειτουργικά διαγράμματα με τα διαγράμματα ροής καθώς τα πρώτα αναφέρονται σε συναρτήσεις μεταφοράς στο πεδίο των συχνοτήτων ενώ τα δεύτερα στο πεδίο του χρόνου. Ας δούμε τώρα τις συναρτήσεις μεταφοράς του συνολικού συστήματος που προκύπτει αν συνδέσουμε με κάποιες γνωστές συνδεσμολογίες δύο συστήματα Σ_1 και Σ_2.

Συστήματα σε σειρά. Έστω ότι δύο συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου Σ_1 και Σ_2 με συναρτήσεις μεταφοράς $T_1(s)$ και $T_2(s)$ αντίστοιχα συνδέονται μεταξύ τους όπως στο επόμενο σχήμα.



Προφανώς θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{cases} u(s) = u_1(s) \\ u_2(s) = y_1(s) \\ y(s) = y_2(s). \end{cases}$$

Δεδομένου ότι

$$y_1(s) = T_1(s)u_1(s)$$

$$y_2(s) = T_2(s)u_2(s)$$

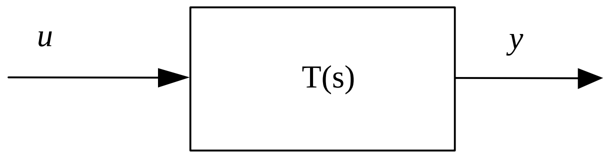
και κάνοντας αντικαταστάσεις έχω

$$y(s) = T_2(s)u_2(s) = T_2(s)y_1(s) = T_2(s)T_1(s)u_1(s) = T_2(s)T_1(s)u(s).$$

Άρα η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος Σ θα είναι

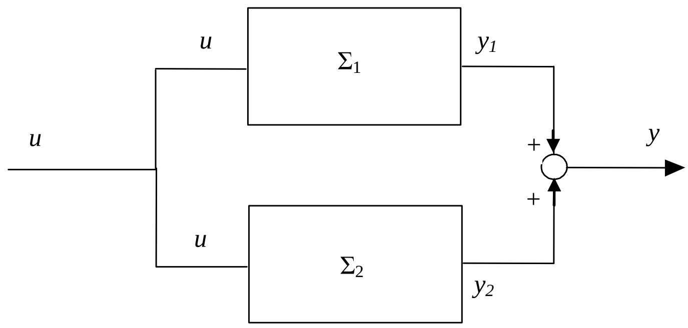
$$T(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = T_2(s)T_1(s) \tag{2.33}$$

και έτσι το σχήμα 2.4 μπορεί να αντικατασταθεί με το παρακάτω




```
sys1=tf([1],[1 2 -1])
sys2=tf([1],[3 -1])
sys=sys2*sys1
sys=series(sys1,sys2)
```

Παράλληλη σύνδεση.



Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$y_1(s) = T_1(s)u(s)$$
$$y_2(s) = T_2(s)u(s)$$

Επίσης η συνολική έξοδος είναι

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s)$$

και άρα

$$y(s) = (T_1(s) + T_2(s))\, u(s).$$

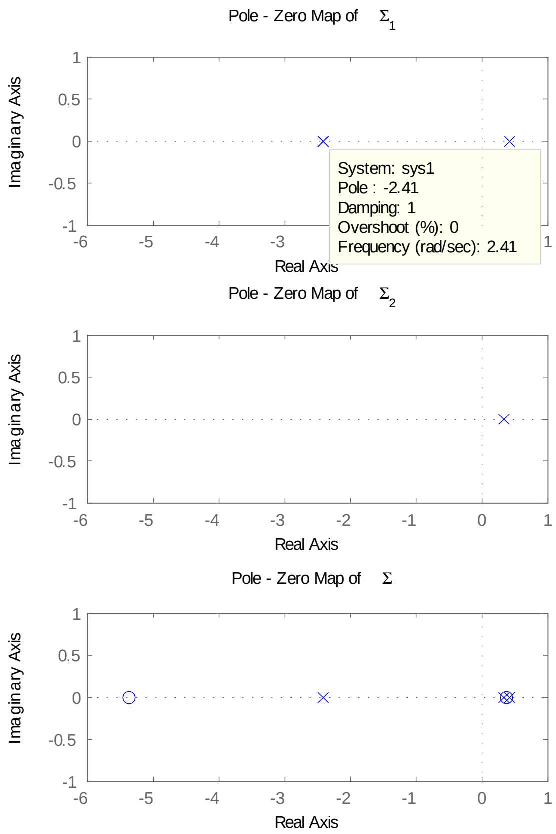
Έτσι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$T(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = T_1(s) + T_2(s). \tag{2.34}$$

```
sys1=tf([1],[1 2 -1])
sys2=tf([1],[3 -1])
sys=sys2+sys1
sys=parallel(sys1,sys2)
```

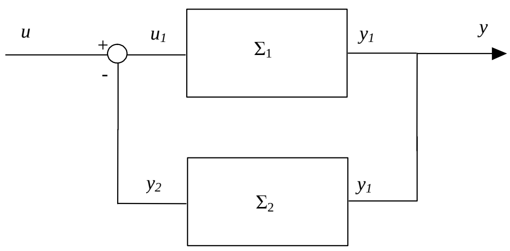
Οι πόλοι και τα μηδενικά των συστημάτων Σ_1, Σ_2, και Σ φαίνονται στο επόμενο σχήμα.

```
subplot(3,1,1), pzmap(sys1), title('Pole - Zero Map of sys1
    '),axis([-6 1 -1 1]);
subplot(3,1,2), pzmap(sys2), title('Pole - Zero Map of sys2
    '),axis([-6 1 -1 1]);
subplot(3,1,3), pzmap(sys), title('Pole - Zero Map of sys3'
    ), axis([-6 1 -1 1]);
```



Διάγραμμα πόλων/μηδενικών συστημάτων σε παράλληλη σύνδεση.

Σύνδεση σε αρνητική ανάδραση.



Ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$
\begin{aligned}
y_1(s) &= y(s) \\
y_1(s) &= T_1(s)u_1(s) \\
y_2(s) &= T_2(s)y_1(s) \\
u_1(s) &= u(s) - y_2(s).
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

Αντικαθιστώντας στην (2.35) έχουμε

$$
y_1(s) = y(s) = T_1(s)\left(u(s) - y_2(s)\right) = T_1(s)\left(u(s) - T_2(s)y(s)\right)
$$

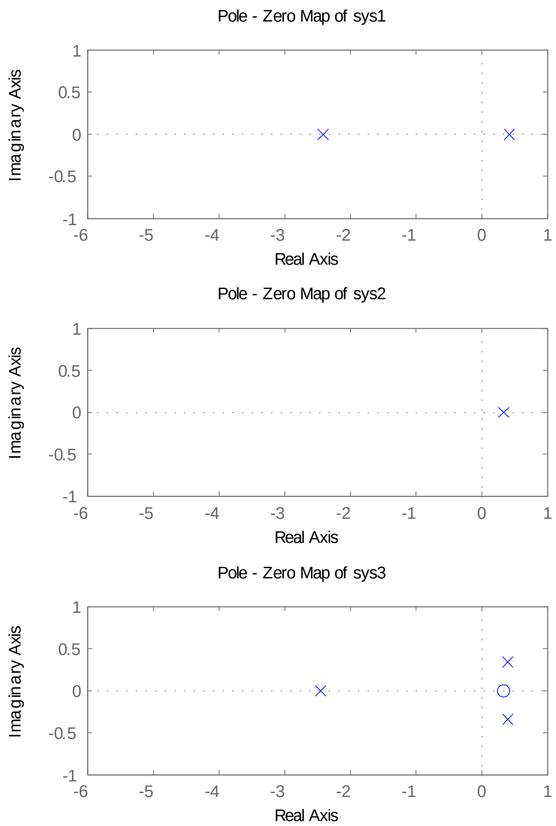
και άρα

$$y(s)\left(1+T_1(s)T_2(s)\right)=T_1(s)u(s)$$

$$T(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{T_1(s)}{1+T_1(s)T_2(s)} \tag{2.36}$$

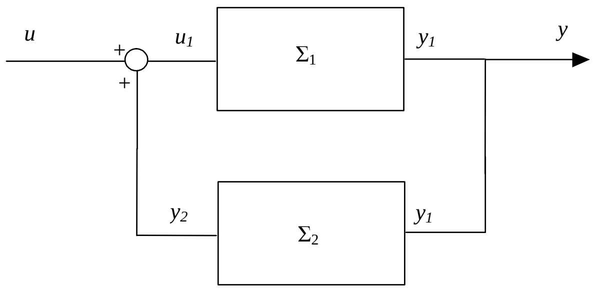
```
sys1=tf([1],[1 2 -1])
sys2=tf([1],[3 -1])
sys=feedback(sys1,sys2)
```

Αντίστοιχα τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των συστημάτων Σ_1, Σ_2, και Σ φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Διάγραμμα πόλων/μηδενικών συστημάτων σε ανάδραση.

Σύνδεση σε θετική ανάδραση.



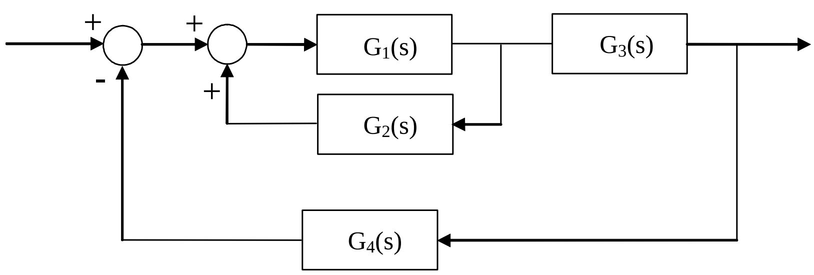
Ακολουθώντας ίδια λογική με την αρνητική ανάδραση καταλήγω ότι

$$T(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{T_1(s)}{1 - T_1(s)T_2(s)} \tag{2.37}$$

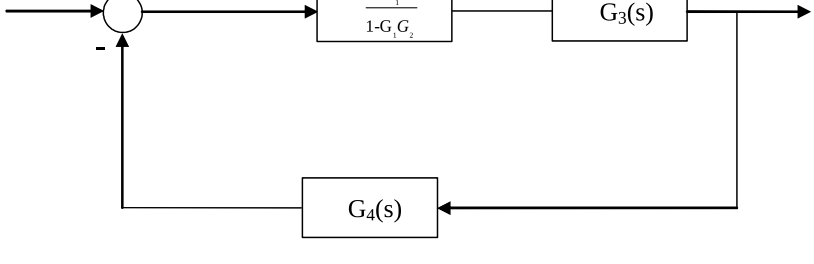
```
sys1=tf([1],[1 2 -1])
sys2=tf([1],[3 -1])
sys=feedback(sys1,sys2,+1)
```

Τα λειτουργικά διαγράμματα στην πράξη είναι πολύ πιο πολύπλοκα από αυτά που είδαμε μέχρι στιγμής. Στις πιο απλές περιπτώσεις για να βρούμε την συνολική συνάρτηση μεταφοράς συνδυάζουμε τους τέσσερις κανόνες που περιγράψαμε πιο πάνω.

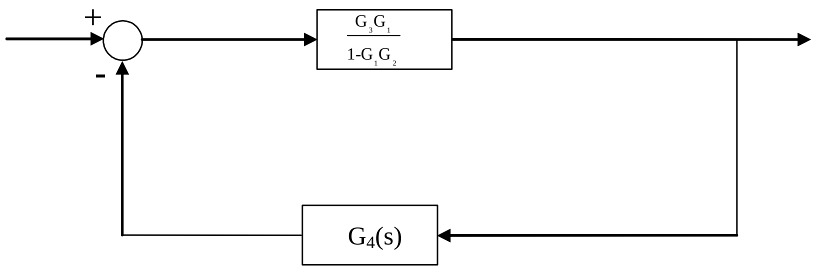
Παράδειγμα 2.21 *Να βρεθεί η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω λειτουργικού διαγράμματος.*



Πρώτα θα υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς των G_1 και G_2 που συνδέονται σε θετική ανάδραση σύμφωνα με τον τύπο (2.37) η οποία είναι $\frac{G_1}{1-G_1G_2}$. Έτσι το απλοποιημένο λειτουργικό διάγραμμα είναι το επόμενο.

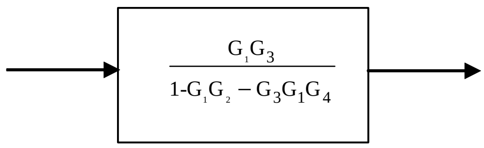


Τώρα ας υπολογίσουμε την συνολική συνάρτηση μεταφορά των δύο συστημάτων $\frac{G_1}{1-G_1G_2}$ και G_3 που συνδέονται σε σειρά η οποία και θα είναι η $\frac{G_3G_1}{1-G_1G_2}$.



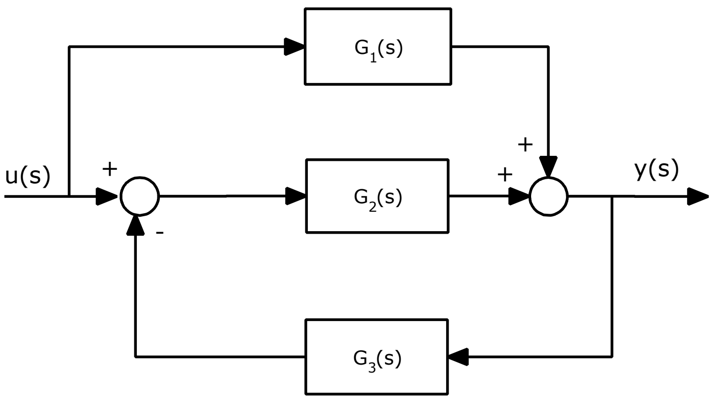
Τέλος υπολογίζουμε την αρνητική ανάδραση και έχουμε

$$G(s) = \frac{\frac{G_3G_1}{1-G_1G_2}}{1+\frac{G_3G_1}{1-G_1G_2}G_4} = \frac{G_3G_1}{1-G_1G_2+G_3G_1G_4}.$$

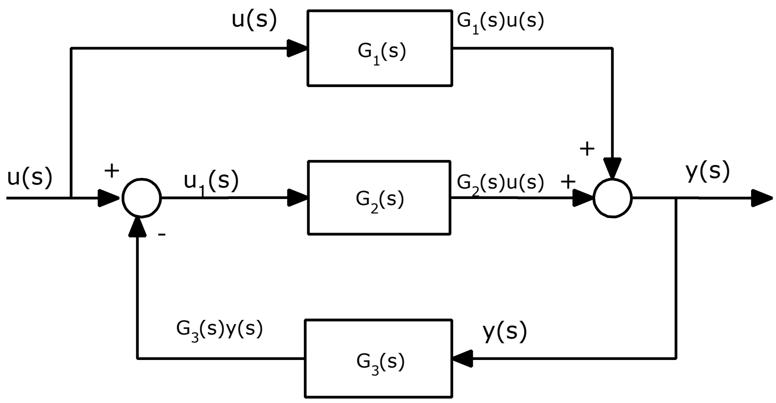


Δεν είναι πάντα δυνατή η εύρεσης της συνολικής συνάρτησης μεταφοράς χρησιμοποιώντας τους κανόνες που περιγράψαμε, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.22 *Να βρεθεί η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω λειτουργικού διαγράμματος.*



Παρατηρούμε ότι δεν αναγνωρίζεται κάποια από τι τέσσερις συνδέσεις που αναφέραμε προηγούμενα. Έτσι προσπαθούμε να σημειώσουμε πάνω στο σχήμα τα γνωστά σήματα. Έτσι έχουμε:



Άρα έχω

$$
\begin{aligned}
y(s) &= G_1(s)u(s) + G_2(s)u_1(s) \\
u_1(s) &= u(s) - G_3(s)y(s)
\end{aligned}
$$

Η πρώτη εξίσωση με την βοήθεια της δεύτερης γίνεται

$$y(s) = G_1(s)u(s) + G_2(s)\left(u(s) - G_3(s)y(s)\right)$$

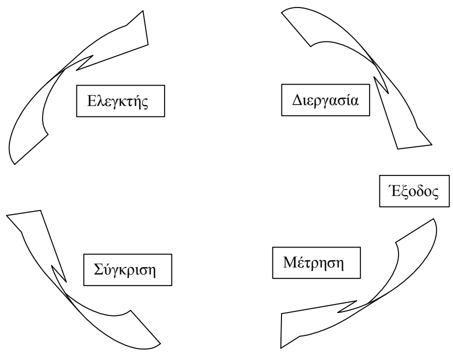
και έτσι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ *είναι*

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{G_2(s)G_3(s) + 1}.$$

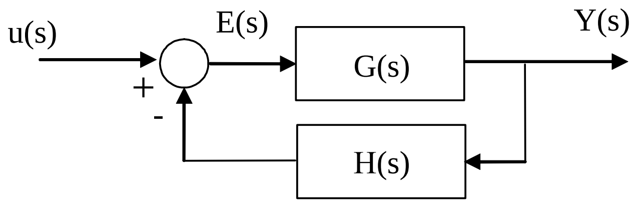
2.5 Συστήματα ανοικτού και κλειστού βρόγχου

Αφού τώρα πια μπορούμε να υπολογίσουμε τα μαθηματικά μοντέλα ενός συστήματος που αποτελείται από κάποια επιμέρους υποσυστήματα, ας θυμηθούμε τον ορισμό ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου. Ένα τέτοιο σύστημα αντιστοιχεί στην διασύνδεση διαφόρων στοιχείων που συνθέτουν μια συγκεκριμένη διάταξη που μας παρέχει μια γνωστή εκ των προτέρων επιθυμητή απόκριση. Επειδή συνήθως η επιθυμητή απόκριση είναι διαφορετική από την πραγματική απόκριση, παράγεται ένα σήμα ελέγχου το οποίο αντιστοιχεί στο σφάλμα που εμφανίζεται ανάμεσα στις δύο αποκρίσεις. Η χρήση του σήματος αυτού για τον έλεγχο μιας συγκεκριμένης διεργασίας, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ακολουθίας λειτουργιών μέσα σε ένα κλειστό βρόγχο που καλείται γενικά σύστημα ελέγχου με ανάδραση ή αλλιώς σύστημα ελέγχου κλειστού βρόγχου (Σχήμα 2.5).Είναι πολύ συχνό το φαινόμενο να είναι απαραίτητη η εισαγωγή ανάδρασης για την βελτίωση της συμπεριφοράς ενός συστήματος.

Ένα σύστημα ανοιχτού βρόγχου λειτουργεί χωρίς ανάδραση και παράγει απευθείας το αντίστοιχο σήμα εξόδου ως απόκριση του συστήματος σε συγκεκριμένο σήμα εισόδου. Αντίθετα σε ένα σύστημα κλειστού βρόγχου (με ανάδραση) λαμβάνεται συνεχώς μια μέτρηση του σήματος εξόδου το οποίο και συγκρίνεται με την επιθυμητή έξοδο του συστήματος (σήμα εισόδου) έτσι ώστε να παράγεται ένα σήμα διαφοράς που εφαρμόζεται στην διαδικασία. Ας θεωρήσουμε για αρχή ένα σύστημα $G(s)$ με αρνητική ανάδραση όπου το $H(s) = 1$.



Σχήμα 2.5: Σύστημα ελέγχου με ανάδραση.



Τότε ξέρουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

και έτσι η απόκριση του συστήματος θα είναι

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}u(s)$$

και άρα το σήμα σφάλματος θα είναι

$$E(s) = u(s) - Y(s) = \left(1 - \frac{G(s)}{1+G(s)}\right)u(s) = \frac{1}{1+G(s)}u(s).$$

Από την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε ότι για να ελαχιστοποιήσουμε το σήμα σφάλματος θα πρέπει ο παρονομαστής $1+G(s)$ να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος για κάθε τιμή της μιγαδικής μεταβλητής s. Αντίστοιχα όταν $H(s) \neq 1$ το σήμα σφάλματος θα είναι ίσο με

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}u(s).$$

2.6 Ευστάθεια συστημάτων

Ορισμός 2.23 ***Κρουστική απόκριση*** *$h(t)$ ενός γραμμικού συστήματος Σ ορίζεται ως η δυναμική απόκριση του συστήματος όταν έχω σαν είσοδο την κρουστική συνάρτηση Dirac $\delta(t)$.*

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός συστήματος χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.24 *Η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός γραμμικού συστήματος Σ δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.*

Ορισμός 2.25 *Ένα γραμμικό σύστημα Σ λέγεται (ασυμπτωτικά)* ***ευσταθές*** *ή απλά* ***ευσταθές*** *αν η κρουστική του απόκριση τείνει στο μηδέν καθώς το t τείνει στο ∞.*

Ένας εναλλακτικός ορισμός της ασυμπτωτικής ευστάθειας ή απλά ευστάθειας είναι ο παρακάτω.

Ορισμός 2.26 *Ένα γραμμικό σύστημα Σ λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν για μια οποιαδήποτε πεπερασμένη είσοδο, παράγει πεπερασμένη έξοδο.*

Ένα κριτήριο για να αποφασίσουμε πότε ένα σύστημα είναι ευσταθές είναι το ακόλουθο.

Κριτήριο 2.27 *Ένα γραμμικό σύστημα Σ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν οι πόλοι του έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος.*

Ένα σύστημα που δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές θα λέγεται **ασταθές**.

Έτσι βλέπουμε την σημασία που έχουν οι πόλοι ενός συστήματος για την ευστάθειά του. Πρακτικά για να αποφασίσουμε αν ένα γραμμικό σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου είναι ευσταθές, αρκεί να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του $T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ και να ελέγξουμε αν οι ρίζες του παρονομαστή έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του μηδενός. Όμως το να λύσουμε την πολυωνυμική εξίσωση $D(s) = 0$ δεν είναι και τόσο εύκολο όταν το πολυώνυμο έχει βαθμό μεγαλύτερο του δύο. Για αυτό και παρουσιάζουμε λίγο πιο κάτω το κριτήριο του Routh.

Έστω $D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$. Σχηματίζω τον παρακάτω πίνακα βάση των συντελεστών του πολυωνύμου ο οποίος και θα ονομάζεται **πίνακας του Routh**.

$$
\begin{array}{c|lll}
s^n & a_n & a_{n-2} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \\
s^0 & d_0 & &
\end{array}
$$

όπου

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \tag{2.38}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

κλπ. Με βάση των παραπάνω πίνακα μπορούμε να ελέγξουμε αν οι ρίζες του $D(s)$ είναι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του μηδενός).

Κριτήριο 2.28 ***Κριτήριο Routh.*** *Ικανή και αναγκαία συνθήκη τέτοια ώστε όλες οι ρίζες p_i του πολυωνύμου $a(s)$ να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος* $(\text{Re}(p_i) < 0)$ *είναι:*

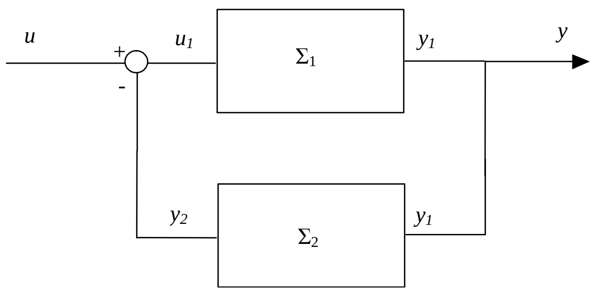
1. $a_i > 0$

2. *τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα Routh να είναι αυστηρώς θετικά.*

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα του πίνακα Routh είναι η ακόλουθη.

Παρατήρηση 2.29 *Ο αριθμός των εναλλαγών προσήμου στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh δίνει των αριθμό των ριζών του πολυωνύμου που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.*

Παράδειγμα 2.30 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα*



όπου η συνάρτηση μεταφοράς του Σ_1 είναι η $G_1(s) = \frac{1}{s^3+s^2+s+5}$ και αυτή του Σ_2 η $G_2(s) = 5$. Να ελεγχθεί αν το παραπάνω σύστημα είναι ευσταθές ή όχι.
Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι σύμφωνα με την (2.36) η $G(s) = \frac{1}{s^3+s^2+s+5}$. Συνεχίζουμε υπολογίζοντας τον πίνακα Routh για τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 10 \\ s^1 & \mathbf{-9} & \mathbf{0} \\ s^1 & \mathbf{10} & \mathbf{0} \end{array}$$

όπου τα στοιχεία με έντονα γράμματα υπολογίστηκαν σύμφωνα με τους τύπους (2.38) και (2.39). Εφαρμόζοντας τώρα το κριτήριο του Routh παρατηρούμε ότι ενώ ισχύει η πρώτη προϋπόθεση, δεν ισχύει η δεύτερη μια και $-9 \not> 0$. Άρα το κλειστό σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ασταθές.

Παράδειγμα 2.31 *Να βρεθεί ο αριθμός των ασταθών πόλων του συστήματος $G_1(s) = \frac{s^{23}-3}{s^5+2s^4+3s^3+6s^2+2s+1}$.*
Προσπαθώ να υπολογίσω τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 2 \\ s^4 & 2 & 6 & 1 \\ s^3 & b_1 & & \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^1 & & & \end{array}$$

Παρατηρώ ότι το $b_1 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Το σύστημα είναι ασταθές αλλά μια και θέλω να *μετρήσω τον αριθμό των ασταθών πόλων, συνεχίζω. Θέτω $b_1 = \delta$, όπου $\delta \to 0$.*

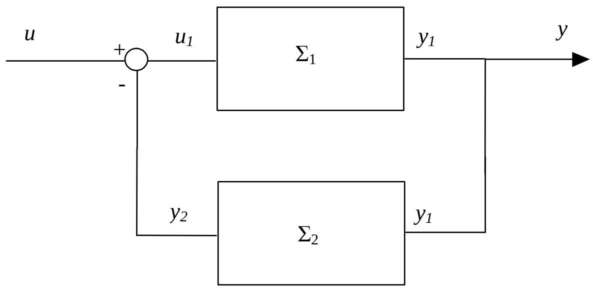
$$\begin{array}{c|lll}
s^5 & 1 & 3 & 2 \\
s^4 & 2 & 6 & 1 \\
s^3 & \delta & \frac{3}{2} & 0 \\
s^2 & \frac{6\delta-3}{\delta} & 1 & \\
s^1 & \frac{18\delta-9-\delta^2}{12\delta-6} & 0 & \\
s^1 & 1 & &
\end{array}$$

Υπολογίζω τα όρια της πρώτης στήλης όταν $\delta \to 0$ και έχω

$$\begin{array}{c|lll}
s^5 & 1 & 3 & 2 \\
s^4 & 2 & 6 & 1 \\
s^3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\
s^2 & -\infty & 1 & \\
s^1 & \frac{9}{6} & 0 & \\
s^1 & 1 & &
\end{array}$$

Άρα οι εναλλαγές προσήμου είναι 2 χωρίς να μετράμε την γραμμή που έχει πρώτο στοιχείο το 0. Έτσι το σύστημα έχει 2 ασταθείς πόλους.

Παράδειγμα 2.32 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα*



όπου το Σ_1 περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt}y(t) - 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}u(t) + u(t)$$

και το Σ_2 από την

$$y(t) = ku(t)$$

όπου k πραγματικός αριθμός. Να εξεταστεί αν το ανοιχτό σύστημα (Σ_1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.Για ποιες τιμές του k το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές;
Η συνάρτηση μεταφοράς του Σ_1 είναι θα η $G_1(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2}$ ενώ αυτή του Σ_2 η $G_2(s) = k$. Το Σ_1 είναι ασταθές μια και ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς έχει ένα αρνητικό συντελεστή (-3). Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι σύμφωνα με την (2.36) η $G(s) = \frac{s+1}{s^2+(k-3)s+(k+2)}$. Υπολογίζω τον πίνακα Routh.

$$\begin{array}{c|ll}
s^2 & 1 & k-2 \\
s^1 & k-3 & 0 \\
s^1 & \mathbf{k+2} & \mathbf{0}
\end{array}$$

Από την πρώτη συνθήκη του κριτηρίου Routh έχω ότι θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι ακόλουθες ανισότητες

$$\begin{cases} k-3>0 \\ k+2>0 \end{cases} \tag{2.40}$$

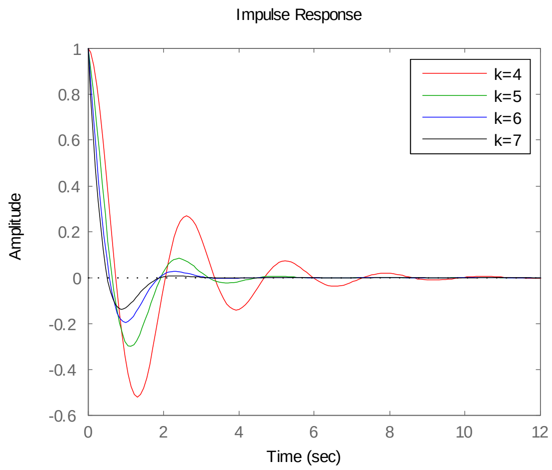
Επιπλέον θα πρέπει η πρώτη στήλη του πίνακα Routh να είναι αυστηρά θετική άρα

$$\begin{cases} k-3>0 \\ k+2>0 \end{cases} \tag{2.41}$$

Παίρνοντας τις (2.40) και (2.41) έχω ότι τελικά θα πρέπει $k > 3$. Έτσι για οποιοδήποτε $k > 3$ καταφέρνουμε να σταθεροποιήσουμε με ανάδραση το Σ_1.

Ας ελέγξουμε τώρα την κρουστική απόκριση των κλειστών συστημάτων για $k = 4, 5, 6, 7$.

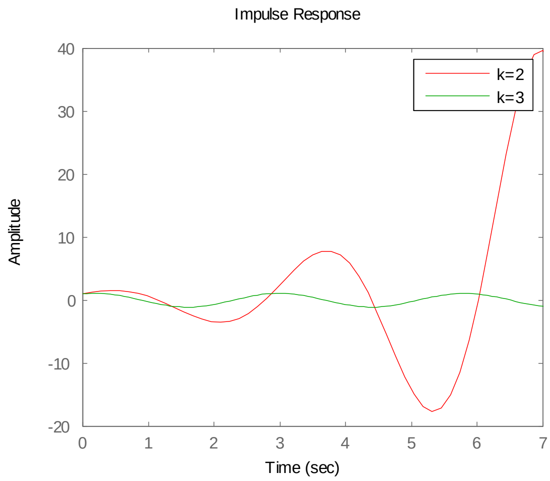
```
for k = 4:7
sys(k-3)=tf([1 1],[1 k-3 k+2]);
end
impulse(sys(1),'r', sys(2),'g', sys(3),'b', sys(4),'k')
```



Κρουστική απόκριση των συστημάτων που προκύπτουν για $k = 4, 5, 6, 7$.

Παρατηρούμε ότι όντως $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ για αυτές τις τιμές του k. Επίσης παρατηρούμε ότι η κρουστικές αποκρίσεις έχουν άλλες ποιοτικές διαφορές. Πχ. για $k = 7$ παρατηρούμε ότι το κλειστό σύστημα "ηρεμεί" πιο γρήγορα από ότι για $k = 4$. Για $k = 2, 3$ αντίστοιχα έχω:

```
for k = 2:3
sys(k-1)=tf([1 1],[1 k-3 k+2]);
end
impulse(sys(1),'r', sys(2),'g')
```

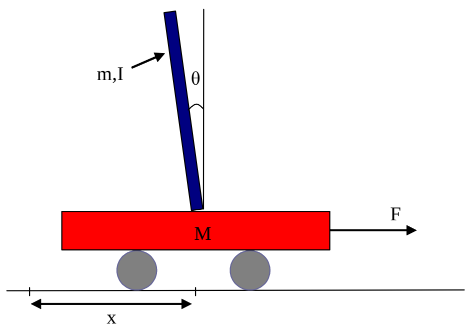


Κρουστική απόκριση των συστημάτων που προκύπτουν για $k = 2, 3$.

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση του κλειστού συστήματος φαίνεται να μεγαλώνει ακανόνιστα για $k = 2$ ενώ για $k = 3$ φαίνεται να κάνει ταλαντώσεις συγκεκριμένου πλάτους επ' άπειρο.

Έτσι, με την βοήθεια του κριτηρίου Routh υπολογίσαμε ένα σύστημα Σ_2 το οποίο αν συνδεθεί σε ανάδραση με το ασταθές σύστημα Σ_1 να κάνει το κλειστό σύστημα ευσταθές.

Παράδειγμα 2.33 *Εστω ένα καρότσι με ένα ανάστροφο εκκρεμές όπως στο παρακάτω σχήμα*



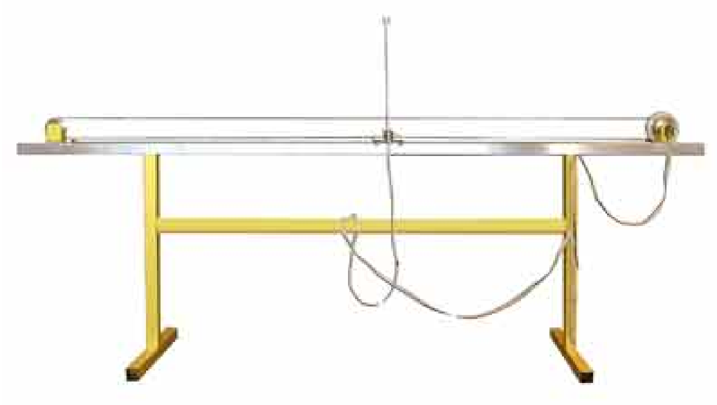
Ανάστροφο εκκρεμές.

όπου

M	*μάζα του καροτσιού*	$0.5\ kg$
m	*μάζα του ανάστροφου εκκρεμούς*	$0.2\ kg$
b	*συντελεστής τριβής του καροτσιού*	$0.1\ N/m/sec$
l	*απόσταση του κέντρου βάρους του εκκρεμούς*	$0.3\ m$
I	*αδράνεια του εκκρεμούς*	$0.006\ kg * m^2$
$F(t)$	*δύναμη που επιβάλλεται στο καρότσι*	
$x(t)$	*θέση του καροτσιού σχετικά με ένα σημείο αναφοράς*	
$\theta(t)$	*γωνία του εκκρεμούς με την κατακόρυφο*	

(2.42)

Το ανάστροφο εκκρεμές είναι ένα κλασσικό πρόβλημα αυτομάτου ελέγχου. Ποιο κάτω φαίνεται η πειραματική υλοποίηση ενός ανάστροφου εκκρεμούς από την εταιρεία INTECO (www.inteco.com.pl).



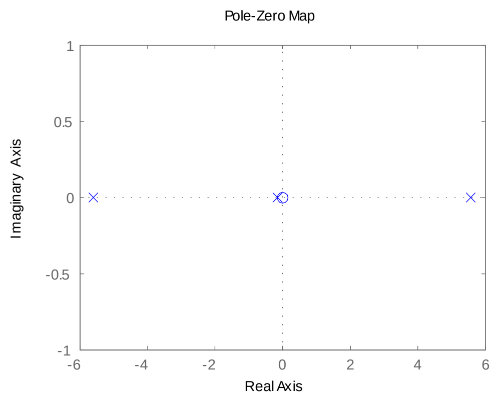
Αν θεωρήσουμε σαν είσοδο στο σύστημα την δύναμη F δηλαδή αν $u(t) = F(t)$ και σαν έξοδο την γωνία $y(t) = \theta(t)$, η συνάρτηση μεταφοράς που περιγράφει το σύστημα είναι

$$T(s) = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^2 - \frac{(M+m)mgl}{q}s - \frac{bmgl}{q}}$$

όπου με q ονομάσαμε την παράσταση $(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2$. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω γραμμικές σχέσεις προέκυψαν αν θεωρήσουμε ότι η γωνία θ είναι "μικρή". Αν αντικαταστήσουμε σύμφωνα με τον πίνακα 2.42 έχουμε

$$T(s) = \frac{4.545s}{s^3 + 0.1818s^2 - 31.18s - 4.455}.$$

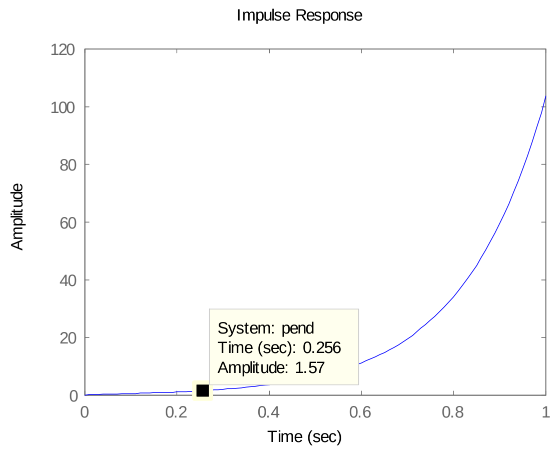
Το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του συστήματος παράγεται εύκολα με την εντολή `pzmap()`.



Παρατηρώ ότι το σύστημα είναι ασταθές καθώς έχει ένα πόλο με θετικό πραγματικό μέρος τον $s_1 = 5.5651$. Οι πόλοι του συστήματος υπολογίζονται λύνοντας την εξίσωση $s^3 + 0.1818s^2 - 31.18s - 4.455 = 0$ και είναι

$$s_1 = 5.5651$$
$$s_2 = -5.6041$$
$$s_3 = -0.1428.$$

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό 2.25 περιμένουμε ότι η κρουστική του απόκριση θα τείνει στο ∞ *καθώς μεγαλώνει ο χρόνος.*



Ανάστροφο εκρεμμές - Κρουστική απόκριση ανοιχτού συστήματος.

Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται ως εξής. Ξέρουμε ότι $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ *και άρα*

$$y(s) = T(s)u(s) = T(s) \Longleftrightarrow$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(T(s))$$

Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές με τα μερικά κλάσματα έχουμε ότι

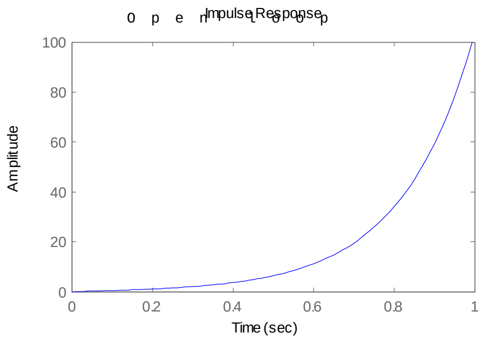
$$y(t) = -0.417579e^{-5.60391t} + 0.0208296e^{-0.142855t} + 0.39675e^{5.56496t}$$

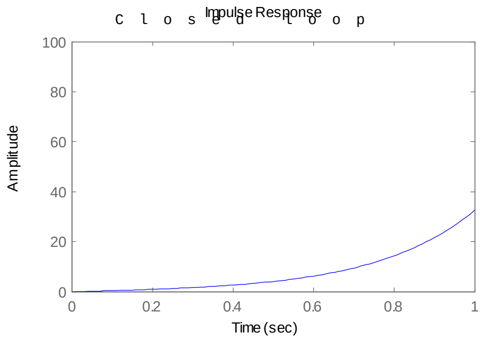
Όντως μόλις μετά από ένα δευτερόλεπτο φαίνεται ότι η κρουστική απόκριση μεγαλώνει υπερβολικά. Από τις εξισώσεις του συστήματος φαίνεται ότι η γωνία απειρίζεται αλλά προφανώς αυτό είναι πρακτικά αδύνατο μια και στις $90^0 = \frac{\pi}{2} rad = 1.57 rad$ *το ανάστροφο εκκρεμές θα χτυπήσει στο καρότσι. Επίσης δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η μαθηματική περιγραφή του συστήματος ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα μόνο για μικρές τιμές του* θ.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να εφαρμόσουμε ανάδραση στο σύστημα με το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$C_1(s) = \frac{3s+1}{s}.$$

Το πρώτο διάγραμμα μας δείχνει την κρουστική απόκριση του ανοιχτού συστήματος ενώ το δεύτερο αυτήν του κλειστού (με ανάδραση) συστήματος.





Ανάστροφο εκρεμμές - Κρουστικές αποκρίσεις ανοιχτού και κλειστού συστήματος με ελεγκτή $C_1(s) = \frac{3s+1}{s}$.

Παρατηρούμε ότι συνδέοντας τα δύο συστήματα σε ανάδραση η κρουστική απόκριση του συστήματος βελτιώνεται αρκετά αλλά πάλι το σύστημα δεν είναι ευσταθές. Οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι

$$\begin{gathered} s_1 = 0 \\ s_2 = -4.2832 \\ s_3 = 4.0962 \\ s_4 = 0.0052. \end{gathered}$$

Αν τώρα δοκιμάσουμε να βάλουμε σε ανάδραση το σύστημα

$$C_2(s) = \frac{s^2 + 100s + 1}{s}$$

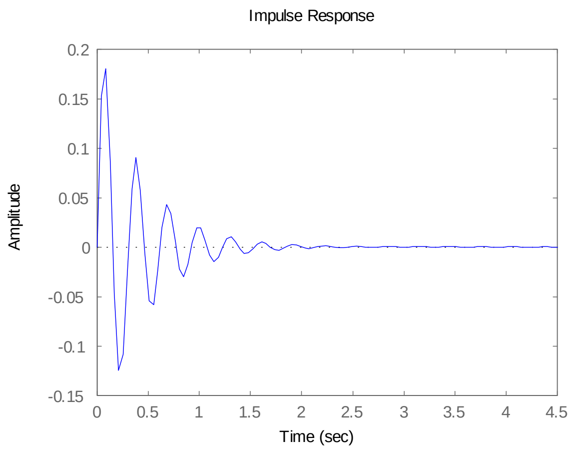
η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$P(s) = \frac{4.545s}{s^3 + 4.727s^2 + 423.4s + 0.09091}$$

και οι πόλοι του κλειστού συστήματος γίνονται

$$\begin{gathered} s_1 = -2.3635 + 20.4396i \\ s_2 = -2.3635 - 20.4396i \\ s_3 = -0.0002. \end{gathered}$$

Όπως περιμένουμε η κρουστική απόκριση του συστήματος μηδενίζεται αρκετά γρήγορα κάτι που σημαίνει ότι παρόλη την αρχική δύναμη που εφαρμόστηκε στο σύστημα ($\delta(t)$) ο ελεγκτής μας εφαρμόζοντας κάποια δύναμη κατάφερε και ισορρόπησε αυτόματα το ανάστροφο εκκρεμές σε σχετικά μικρό χρόνο.



Ανάστροφο εκρεμμές - Κρουστική απόκριση κλειστού συστήματος με ελεγκτή $C_2(s) = \frac{s^2+100s+1}{s}$.

Στα παραπάνω παραδείγματα πήραμε μια ιδέα από τον βασικό σκοπό του μαθήματος. Το να μπορέσεις να διασυνδέσεις ένα δεδομένο σύστημα με ένα άλλο δικής σου σχεδίασης έτσι ώστε το συνολικό σύστημα να έχει κάποιες επιθυμητές ιδιότητες.

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση και σχεδίαση Σ.Α.Ε.

3.1 Εισαγωγή

Οι μέθοδοι που θα παρουσιαστούν στα παρακάτω κεφάλαια αφορούν γραμμικά μοντέλα συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Με την λέξη "ανάλυση" εννοούμε τον προσδιορισμό κάποιων βασικών χαρακτηριστικών ενός συστήματος όπως

- Την ευστάθεια του συστήματος.
- Την μόνιμη απόκριση του συστήματος.
- Την μεταβατική απόκριση του συστήματος.
- Η γενική μεθοδολογία που ακολουθείται για την ανάλυση ενός γραμμικού συστήματος είναι η εξής
- Προσδιορισμός των διαφορικών εξισώσεων ή της συνάρτησης μεταφοράς για κάθε στοιχείο που αποτελεί το σύστημα.
- Σχηματισμός του μοντέλου του συστήματος λαμβάνοντας υπ'όψιν της συνδεσμολογίας μεταξύ των στοιχείων που το αποτελούν.
- Προσδιορισμός της χρονικής απόκρισης του συστήματος.

Προφανώς η εύρεση της απόκρισης ενός συστήματος μπορεί να γίνει με την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος. Όμως η μέθοδος αυτή είναι αρκετά επίπονη για συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης από δύο. Για αυτό υπάρχουν τέσσερις βασικές μέθοδοι για την ανάλυση συστημάτων, η μέθοδος του γεωμετρικού τόπου ριζών, η αναπαράσταση συστημάτων με διαγράμματα Bode, τα διαγράμματα Nyquist και οι χάρτες Nichols.

Η σχεδίαση συστημάτων έχει τον σκοπό να ικανοποιήσει κάποιες προδιαγραφές που δίνονται για ένα σύστημα, να προσθέσει κάποια επιθυμητά χαρακτηριστικά στο σύστημα ή αντίστοιχα να αφαιρέσει κάποια άλλα που είναι . Έτσι πχ ένα σύστημα είναι επιθυμητό να είναι ευσταθές ή να έχει μεγάλη ταχύτητα απόκρισης. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό με την εισαγωγή ενός άλλου συστήματος συνήθως σε ανάδραση με το αρχικό σύστημα που θα ονομάζεται **αντισταθμιστής ή ελεγκτής**. Στόχος είναι να βρεθεί μια μαθηματική περιγραφή του αντισταθμιστή έτσι ώστε το συνολικό σύστημα να ικανοποιεί τις προδιαγραφές. Αντίστοιχα με την ανάλυση συστημάτων, υπάρχουν τέσσερις διαδεδομένες μέθοδοι σχεδίασης, τα διαγράμματα γεωμετρικού τόπου ριζών, τα διαγράμματα Bode, τα διαγράμματα Nyquist και οι χάρτες Nichols.

3.2 Προδιαγραφές συστημάτων

Εκτός από την ευστάθεια, που είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, υπάρχουν και άλλα πολύ σημαντικά ποιοτικά χαρακτηριστικά. Κάτι τέτοιο φαίνεται και στο διάγραμμα 2.6 όπου για κάθε διαφορετικό αντισταθμιστή ($k = 4, 5, 6, 7$) έχω διαφορετικά χαρακτηριστικά στην κρουστική απόκριση των κλειστών συστημάτων που προκύπτουν. Τα χαρακτηριστικά αυτά ποσοτικοποιούνται συνήθως με το διάγραμμα της βηματικής απόκρισης ως εξής.

- **Υπερύψωση (overshoot)**
  Ισούται με την μέγιστη τιμή της διαφοράς μεταξύ των αποκρίσεων στην μεταβατική κατάσταση και τη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας όταν το σύστημα διεγείρεται από μια μοναδιαία βηματική είσοδο.(Ποσοστό υπερύψωσης: $100\frac{y_{\max}-y_{\mu o \nu}}{y_{\mu o \nu}}$)

- **Χρόνος καθυστέρησης (Delay Time)**
  Ο χρόνος που απαιτείται ώστε η βηματική απόκριση να φτάσει το 50% της τελικής τιμής.

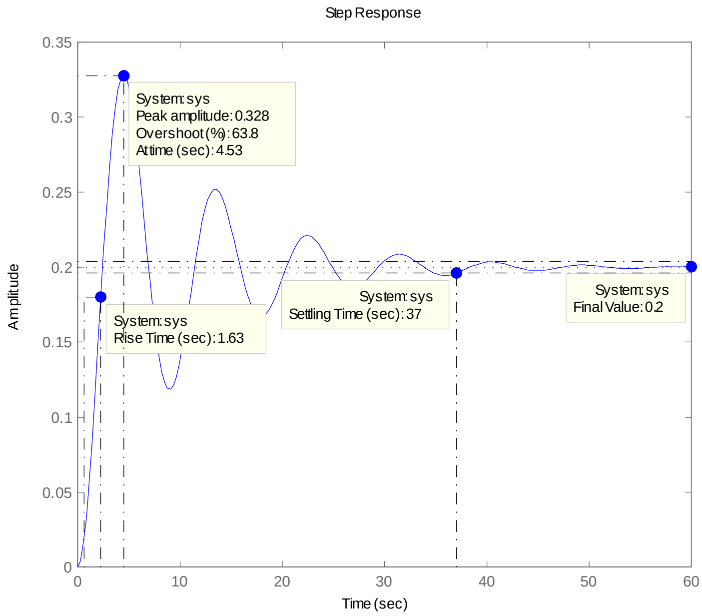
- **Χρόνος ανόδου (Rise Time)**
  Το χρονικό διάστημα στο οποίο η βηματική απόκριση μεταβαίνει από το 10% στο 90% της τελικής της τιμής.

- **Χρόνος αποκατάστασης (Settling Time)**
  Το χρονικό διάστημα στο οποίο η βηματική απόκριση θα φθάσει και θα παραμείνει σε κάποια συγκεκριμένα ποσοστιαία όρια τιμών επί τοις εκατό της τελικής τιμής (συνήθως στο 2%).

Παράδειγμα 3.1 *Έστω το σύστημα ελατήριο - μάζα του παραδείγματος 2.5. Το σύστημα αυτό έχει την παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς*

$$T(s) = \frac{1}{10s^2 + 2s + 5}.$$

όπου ο συντελεστής σκληρότητας του ελατηρίου αντιστοιχεί στον σταθερό όρο του παρονομαστή. Για να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά του συστήματος αυτού αρκεί να υπολογίσουμε με το MATLAB την βηματική απόκριση. Με δεξί κλικ πάνω στο γράφημα διαλέγουμε "Characteristics" και τα χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν.

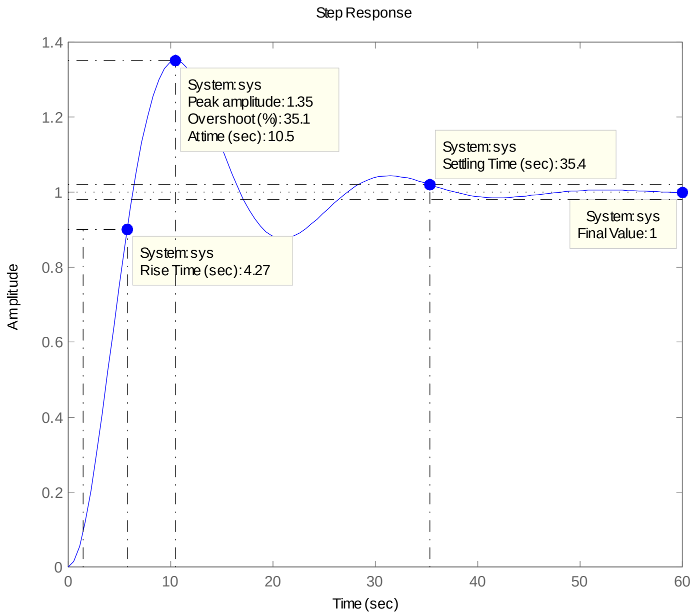


Χαρακτηριστικά βηματικής απόκρισης όταν $k = 5$.

Παρατηρούμε ότι το ποσοστό υπερύψωσης είναι 63.2%, *ο χρόνος ανόδου είναι* $1.63sec$, *ο χρόνος αποκατάστασης είναι* $37sec$ *ενώ το σύστημα ηρεμεί τελικά και έχει σαν έξοδο* $0.2m$.
Αν τώρα δοκιμάσουμε να αντικαταστήσουμε το ελατήριο με ένα άλλο με μικρότερο συντελεστή σκληρότητας $k = 1$, *η νέα συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γίνεται*

$$T(s) = \frac{1}{10s^2 + 2s + 1}.$$

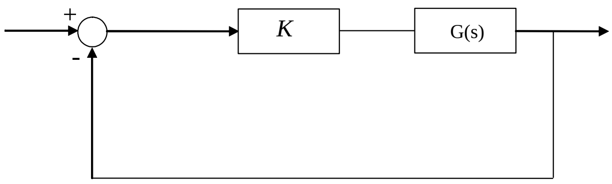
Τα χαρακτηριστικά του νέου συστήματος φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Χαρακτηριστικά βηματικής απόκρισης όταν $k = 1$.

3.3 Γεωμετρικός τόπος ριζών

Ας θυμηθούμε λίγο το παράδειγμα 2.32. Έστω ένα σύστημα ανάδρασης όπως στο παρακάτω σχήμα

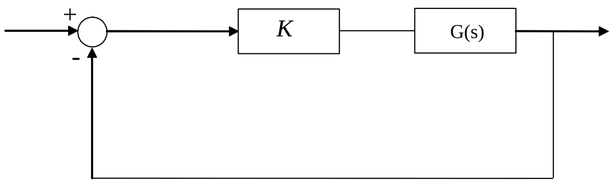


όπου $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ και K οι συναρτήσεις μεταφοράς δύο συστημάτων. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σύστημα απλά πολλαπλασιάζει το σήμα εισόδου του με K. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$T(s) = \frac{G}{1 + GK} = \frac{KN(s)}{D(s) + N(s)K}$$

Ο αριθμός K θα λέγεται **συντελεστής κέρδους**. Οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι οι ρίζες της εξίσωσης $D(s) + N(s)K = 0$. Η θέση των πόλων αυτών στο μιγαδικό επίπεδο αλλάζει καθώς μεταβάλλουμε το K. Αν θέσουμε K πολύ κοντά στο 0 τότε οι πόλοι του κλειστού συστήματος θα είναι πολύ κοντά με τους πόλους του ανοιχτού συστήματος $G(s)$. Όταν το K λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές τότε οι πόλοι του κλειστού συστήματος τείνουν να συμπέσουν με τα μηδενικά του ανοιχτού συστήματος όταν αυτά είναι αρκετά, αλλιώς πάνε στο άπειρο. Το γράφημα που δείχνει πως μεταβάλλονται οι πόλοι του κλειστού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο όταν αυξάνεται το K ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος ριζών**.

Παράδειγμα 3.2 *Έστω το παρακάτω κλειστό σύστημα*



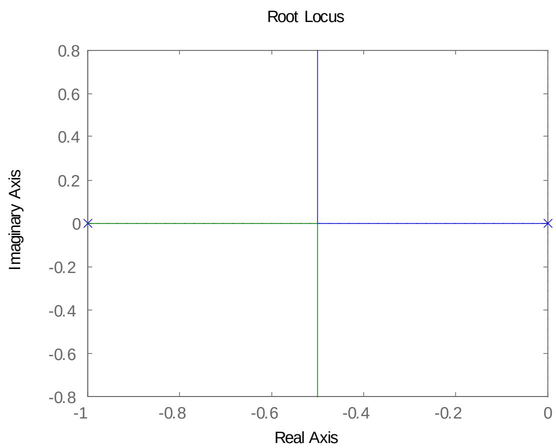
με $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$*. Να κατασκευαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών του κλειστού συστήματος για* $K \geq 0$*.*
Λύση
Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}.$$

Οι πόλοι του $H(s)$ *είναι*

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}.$$

Διακρίνω τις ακόλουθες περιπτώσεις.
α) $1 - 4K \geq 0 \Rightarrow K < \frac{1}{4}$*. Στην περίπτωση αυτή έχω πραγματικές ρίζες. Για* $K \to 0$ *το κλειστό σύστημα έχει σαν πόλους τους πόλους του ανοιχτού συστήματος δηλαδή το* 0 *και το* -1*. Για* $K = \frac{1}{4}$ *έχω μια διπλή πραγματική ρίζα στο* $-\frac{1}{2}$*.*
β) $1 - 4K < 0$*. Στην περίπτωση αυτή έχω μιγαδικές ρίζες με πραγματικό μέρος* $-\frac{1}{2}$ *και συνεχώς αυξανόμενο φανταστικό μέρος καθώς το* $K \to \infty$*.*
Άρα ο γεωμετρικός τόπος ριζών είναι ο ακόλουθος



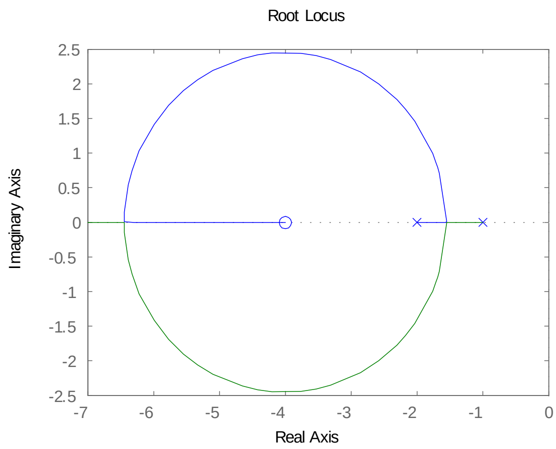
Γεωμετρικός τόπος ριζών.

Ακολουθούν κάποιοι βασικοί κανόνες για την κατασκευή και καλύτερη κατανόηση του γεωμετρικού τόπου ριζών.

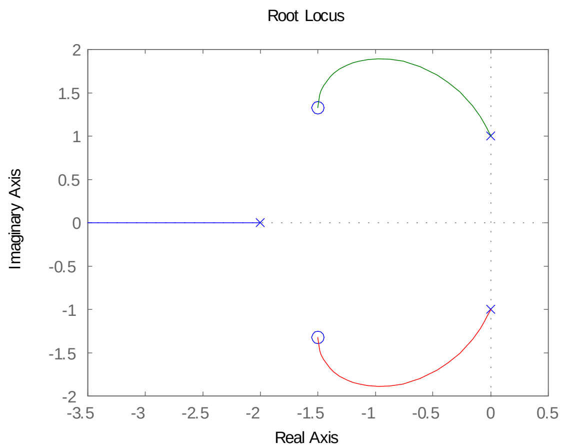
Έστω n_p ο αριθμός των πόλων και n_z ο αριθμός των μηδενικών του ανοιχτού συστήματος με συνάρτηση μεταφορά $G(s)$.

- Οι κλάδοι του γ.τ.ρ. έχουν πλήθος ίσο με max$\{n_p, n_z\}$ και αρχίζουν από τους πόλους του ανοιχτού συστήματος για K κοντά στο0 και καταλήγουν στα μηδενικά του συστήματος ή στο άπειρο.
- Ένα τμήμα του πραγματικού άξονα μπορεί να είναι μέρος του γεωμετρικού τόπου ριζών αν ο αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών της $KG(s)$ που βρίσκονται δεξιά του τμήματος είναι περιττός.
- Ο γ.τ.ρ. είναι συμμετρικός ως προς τον πραγματικό άξονα μια και οι μιγαδικές ρίζες έρχονται σε συζυγή ζευγάρια.
- Σε περιπτώσεις που έχω δύο πραγματικούς πόλους (ή δύο πραγματικά μηδενικά) του ανοιχτού συστήματος που είναι τοποθετημένοι ο ένας δίπλα στον άλλον στον άξονα των πραγματικών αριθμών και το διάστημα μεταξύ τους είναι μέρος του γ.τ.ρ., τότε υπάρχει σημείο μεταξύ των πόλων αυτών από το οποίο φεύγει (ή αντίστοιχα έρχεται) ο κλάδος του γ.τ.ρ.

Ακολουθούν κάποια διαγράμματα γ.τ.ρ.



Γεωμετρικός τόπος ριζών του $G(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+1)}$.



Γεωμετρικός τόπος ριζών του $G(s) = \frac{s^2+3s+4}{(s+2)(s^2+1)}$.

Παράδειγμα 3.3 *Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς* $\frac{2s+1}{2s^2+4s+8}$. *Αν συνδέσουμε το σύστημα αυτό σε ανάδραση όπως εξηγήσαμε πριν τότε η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόγχου θα είναι*

$$T(s) = \frac{\frac{2s+1}{2s^2+4s+8}}{1+\frac{2s+1}{2s^2+4s+8}K} = \frac{2s+1}{2s^2+s(4+2K)+(K+8)}$$

Οι πόλοι του κλειστού συστήματος θα είναι οι λύσεις της $2s^2+s(4+2K)+(K+8)=0$, *δηλαδή*

$$\begin{aligned} p_1 &= \tfrac{-(4+2K)+i\sqrt{(4+2K)^2-4(K+8)2}}{4} = -\tfrac{1}{2}K-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{K^2+2K-12} \\ p_2 &= \tfrac{-(4+2K)-i\sqrt{(4+2K)^2-4(K+8)2}}{4} = -\tfrac{1}{2}K-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{K^2+2K-12} \end{aligned}$$

Για $K=0$ *οι πόλοι του κλειστού συστήματος θα είναι*

$$\begin{aligned} p_1 &= -1+\tfrac{1}{2}\sqrt{12}i = -1.0+1.7321i \\ p_2 &= -1-\tfrac{1}{2}\sqrt{12}i = -1.0-1.7321i \end{aligned}$$

Για $K=1$ *οι πόλοι του κλειστού συστήματος θα είναι*

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.5+1.5i \\ p_2 &= -1.5-1.5i \end{aligned}$$

Για $K=2$

$$\begin{aligned} p_1 &= -2+1i \\ p_2 &= -2-1i \end{aligned}$$

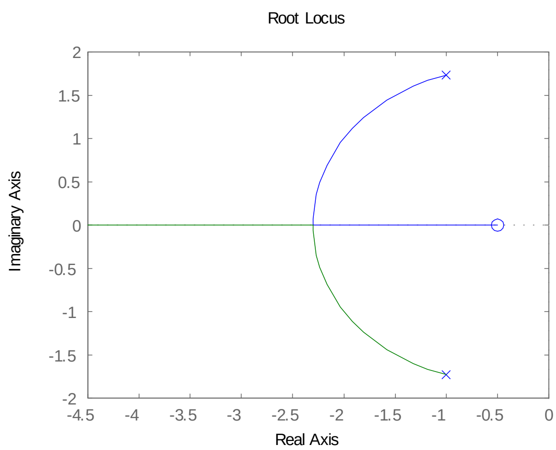
Για $K=3$

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.634 \\ p_2 &= -3.366 \end{aligned}$$

Για $K\to\infty$ *όπως είπαμε και πιο πριν οι πόλοι του κλειστού συστήματος θα είναι τα μηδενικά του ανοιχτού δηλαδή* $p_1=-\frac{1}{2}$

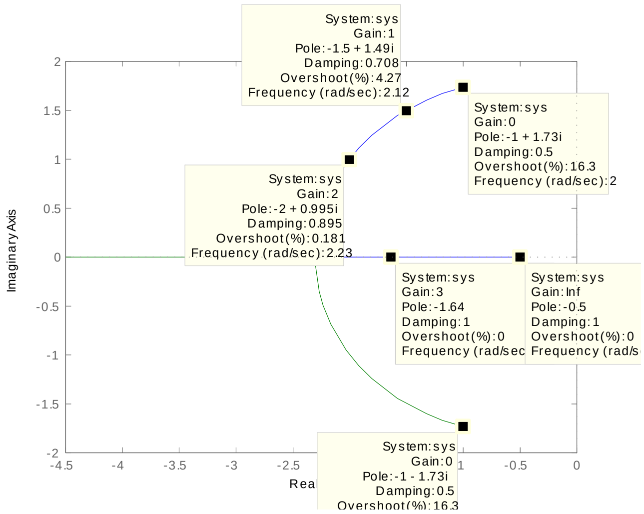
Ο γεωμετρικός τόπος ριζών παράγεται από το MATLAB με την εντολή `rlocus`

```
sys=tf([2 1],[2 4 8]);
rlocus(sys)
```



Γεωμετρικός τόπος ριζών.

Αν κάνουμε κλικ πάνω στις καμπύλες παίρνουμε πληροφορίες όπως για ποια τιμή του K ($Gain$) παίρνουμε τον συγκεκριμένο πόλο. Παρατηρούμε βλέποντας την μπλε καμπύλη ότι ένας πόλος από το $-1.0 + 1.7321i$ για $K = 0$, ”ταξιδεύει” στο $-\frac{1}{2}$ όταν το K απειρίζεται. Αντίστοιχα ο άλλος πόλος (πράσινη καμπύλη) από το $-1.0 - 1.7321i$ για $K = 0$ απειρίζεται όταν το K απειρίζεται.



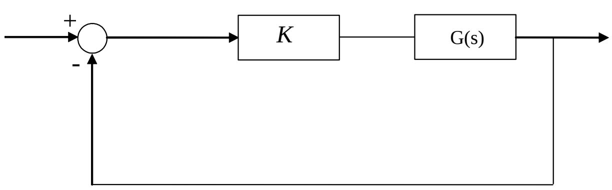
Γεωμετρικός τόπος ριζών.

Το πλήθος των τμημάτων (μπλε και πράσινη καμπύλη στο παράδειγμα) του γεωμετρικού τόπου ριζών ισούται με τον αριθμό των πόλων του ανοιχτού συστήματος.

Όπως είδαμε προηγούμενα, μικρές αλλαγές στις παραμέτρους ενός συστήματος (μικρές αλλαγές στους συντελεστές της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος) μπορούν να προκαλέσουν αλλαγές στην συμπεριφορά του. Έτσι ένας απλός τρόπος για να πετύχουμε μια επιθυμητή απόκριση είναι να ρυθμίσουμε μια παράμετρο του συστήματος. Π.χ. στο σύστημα ελατήριο μάζα αν θέλουμε το σώμα να ηρεμεί όσο το δυνατόν πιο γρήγορα, μας αρκεί να διαλέξουμε ένα πολύ σκληρό ελατήριο, αλλάζοντας έτσι την παράμετρο k του συστήματος. Συχνά όμως κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν. Γι αυτό και κρίνεται απαραίτητη η τοποθέτηση ενός άλλου συστήματος που ονομάζεται αντισταθμιστής ή ελεγκτής έτσι ώστε να αντισταθμίζει τυχόν ανεπαρκή απόδοση.

Ένα πολύ ενδιαφέρον εργαλείο που έχει το MATLAB για την σχεδίαση συστημάτων με την μέθοδο του γεωμετρικού τόπου ριζών είναι το `sisotool`. Θα συνεχίσουμε με μια μικρή ξενάγηση στο `sisotool` μέσω ενός παραδείγματος.

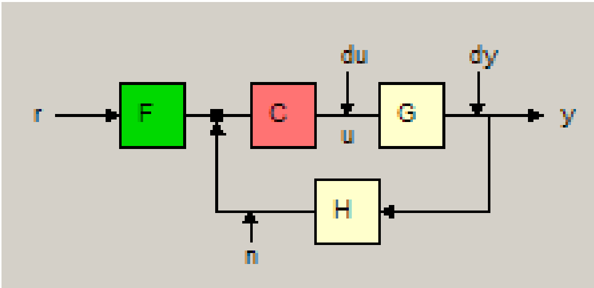
Παράδειγμα 3.4 *Έστω ένα σύστημα που περιγράφεται από την συνάρτηση μεταφοράς* $G(s) = \frac{2s+1}{2s^3+4s^2-8s+1}$. *Να βρεθεί ελεγκτής* $C(s) = K$ *έτσι ώστε το κλειστό σύστημα*



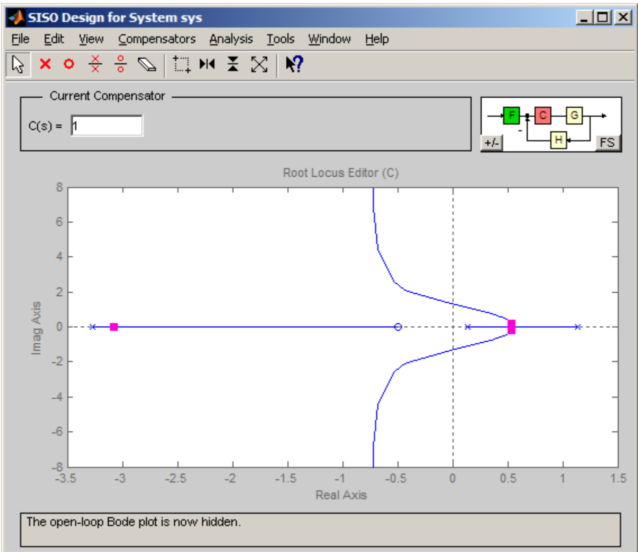
να είναι ευσταθές και επιπλέον να έχει χρόνο αποκατάστασης μικρότερο του 7.

Με τις εντολές `sys=tf([2 1],[2 4 -8 1]);sisotool(sys)` *εμφανίζεται το παράθυρο της εφαρμογής SISOTOOL.*

Το πρώτο πράγμα που μας δείχνει το `sisotool` *είναι ο γεωμετρικός τόπος ριζών του συστήματος.αν εφαρμόσουμε την ακόλουθη συνδεσμολογία*

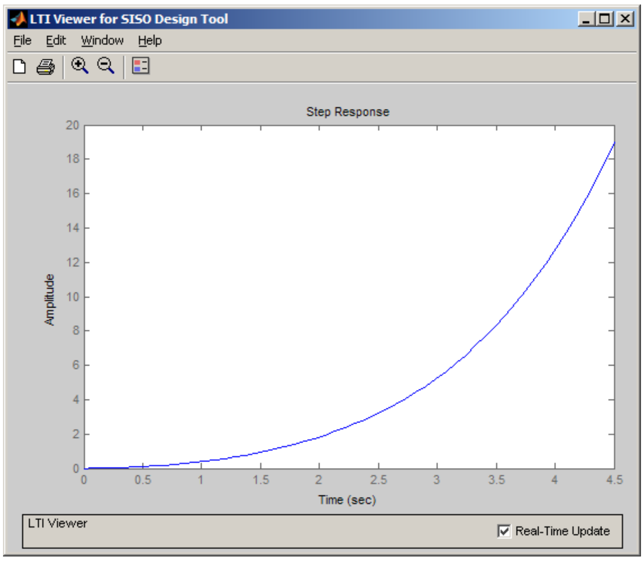


όπου με r συμβολίζεται η είσοδος, y η έξοδος, G η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που θέλουμε να ελέγξουμε (plant), C η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή που θέλουμε να υπολογίσουμε και F, H δύο άλλα συστήματα τα οποία για την ώρα δεν μας ενδιαφέρουν, μια και έχουν αρχική συνάρτηση μεταφοράς 1 και έτσι δεν παίζουν κανένα ρόλο στο σύστημα.



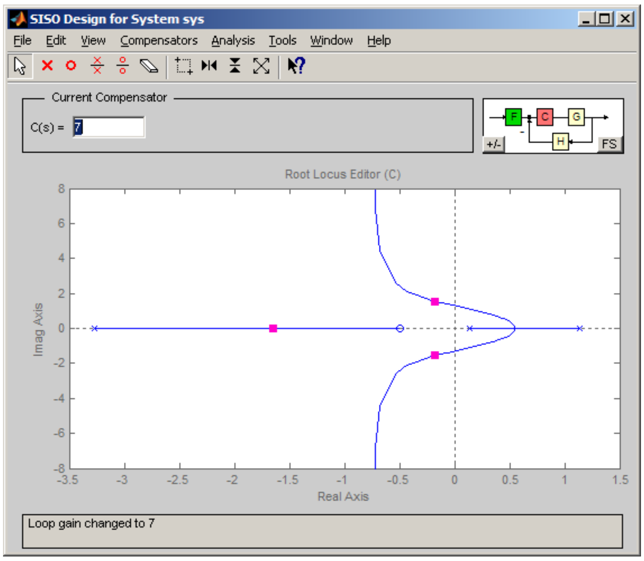
Γεωμετρικός τόπος ριζών συστήματος με την βοήθεια του SISOTOOL.

Όπως φαίνεται στην πάνω αριστερά γωνία, για $C(s) = 1$ οι πόλοι του κλειστού συστήματος που αναπαρίστανται στο διάγραμμα με κόκκινα τετράγωνα είναι οι -3.08 και $0.54 \pm 0.183j$ (`View->Closed Loop Poles`*). Επιλέγοντας "*`Analysis->Response to Step Command`*" μπορούμε να δούμε την βηματική απόκριση του κλειστού συστήματος με μπλε χρώμα.*

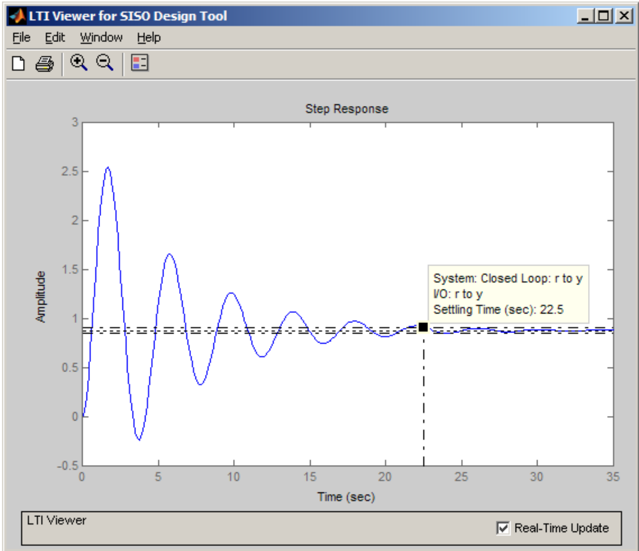


Βηματική απόκριση συστήματος με την βοήθεια του SISOTOOL.

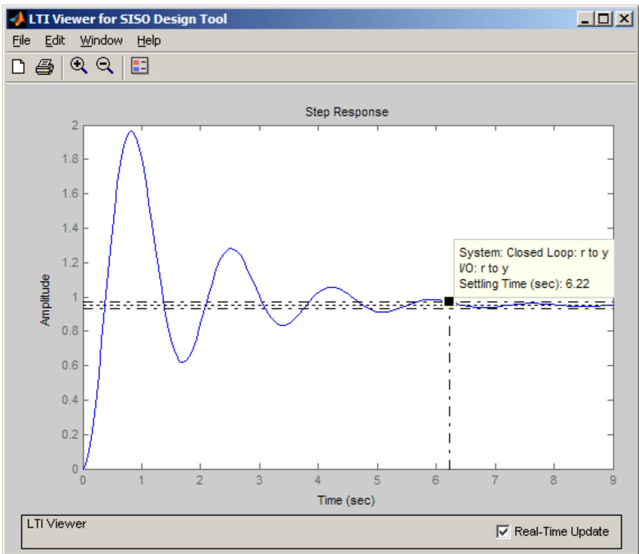
Αλλάζοντας το $C(s)$ σε 7 έχω τον ακόλουθο γεωμετρικό τόπο ριζών



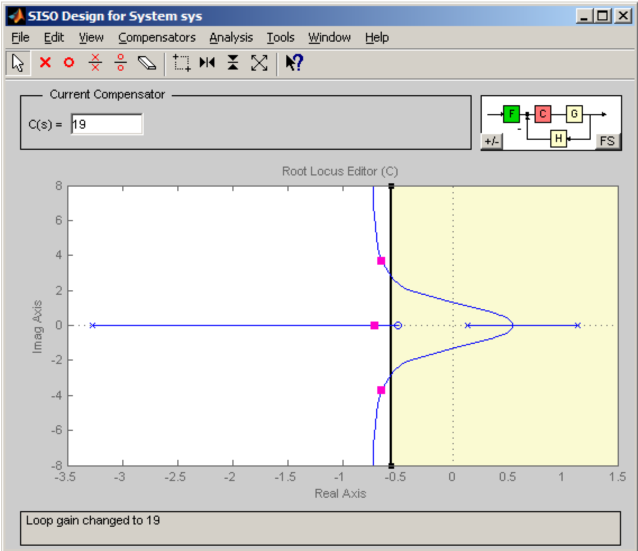
και την παρακάτω βηματική απόκριση.



Παρατηρώ ότι οι πόλοι του κλειστού συστήματος μετατοπίστηκαν προς τα αριστερά και άλλαξαν σε -1.65 *και* $-0.175 \pm 1.55j$ *καταφέραμε δηλαδή και κάναμε το κλειστό μας σύστημα ευσταθές αλλά ο χρόνος αποκατάστασης είναι* 22.5 sec.
Αντί να αλλάζουμε απευθείας το $C(s)$*,μπορούμε να σύρουμε με το ποντίκι μας έναν πόλο και να βλέπουμε πως μεταβάλλονται όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος αλλά και βηματική απόκριση και κατά συνέπεια και ο χρόνος αποκατάστασης. ''Παίζοντας'' έτσι βρίσκουμε ότι πχ για* $C(s) = 19$ *έχω ευστάθεια και χρόνος αποκατάστασης* 6.22 sec.



Το να υποχρεώσουμε το κλειστό μας σύστημα να έχει χρόνο αποκατάστασης μικρότερο του 7 μπορεί να γίνει εισάγοντας έναν περιορισμό στο `sisotool` *με δεξί κλικ πάνω στο γεωμετρικό τόπο ριζών, ''*`Design Constraints->New...`*''. Διαλέγουμε ''*`Settling Time`*''*<7*. Το αποτέλεσμα είναι να γραμμοσκιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών ως εξής.*

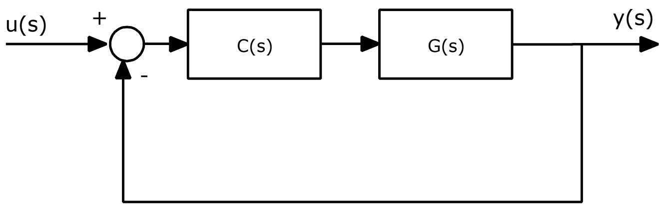


Εισάγοντας περιορισμούς σχεδίασης στο SISOTOOL.

Πρακτικά το MATLAB μας προτείνει ότι για να πετύχω τον περιορισμό μου θα πρέπει να τοποθετήσω τους πόλους μου στην μη σκιασμένη περιοχή. Και όντως για $C(s) = 19$ οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι στην επιθυμητή περιοχή.

3.4 Διοφαντικές εξισώσεις

Μέχρι στιγμής είδαμε δύο μεθόδους σχεδίασης ελεγκτών, το κριτήριο Routh και τον γεωμετρικό τόπο ριζών. Ο συνδυασμός αυτών των κριτηρίων μας επιτρέπει να επιλέξουμε ένα πολυωνυμικό ελεγκτή έτσι ώστε το σύστημα να γίνει ευσταθές ή έστω οι πόλοι του κλειστού συστήματος να είναι ”περίπου” σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε την θεωρία για να μπορούμε να επιλέγουμε ελεγκτή που να τοποθετεί τους πόλους του κλειστού συστήματος σε συγκεκριμένα σημεία του μιγαδικού επιπέδου. Ας περιγράψουμε το πρόβλημα μαθηματικά. Έστω ένα σύστημα με δεδομένη συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, όπου $n(s), d(s)$ πολυώνυμα που δεν έχουν κοινές ρίζες και $\deg(d(s)) = n$, $\deg(n(s)) \leq n$. Τα πολυώνυμα που δεν έχουν κοινές ρίζες θα ονομάζονται **πρώτα**. Έστω επίσης ένας ελεγκτής $C(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ και μια σύνδεση όπως πιο κάτω.



Θέλουμε να προσδιορίζουμε τα $x(s)$ και $y(s)$ έτσι ώστε το κλειστό σύστημα $H(s)$ να έχει πόλους δεδομένους μιγαδικούς αριθμούς $p_1, p_2 \dots$ ή ισοδύναμα ο παρονομαστής του κλειστού συστήματος να είναι της μορφής $q(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots$ Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$H(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{\frac{n(s)}{d(s)}\frac{x(s)}{y(s)}}{1+\frac{n(s)}{d(s)}\frac{x(s)}{y(s)}} = \frac{n(s)x(s)}{n(s)x(s)+d(s)y(s)}. \tag{3.1}$$

Έτσι αυτό που θα θέλαμε για να λυθεί το πρόβλημα είναι να βρούμε $x(s)$ και $y(s)$ έτσι ώστε

$$n(s)x(s) + d(s)y(s) = q(s). \tag{3.2}$$

Η παραπάνω πολυωνυμική εξίσωση ονομάζεται **Διοφαντική εξίσωση**.

Ορισμός 3.5 *Έστω δύο πολυώνυμα $n(s) = n_m s^m + n_{m-1}s^{m-1} + ... + n_0$ και $d(s) = d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + ... + d_0$ με $m \le n$ και .$d_n \neq 0$. Τότε ο πίνακας Sylvester των δύο πολυωνύμων είναι ένας πίνακας διάστασης $(n+m)\times(n+m)$ της μορφής*

$$S(n(s),d(s)) = \begin{bmatrix} d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \cdots & d_1 & d_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_n & d_{n-1} & \cdots & d_2 & d_1 & d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \cdots & d_0 \\ n_m & n_{m-1} & n_{m-2} & \cdots & n_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_m & n_{m-1} & \cdots & n_1 & n_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n_m & n_{m-1} & n_{m-2} & & n_0 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 3.6 *Δύο πολυώνυμα $n(s)$ και $d(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους (δεν έχουν κοινές ρίζες) αν-ν*

$$\det S(n(s),d(s)) \neq 0.$$

Θεώρημα 3.7 *Έστω δύο πολυώνυμα $n(s)$ και $d(s)$ πρώτα μεταξύ τους και* $\deg(d(s)) = n$, $\deg(n(s)) = m \le n$.*Έστω $q(s) = q_{n+m-1}s^{n+m-1} + ... + q_0$ πολυώνυμο βαθμού $n+m-1$. Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $x(s)$ και $y(s)$ τέτοια ώστε*

$$n(s)x(s) + d(s)y(s) = q(s) \tag{3.3}$$

με $\deg x(s) = n-1$ *και* $\deg y(s) = m-1$ *και θα δίνονται από*

$$\begin{bmatrix} y_{m-1} & \cdots & y_0 & x_{n-1} & \cdots & x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n+m-1} & \cdots & q_0 \end{bmatrix} \left[S(n(s),d(s))\right]^{-1}.$$

Παράδειγμα 3.8 *Έστω $G(s) = \frac{s-2}{s(s-1)}$. Να βρεθεί ελεγκτής $C(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ έτσι ώστε το κλειστό σύστημα του σχήματος 3.4 να έχει πόλους το -1 και το -2.*
Σύμφωνα με το συμβολισμό που αναπτύξαμε έχουμε

$$\begin{aligned} n(s) &= s-2 \\ d(s) &= s(s-1) = s^2 - s \\ q(s) &= (s+1)(s+2) = s^2+3s+2 \end{aligned}$$

και $n = 2, m = 1$. Για να υπάρχει λύση της (3.3) πρέπει τα $n(s)$ και $d(s)$ να είναι πρώτα δηλαδή να μην έχουν κοινές ρίζες, κάτι που προφανώς ισχύει. Ο 3×3 πίνακας Sylvester θα είναι

$$S(n(s),d(s)) = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 & d_0 \\ n_1 & n_0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα Sylvester είναι $2 \neq 0$ κάτι που επιβεβαιώνει το ότι τα πολυώνυμα είναι πρώτα. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} y_0 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

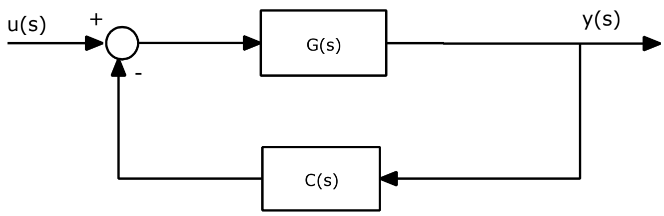
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο ελεγκτής που κάνει το κλειστό σύστημα να έχει πόλους το -1 και το -2.είναι ο $C(s) = \frac{-5s-1}{6} = -\frac{5}{6}s - \frac{1}{6}$. Δοκιμάζουμε να κάνουμε επαλήθευση προσπαθώντας να υπολογίσουμε το $n(s)x(s) + d(s)y(s)$. Έχουμε

$$n(s)x(s) + d(s)y(s) = (s-2)(-5s-1) + \left(s^2 - s\right) 6 = s^2 + 3s + 2$$

το οποίο όντως είναι το $q(s)$.

Αντίστοιχα μπορεί να λυθεί και το πρόβλημα με μια σύνδεση της μορφής



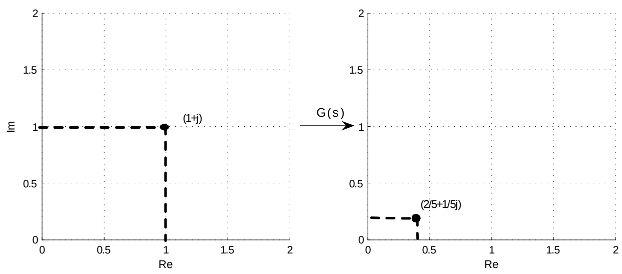
μια και πάλι το κλειστό σύστημα θα έχει συνάρτηση μεταφοράς την

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{\frac{n(s)}{d(s)}}{1 + \frac{n(s)}{d(s)}\frac{x(s)}{y(s)}} = \frac{n(s)y(s)}{n(s)x(s) + d(s)y(s)}$$

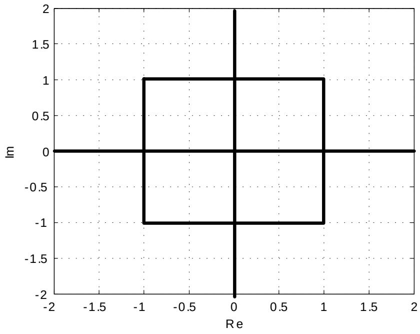
που έχει ίδιους πόλους (ίδιο παρονομαστή) με την (3.1).

3.5 Απόκριση συχνοτήτων - Κριτήριο Nyquist

Έστω μια συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$. Ως γνωστόν η συνάρτηση μεταφοράς είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει μιγαδικούς αριθμούς σε μιγαδικούς αριθμούς. Έτσι για να παραστήσουμε γραφικά μια συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ με $s = \sigma + wj$ χρειαζόμαστε δύο μιγαδικά επίπεδα, ένα για το σ και το w που θα ονομάζεται επίπεδο του s και άλλο ένα για το $\mathrm{Re}(G(s))$ και το $\mathrm{Im}(G(s))$ που θα ονομάζεται επίπεδο του $G(s)$. Έτσι αν π.χ. $G(s) = \frac{s}{s+2}$ το σημείο $s = 1+j$ απεικονίζεται στο $G(1+j) = \frac{1+j}{3+j} = \frac{(1+j)(3-j)}{(3+j)(3-j)} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j$. Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Έστω τώρα μια κλειστή καμπύλη $\mathcal{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο όπως στο σχήμα 3.1.Θέλουμε



Σχήμα 3.1: Κλειστή καμπύλη $\mathcal{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο

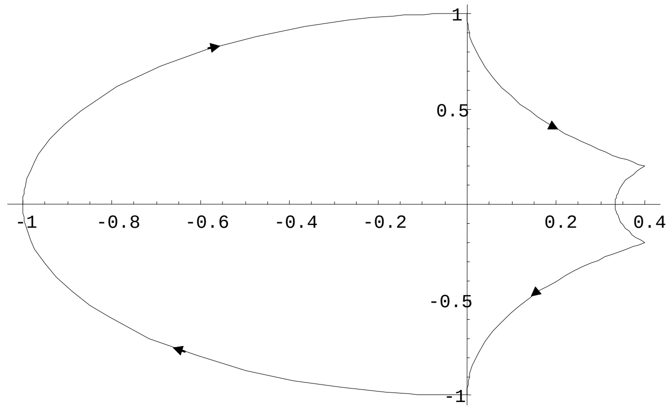
να βρούμε την απεικόνιση αυτής της καμπύλης μέσω της $G(s) = \frac{s}{s+2}$. Η $\mathcal{C}$ παραμετροποιείται ως εξής:

(i) $s = -1 + wj$, για $w \in [-1, 1]$.
(ii) $s = 1 + wj$, για $w \in [-1, 1]$.
(iii) $s = w + j$, για $w \in [-1, 1]$.
(iv) $s = -w - j$, για $w \in [-1, 1]$.

Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις βρίσκουμε την εικόνα του s μέσω της $G(s)$

(i) $G(-1 + wj) = \frac{-1+wj}{-1+wj+2} = \frac{-1+wj}{1+wj} = \frac{(-1+wj)(1-wj)}{(1+wj)(1-wj)} = \frac{-1+w^2}{1+w^2} + \frac{2w}{1+w^2}j$
(ii) $G(1 + wj) = \frac{3+w^2}{9+w^2} + \frac{2w}{9+w^2}j$
(iii) $G(w + j) = \frac{w^2+2w+1}{(w+2)^2+1} + \frac{2}{(w+2)^2+1}j$
(iv) $G(-w - j) = \frac{w^2+2w+1}{(w+2)^2+1} - \frac{2}{(w+2)^2+1}j$.

Παίρνοντας τώρα τιμές σε συγκεκριμένα σημεία μπορούμε να σχηματίσουμε την απεικόνιση της $\mathcal{C}$ μέσω της $G(s) = \frac{s}{s+2}$ η οποία φαίνεται στο επόμενο σχήμα

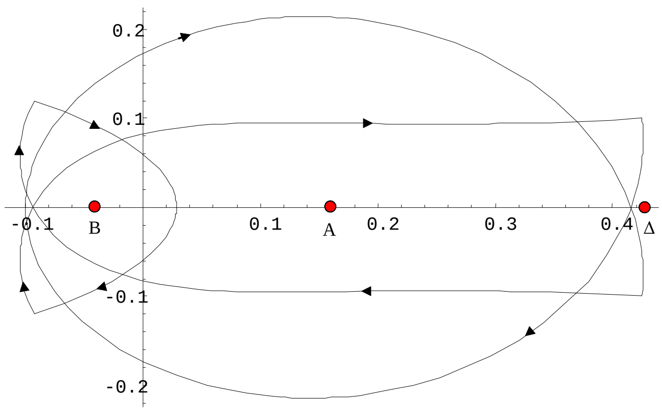


Απεικόνιση καμπύλης στο μιγαδικό επίπεδο

και ας την ονομάσουμε καμπύλη Γ. Η φορά της καμπύλης δείχνει την εξέλιξη της G καθώς το w μεγαλώνει.

Έστω τώρα το σημείο $A = (-0.2, 0.5)$ ή αλλιώς το $-0.2+0.5j$ στο επίπεδο $G(s)$. Θα λέμε ότι η καμπύλη Γ κάνει 1 περιστροφή γύρω από το σημείο A και θα το συμβολίζουμε με μια και περιστρέφεται μια φορά με κατεύθυνση σύμφωνα με την φορά του ρολογιού. Ο αριθμός των περιστροφών της καμπύλης Γ γύρω από ένα σημείο A θα συμβολίζεται με $N_\Gamma(A)$.

Έστω τώρα η συνάρτηση $G(s) = \frac{(s-0.5)(s+0.5)(s-0.2)}{s^4+6s+14}$. Η απεικόνιση της $\mathcal{C}$ του σχήματος 3.1 μέσω της $G(s)$ φαίνεται στο σχήμα 3.5.Τότε



$$N_\Gamma(A) = 2$$
$$N_\Gamma(B) = 3$$
$$N_\Gamma(\Delta) = 0.$$

Έστω τώρα μια συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$. Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές και ότι η είσοδος στο σύστημα είναι της μορφής

$$u(t) = \begin{cases} A\cos\omega t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

όπου το $A \in \mathbb{R}$ το πλάτος και $\omega = 2\pi k \in \mathbb{R}$ η κυκλική συχνότητα (σε rad/sec) του σήματος όπου $k = \frac{1}{T}$ η συχνότητα και T η περίοδος του σήματος. Αποδεικνύεται ότι η μόνιμη απόκριση του συστήματος (2.8) είναι της μορφής

$$y_{\mu o \nu}(t) = A \left| G\left(j\omega\right) \right| \cos\left[\omega t + \phi\left(\omega\right)\right].$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- Η έξοδος είναι κι αυτή συνημιτονοειδής ίδιας συχνότητας ω και πλάτους πολλαπλάσιου του πλάτους της εισόδου $(A \left| G\left(j\omega\right) \right|)$
- Υπάρχει μια διαφορά φάσης $\phi\left(\omega\right)$ ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο.

Αποδεικνύεται ότι

$$\phi\left(\omega\right) = \arg G\left(j\omega\right).$$

Η συνάρτηση $G\left(j\omega\right)$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής ω, έχει δηλαδή πεδίο ορισμού τον πραγματικό άξονα $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Για κάθε πραγματικό αριθμό $\omega \in \mathbb{R}$,η $G\left(j\omega\right)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με πραγματικό μέρος $\mathrm{Re}\, G\left(j\omega\right)$ και φανταστικό μέρος $\mathrm{Im}\, G\left(j\omega\right)$,έτσι ώστε η $G\left(j\omega\right)$ να γράφεται

$$G\left(j\omega\right) = \underbrace{\mathrm{Re}\, G\left(j\omega\right)}_{X(\omega)} + j\underbrace{\mathrm{Im}\, G\left(j\omega\right)}_{Y(\omega)}$$

Τότε το μέτρο $\left| G\left(j\omega\right) \right|$ της $G\left(j\omega\right)$ είναι

$$\left| G\left(j\omega\right) \right| = \sqrt{\left[X\left(\omega\right)\right]^2 + \left[Y\left(\omega\right)\right]^2}$$

και

$$\phi\left(\omega\right) = \arg G\left(j\omega\right) = \arctan \frac{Y\left(\omega\right)}{X\left(\omega\right)}$$

είναι το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $G\left(j\omega\right)$.

Τότε η $G\left(j\omega\right)$ γράφεται

$$\begin{aligned} G\left(j\omega\right) &= \left| G\left(j\omega\right) \right| \cos\phi\left(\omega\right) + j\left| G\left(j\omega\right) \right| \sin\phi\left(\omega\right) \\ &= \left| G\left(j\omega\right) \right| \left[\cos\phi\left(\omega\right) + j\sin\phi\left(\omega\right)\right] \\ &= \left| G\left(j\omega\right) \right| e^{j\phi(\omega)} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $G\left(j\omega\right)$ ονομάζεται *συνάρτηση συχνοτήτων* του συστήματος και όπως είδαμε η μόνιμη απόκριση $y_{\mu o \nu}\left(t\right)$ σε ημιτονική είσοδο μπορεί να προσδιοριστεί από το μέτρο $\left| G\left(j\omega\right) \right|$ και το όρισμα $\phi\left(\omega\right)$ της $G\left(j\omega\right)$. Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου $\left| G\left(j\omega\right) \right|$ και του ορίσματος $\arg G\left(j\omega\right)$ όταν η κυκλική συχνότητα ω του σήματος εισόδου $u\left(t\right) = A\cos\omega t$ μεταβάλλεται στο διάστημα $\omega \in [0, \infty)$ ονομάζονται *καμπύλες απόκρισης συχνοτήτων* του συστήματος (frequency response curves).

Μερικές φορές το μέτρο $\left| G\left(j\omega\right) \right|$ εκφράζεται σε decibel και συμβολίζεται με $\left| G\left(j\omega\right) \right|_{dB}$ όπου

$$\left| G\left(j\omega\right) \right|_{dB} = 20\log_{10}\left| G\left(j\omega\right) \right|$$

Σημειώσατε ότι αν $\left| G\left(j\omega\right) \right| < 1$, τότε $\log_{10}\left| G\left(j\omega\right) \right| < 0$ και άρα $\left| G\left(j\omega\right) \right|_{dB} := 20\log_{10}\left| G\left(j\omega\right) \right| < 0$.

Αν $\left| G\left(j\omega\right) \right| = 1$, τότε $\log_{10}\left| G\left(j\omega\right) \right| = 0$ και άρα $\left| G\left(j\omega\right) \right|_{dB} := 20\log_{10}\left| G\left(j\omega\right) \right| = 0$.

Τέλος αν $|G(j\omega)| > 1$, τότε $\log_{10}|G(j\omega)| > 0$ και άρα $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| > 0$. Δηλαδή

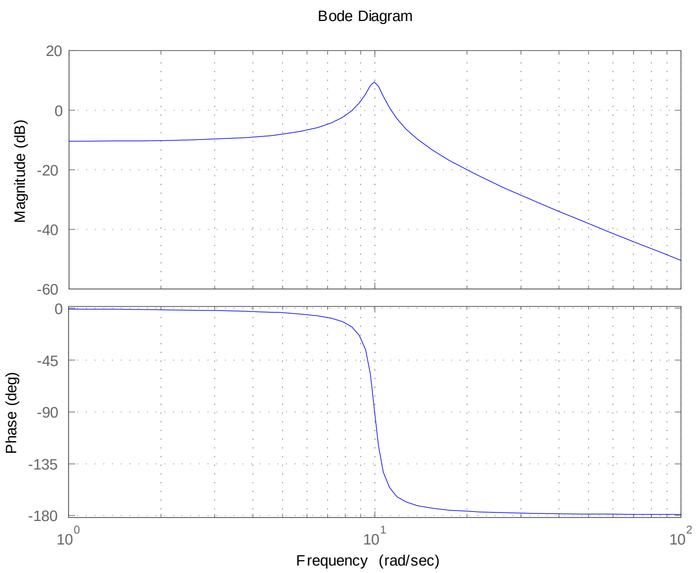
$$\begin{aligned}
|G(j\omega)|_{dB} &< 0\text{dB όταν } |G(j\omega)| < 1 \\
|G(j\omega)|_{dB} &= 0\text{dB όταν } |G(j\omega)| = 1 \\
|G(j\omega)|_{dB} &> 0\text{dB όταν } |G(j\omega)| > 1
\end{aligned}$$

και άρα,

- αν $|G(j\omega)|_{dB} < 0$ dB, το σύστημα **αμβλύνει** το πλάτος A της εισόδου $u(t) = A\cos(\omega t)$ κατά $|G(j\omega)|$,
- αν $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ dB, το σύστημα αφίνει αναλλοίωτο το πλάτος A της εισόδου $u(t)$, και
- αν $|G(j\omega)|_{dB} > 0$ dB, το σύστημα **ενισχύει** το πλάτος A της εισόδου κατά $|G(j\omega)|$.

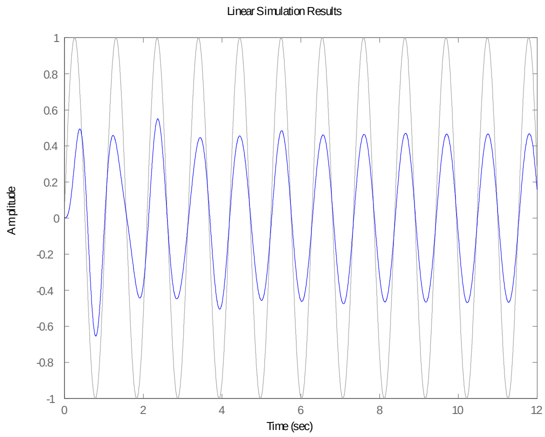
Η γραφική παράσταση των $|G(j\omega)|_{dB}$ και $\arg G(j\omega)$ ως προς ω, με το ω σε λογαριθμική κλίμακα ονομάζονται **διαγράμματα Bode** του συστήματος.

Έστω $G(s) = \frac{30}{s^2+s+100}$. Το διάγραμμα Bode είναι το ακόλουθο.



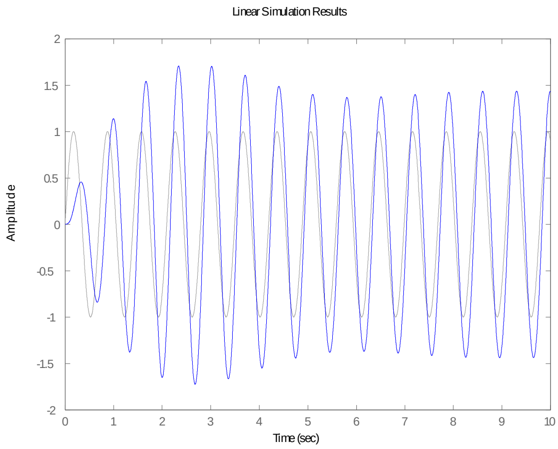
Διάγραμμα Bode της $G(s) = \frac{30}{s^2+s+100}$

Παρατηρούμε ότι όταν πχ $\omega = 6$ έχω $|G(j\omega)|_{dB} < 0$ και άρα το σύστημα **αμβλύνει** το πλάτος της εισόδου. Ας δοκιμάσουμε μια είσοδο κυκλικής συχνότητας $\omega = 6$ δηλαδή περιόδου $T = \frac{1}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6}$.Το σήμα εισόδου θα είναι $u(t) = \cos(6t)$. Τότε η έξοδος στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας (μετά από κάποια δευτερόλεπτα) είναι και αυτή συνημιτονοειδής με πλάτος μικρότερο όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.



Έξοδος της $G(s) = \frac{30}{s^2+s+100}$ για είσοδο $u(t) = \cos(6t)$

Αντίστοιχα αν δοκιμάσουμε μια είσοδο $u(t) = \cos(9t)$ τότε η έξοδος στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας έχει πλάτος μεγαλύτερο



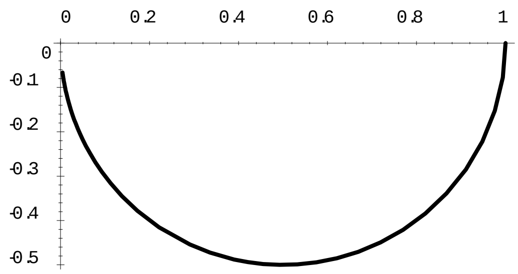
Έξοδος της $G(s) = \frac{30}{s^2+s+100}$ για είσοδο $u(t) = \cos(9t)$

Ορισμός 3.9 *Η γραφική παράσταση της $G(j\omega)$στο μιγαδικό επίπεδο $G(j\omega)$ όταν η κυκλική συχνότητα ω μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, +\infty)$ ονομάζεται πολικό διάγραμμα της $G(s)$.*

Ορισμός 3.10 *Η εικόνα όλου του μιγαδικού άξονα $j\omega, \omega \in (-\infty, +\infty)$ μέσω της $G(j\omega)$ ονομάζεται διάγραμμα Nyquist της $G(s)$.*

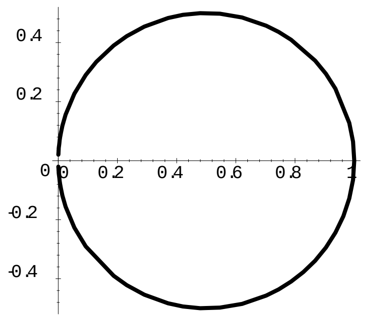
Το πολικό διάγραμμα και το διάγραμμα Nyquist συνοδεύονται από μια φορά περιστροφής καθώς το ω μεγαλώνει.

Παράδειγμα 3.11 *Το πολικό διάγραμμα της $H(s) = \frac{2}{s+2}$δηλαδή το γράφημα της $H(j\omega) = \frac{2}{j\omega+2}$ δίνεται στο επόμενο σχήμα.*



Το διάγραμμα έχει φορά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού.

Παράδειγμα 3.12 *Το διάγραμμα Nyquist της $H(s) = \frac{2}{s+2}$ για $\sigma = 2$ στο σχήμα δίνεται στο επόμενο σχήμα*



Το διάγραμμα έχει φορά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού.

Ακολουθεί ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα της μιγαδικής ανάλυσης που ονομάζεται κριτήριο του ορίσματος.

Κριτήριο 3.13 *Έστω $\mathcal{C}$ μια κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο και μια συνάρτηση $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$. Έστω Γ η απεικόνιση αυτής της καμπύλης μέσω της $G(s)$. Τότε ο αριθμός $N_\Gamma(0)$ των περιστροφών της Γ γύρω από το σημείο $(0,0)$ του επιπέδου $G(s)$ είναι*

$$N_\Gamma(0) = Z - P$$

όπου Z ο αριθμός των μηδενικών της $G(s)$ μέσα στην καμπύλη $\mathcal{C}$ και P ο αριθμός των πόλων της $G(s)$ μέσα στην καμπύλη $\mathcal{C}$.

Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα για την προηγούμενη συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{(s-0.5)(s+0.5)(s-0.2)}{s^4+6s+14}$, καμπύλη $\mathcal{C}$ αυτή του σχήματος 3.1 και Γ αυτή του σχήματος 3.5 Αυτή η συνάρτηση μεταφοράς έχει μηδενικά τα

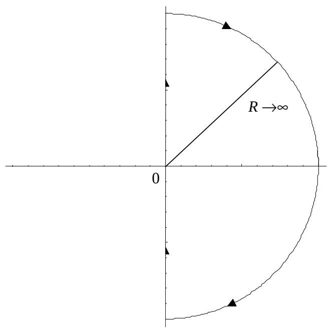
$$z_1 = 0.5$$
$$z_2 = -0.5$$
$$z_3 = 0.2$$

και πόλους

$$\begin{aligned} p_1 &= 1.39518 + 1.73829j \\ p_2 &= 1.39518 - 1.73829j \\ p_3 &= -1.39518 + 0.933488j \\ p_4 &= -1.39518 - 0.933488j. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $Z = 3$ (μια και όλα τα μηδενικά είναι μέσα στην $\mathcal{C}$) και $P = 0$ (κανένας πόλος δεν είναι μέσα στην $\mathcal{C}$). Άρα θα πρέπει η απεικόνιση της $\mathcal{C}$ μέσω της $G(s)$ να περιστρέφεται $N_\Gamma(0) = Z - P = 3$ φορές γύρω από το $(0, 0)$, κάτι που όντως επιβεβαιώνεται από το σχήμα 3.5.

Έστω τώρα μια καμπύλη $\mathcal{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο όπως παρακάτω.



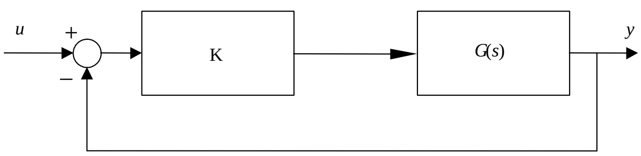
Κλειστή καμπύλη που περιλαμβάνει όλο το δεξί μιγ. ημιεπίπεδο

Η καμπύλη αποτελείται από ένα μέρος του μιγαδικού άξονα και το ημικύκλιο με ακτίνα R που τείνει στο άπειρο. Προφανώς αν R τείνει στο άπειρο η καμπύλη αυτή περικλείει όλο το δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Η εικόνα της καμπύλης αυτής μέσω μιας συνάρτησης μεταφοράς συμπίπτει με το διάγραμμα Nyquist της σ.μ.

Θεώρημα 3.14 *Μια συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ είναι ευσταθής αν το διάγραμμα Nyquist της περιστρέφεται γύρω από το 0, Z φορές όπου Z ο αριθμός των μηδενικών της $G(s)$ στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. δηλαδή αν*

$$N_\Gamma(0) = .$$

Κριτήριο 3.15 *(Κριτήριο Nyquist). Το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές αν-ν η απεικόνιση*

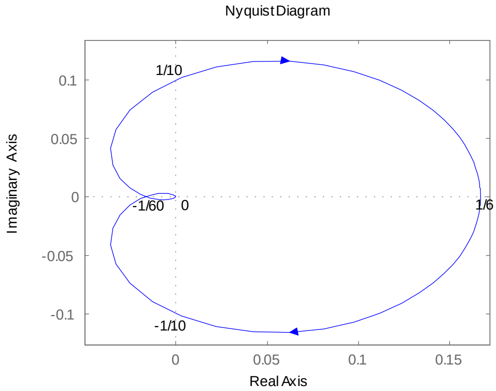


Γ μέσω της $\mathcal{C}$ του σχήματος 3.5 περιστρέφεται περί το σημείο $(-\frac{1}{K}, 0)$ του επιπέδου $G(s)$, $-P$ φορές, όπου P ο αριθμός των πόλων του ανοιχτού συστήματος στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.

Το διάγραμμα Nyquist υπολογίζεται με την ακόλουθη εντολή.

```
nyquist(sys)
```

Παράδειγμα 3.16 *Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς* $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$. *Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς* K *για τις οποίες το κλειστό σύστημα του σχήματος 3.15 είναι ευσταθές όταν το διάγραμμα Nyquist της* $G(s)$ *είναι*



Το διάγραμμα Nyquist παράγεται εύκολα στο MATLAB με την εντολή "`nyquist`".

Σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist θα πρέπει η καμπύλη του Nyquist να περιστρέφεται γύρω από το σημείο $(-\frac{1}{K}, 0)$ *του επιπέδου* $G(s)$, $-P = 0$ *φορές, όπου* P *ο αριθμός των πόλων του ανοιχτού συστήματος στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο. Άρα θα πρέπει*

$$-\frac{1}{K} < -\frac{1}{60} \overset{K>0}{\Longrightarrow} -1 < -\frac{1}{60}K \Leftrightarrow 0 < K < 60$$

ή

$$-\frac{1}{K} > \frac{1}{6} \overset{K>0}{\Longrightarrow} -1 > \frac{1}{6}K \Leftrightarrow 0 < K < -6.$$

Άρα οι τιμές του K *για τις οποίες το το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές είναι* $-6 < K < 60$ *με* $K \neq 0$.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με το κριτήριο Routh. Η συνάρτηση του κλειστού συστήματος είναι η

$$H(s) = \frac{G(s)K}{1 + G(s)K} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + k)}.$$

Σχηματίζω τον πίνακα Routh του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς

$$\begin{array}{c|ll} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6+k \\ s^1 & \frac{\mathbf{60-K}}{\mathbf{6}} & \mathbf{0} \\ s^0 & 6+K & 0 \end{array}$$

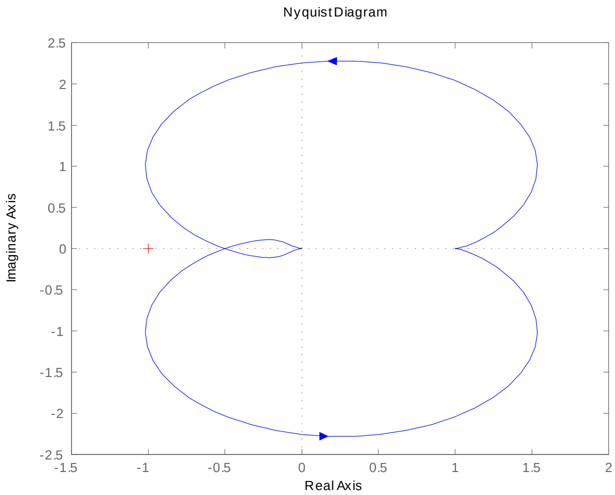
Άρα σύμφωνα με το κριτήριο Routh έχω ότι θα πρέπει οι συντελεστές του $s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + k)$ *να είναι αυστηρά θετικοί όπως και η πρώτη στήλη του πίνακα Routh.*

$$\left\{ \begin{array}{c} (6+K) > 0 \\ \frac{60-K}{6} > 0 \\ 6+K > 0 \end{array} \right.$$

και άρα το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές όταν

$$-6 < K < 60.$$

Παράδειγμα 3.17 *Έστω η σ.μ.* $G(s) = \frac{s^2+s+1}{s^4+3s^3+2s^2+s+1}$*. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς* $K > 0$ *για τις οποίες το κλειστό σύστημα του σχήματος 3.15 είναι ευσταθές όταν το διάγραμμα Nyquist της* $G(s)$ *είναι*



Λύση
Σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist θα πρέπει η καμπύλη του Nyquist να περιστρέφεται γύρω από το σημείο $(-\frac{1}{K}, 0)$ *του επιπέδου* $G(s)$*,* $-P = 0$*. Θα υπολογίσουμε το* P *δηλαδή τον αριθμό των ασταθών πόλων της* $G(s)$ *με τη βοήθεια του πίνακα Routh.*

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 3 & 1 & \\ s^2 & \frac{5}{3} & 1 & \\ s & -\frac{4}{5} & & \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

Παρατηρώ ότι έχω δύο εναλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh και έτσι θα έχω δύο ασταθείς πόλους, άρα $P = 2$*. Κατά συνέπεια θα πρέπει*

$$-0.5 < -\frac{1}{K} < 0$$

δηλαδή

$$K > 2.$$

Κεφάλαιο 4

Επαναληπτικές ασκήσεις

Παράδειγμα 4.1 *Να διαπιστωθεί κατά πόσο τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ευσταθή κατά Hurwitz (οι ρίζες τους έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος).*

$a(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1$
$a(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$

Λύση

Ελέγχουμε αρχικά ότι ισχύει η αναγκαία συνθήκη, ότι όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι θετικοί. Σχηματίζουμε τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & b_1 & b_2 & \\ s^2 & c_1 & c_2 & \\ s & d_1 & & \\ 1 & e_1 & & \end{array}$$

όπου οι σταθερές $b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, e_1$ υπολογίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, b_2 = -\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ c_1 &= -\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, c_2 = -\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ d_1 &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \\ e_1 &= -\frac{1}{-1/2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Συνολικά ο πίνακας Routh είναι:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 1 & 0 & \\ s^2 & 2 & 1 & \\ s & -1/2 & & \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη στήλη του πίνακα εμφανίζεται ένα αρνητικό στοιχείο ($-\frac{1}{2}$), οπότε το πολυώνυμο δεν είναι ευσταθές.

Παρατηρούμε ότι όλοι συντελεστές του πολυωνύμου $a(s) = s^4+10s^3+35s^2+50s+24$ είναι θετικοί οπότε η αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ικανοποιείται. Σχηματίζουμε τον πίνακα Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 35 & 24 \\ s^3 & 10 & 50 & \\ s^2 & b_1 & b_2 & \\ s & c_1 & & \\ 1 & d_1 & & \end{array}$$

οπότε οι συντελεστές υπολογίζονται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 10 & 50 \end{vmatrix} = 30, b_2 = -\frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 24 \\ c_1 &= -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 30 & 24 \end{vmatrix} = 42 \\ d_1 &= -\frac{1}{42}\begin{vmatrix} 30 & 24 \\ 42 & 0 \end{vmatrix} = 24 \end{aligned}$$

Συνολικά ο πίνακας του Routh είναι

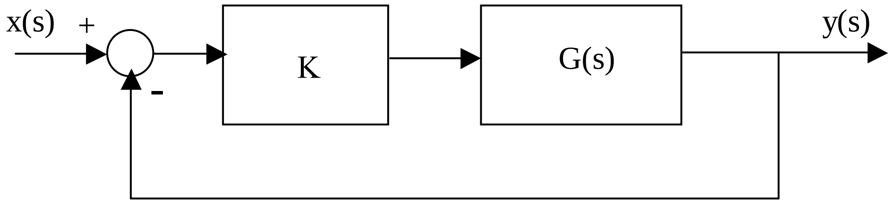
$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 35 & 24 \\ s^3 & 10 & 50 & \\ s^2 & 30 & 24 & \\ s & 42 & & \\ 1 & 24 & & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του πίνακα είναι θετική άρα το πολυώνυμο είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 4.2 *Δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς*

$$G(s) = \frac{s^2+s+1}{s^4+3s^3+2s^2+s+1}$$

Είναι το παραπάνω σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές;
Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$, που καθιστούν το κλειστό σύστημα του παρακάτω σχήματος ασυμπτωτικά ευσταθές



Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι όλοι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a(s) = s^4+3s^3+2s^2+s+1$ είναι θετικοί, άρα η αναγκαία συνθήκη για ευστάθεια ικανοποιείται.

Σχηματίζουμε τον πίνακα του Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 3 & 1 & \\ s^2 & \frac{5}{3} & 1 & \\ s & -\frac{4}{5} & & \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

Στην πρώτη στήλη του πίνακα εμφανίζονται αρνητικές τιμές άρα το αρχικό (ανοικτό) σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Η διασύνδεση του σχήματος είναι ανάδραση, άρα η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)} = \frac{k(s^2+s+1)}{s^4+3s^3+2s^2+s+1+k(s^2+s+1)}$$

ή

$$H(s) = \frac{k(s^2+s+1)}{s^4+3s^3+(k+2)s^2+(k+1)s+(k+1)}$$

Για να είναι το κλειστό σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$a_c(s) = s^4+3s^3+(k+2)s^2+(k+1)s+(k+1)$$

να είναι Hurwitz ευσταθές (δηλ. όλες οι ρίζες του να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος). Αρχικά πρέπει να εξασφαλίσουμε την αναγκαία συνθήκη, για την ευστάθεια, που είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου να είναι θετικοί. Δηλαδή πρέπει

$$\begin{aligned} k+2 &> 0 \\ k+1 &> 0 \end{aligned}$$

Για να συναληθεύουν οι παραπάνω ανισότητες πρέπει να είναι

$$k > -1$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & k+2 & k+1 \\ s^3 & 3 & k+1 & \\ s^2 & \frac{2k+5}{3} & k+1 & \\ s & \frac{2(k^2-k-2)}{2k+5} & & \\ 1 & k+1 & & \end{array}$$

Πρέπει τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα Routh να είναι θετικά, άρα πρέπει:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{2k+5}{3} > 0 \\ \frac{2(k^2-k-2)}{2k+5} > 0 \\ k+1 > 0 \end{array} \right.$$

ή ισοδύναμα

$$\left\{ \begin{array}{c} k > -\frac{5}{2} \\ k \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty) \\ k > -1 \end{array} \right.$$

Οι παραπάνω ανισότητες συναληθεύουν για

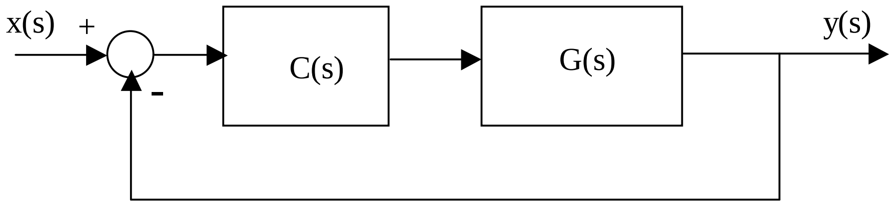
$$k > 2$$

Άρα το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για $k > 2$.

Παράδειγμα 4.3 *Δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς*

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$, που καθιστούν το κλειστό σύστημα του παρακάτω σχήματος ασυμπτωτικά ευσταθές,



όπου

$$C(s) = \frac{ks}{s^2+1}.$$

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$H(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

ή

$$H(s) = \frac{ks}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (k+3)s + 2}$$

Για να είναι το κλειστό σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$a_c(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (k+3)s + 2$$

να είναι ευσταθές (δηλ. όλες οι ρίζες του να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος). Αρχικά πρέπει να εξασφαλίσουμε την αναγκαία συνθήκη, για την ευστάθεια, που είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου να είναι θετικοί. Δηλαδή πρέπει

$$k + 3 > 0 \Leftrightarrow k > -3.$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 2 \\ s^3 & 3 & k+3 & \\ s^2 & -\frac{k-6}{3} & 2 & \\ s & \frac{k(k-3)}{k-6} & & \\ 1 & 2 & & \end{array}$$

Πρέπει τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα Routh να είναι θετικά, άρα πρέπει:

$$
\begin{aligned}
-\frac{k-6}{3} &> 0 \\
\frac{k(k-3)}{k-6} &> 0
\end{aligned}
$$

ή ισοδύναμα

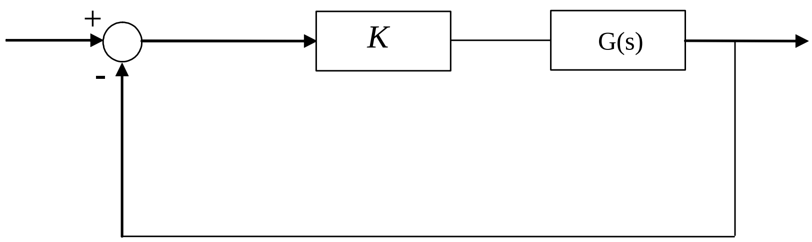
$$
\begin{aligned}
k &< 6 \\
0 &< k < 3.
\end{aligned}
$$

Οι παραπάνω ανισότητες συναληθεύουν για

$$0 < k < 3.$$

Άρα το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για $0 < k < 3$.

Παράδειγμα 4.4 *Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς* $G(s) = \frac{1}{s^2-2s+2}$.
Ποιοι είναι οι πόλοι και τα μηδενικά του $G(s)$*; Είναι το σύστημα ευσταθές;*
Έστω ότι συνδέουμε το σύστημα σε μια διάταξη όπως παρακάτω



όπου K *θετικός πραγματικός αριθμός. Υπάρχει* K *τ.ω. το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές; Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών.*
Αν δεν υπάρχει αριθμός K *που να σταθεροποιεί το σύστημα, να βρεθεί ελεγκτής* $C(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ *έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές.*
Να βρεθεί με την βοήθεια του MATLAB και του sisotool ελεγκτής $C(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ *έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές και χρόνος αποκατάστασης της βηματικής απόκρισης να είναι μικρότερος των* 5 sec.

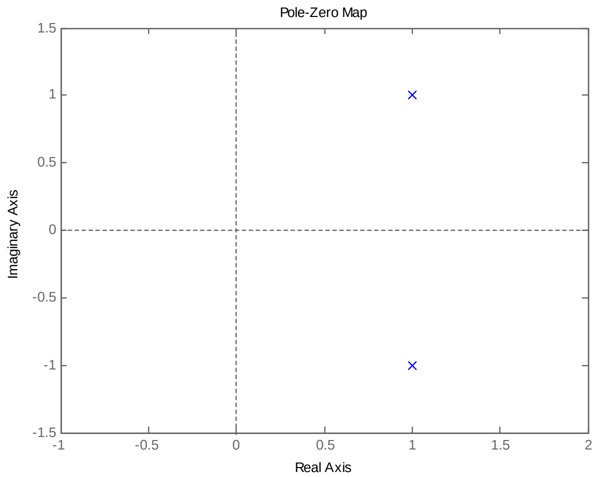
Λύση

Το σύστημα $G(s)$ δεν έχει μηδενικά καθώς ο αριθμητής της συνάρτησης μεταφοράς είναι σταθερός αριθμός. Οι πόλοι του συστήματος είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή, δηλαδή οι $1+i, 1-i$. Το σύστημα είναι ασταθές μια και υπάρχει ένας πόλος με πραγματικό μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

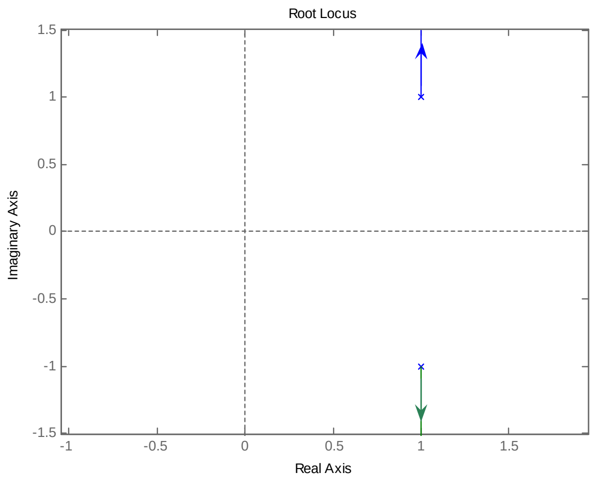
Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Routh. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K\frac{1}{s^2-2s+2}}{1+K\frac{1}{s^2-2s+2}} = \frac{K}{s^2-2s+(K+2)}.$$

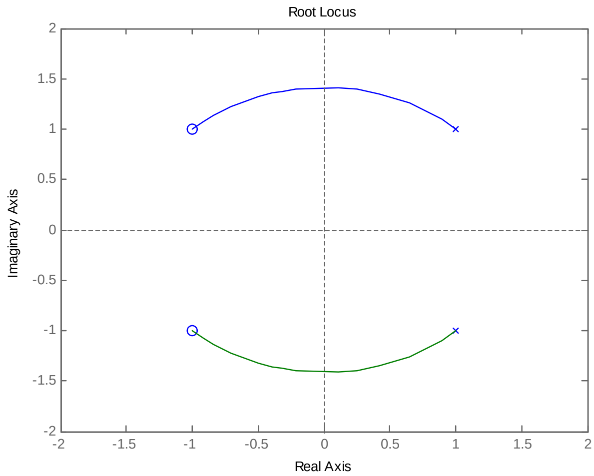
Θέλουμε να ελέγξουμε αν υπάρχει K τ.ω. ο παρονομαστής $s^2-2s+(K+2)$ να είναι ευσταθές πολυώνυμο. Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέρος του κριτηρίου Routh δεν ισχύει, δηλαδή δεν είναι όλοι οι συντελεστές θετικοί. Άρα δεν υπάρχει σταθερός αριθμός K που να σταθεροποιεί το σύστημα. Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε στο περίπου το γ.τ.ρ. Αρχίζουμε από το διάγραμμα πόλων μηδενικών του ανοιχτού συστήματος.



Παρατηρώ ότι οι πόλοι καθώς το K θα αυξάνετε θα πηγαίνουν ο καθένας προς το (μιγαδικό) άπειρο. Με το κριτήριο Routh είδαμε πως δεν υπάρχει K τ.ω. να γίνετε ευσταθές το κλειστό και άρα σίγουρα οι δύο κλάδοι των πόλων δεν θα ”περάσουν” στην αριστερή πλευρά του μιγαδικού επιπέδου. Άρα σίγουρα θα παραμείνουν δεξιά. Αυτή είναι αρκετή σαν πληροφορία για να σχεδιάσω περίπου το γ.τ.ρ. Με το MATLAB μπορώ εύκολα να τον παράγω με την εντολή rlocus.



Για να κάνω το κλειστό σύστημα ευσταθές θα πρέπει να αλλάξω το σχήμα του γ.τ.ρ. Κάτι τέτοιο μπορώ να το κάνω προσθέτοντας πόλους και μηδενικά στον ελεγκτή μου και κατά συνέπεια στο σύστημά μου, εφόσον ελεγκτής και σύστημα είναι σε σειρά. Θα πρέπει να προσθέσω μηδενικά έτσι ώστε να ”τραβήξουν” τους κλάδους των πόλων προς τα αριστερά. Διαλέγω να βάλω μηδενικά στα $-1+i, -1-i$, έχοντας σαν ελεγκτή τον $C(s) = K(s^2+2s+2)$. Ο γ.τ.ρ. γίνεται



Παρατηρώ ότι θα υπάρχει κάποιο K έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές. Την ακριβή τιμή του K θα την βρω με το κριτήριο Routh. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού θα είναι

$$H(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{K(s^2+2s+2)}{s^2-2s+2}}{1+\frac{K(s^2+2s+2)}{s^2-2s+2}}$$

$$H(s) = \frac{K(s^2+2s+2)}{(K+1)\,s^2+(2K-2)\,s+(2K+2)}$$

Θα πρέπει ο παρονομαστής να έχει θετικού συντελεστές δηλαδή να ισχύουν ταυτόχρονα

$$K+1>0 \Leftrightarrow K>-1$$

$$2K-2>0 \Leftrightarrow K>1$$

και

$$2K+2>0 \Leftrightarrow K>-1.$$

Συναληθεύοντας τις τρεις ανισώσεις έχουμε ότι

$$K>1. \tag{4.1}$$

Σχηματίζουμε τώρα τον πίνακα Routh

$$.\quad \begin{array}{c|cc} s^2 & K+1 & 2K+2 \\ s & 2K-2 & 0 \\ 1 & a & \end{array}$$

όπου

$$a = \frac{1}{2K-2}(2K+2)(2K-2) = (2K+2).$$

Άρα θα πρέπει εκτός από την (4.1) να ισχύει επιπλέον

$$2K + 2 > 0$$

δηλαδή

$$K > -1. \tag{4.2}$$

Συναληθεύοντας τις (4.1) και (4.2) έχουμε ότι $K > 1$. Άρα αν διαλέξω ελεγκτή της μορφής

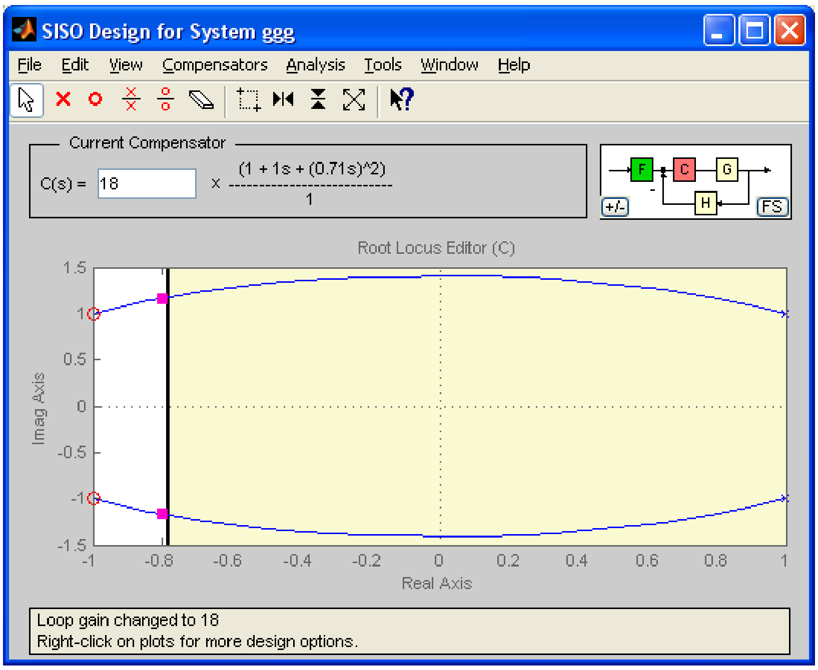
$$C(s) = K(s^2 + 2s + 2), K > 1$$

το κλειστό σύστημα θα είναι ευσταθές.

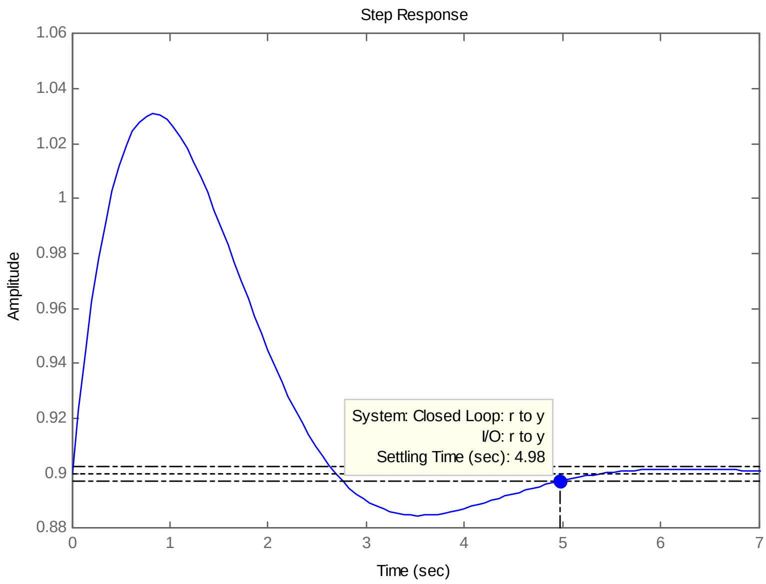
Ορίζω την συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού συστήματος και καλώ το sisotool.

```
s=tf(s);
g=(1)/(s^2-2s+2));
sisotool(g)
```

Προσθέτω δυο μηδενικά στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, έστω αυτά που διάλεξα και στο ερώτημα 3. Βάζω σαν ”design constraint” (δεξί κλικ στο γ.τ.ρ.) το χρόνο αποκατάστασης να είναι μικρότερος του 5. Έτσι μετακινώντας τους πόλους του κλειστού έχω



όπου $C(s) = 18\frac{1+s+(0.71s)^2}{1} = 9.073\,8s^2 + 18s + 18$. Η βηματική απόκριση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Παρατηρώ ότι ο χρόνος αποκατάστασης είναι $4.98sec$.

Βιβλιογραφία

Distefano J., Stubberud A., Williams I., *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*, Σειρά Schaum, Εκδόσεις Τζιόλα, 2000.

Dorf R.C.,Bishop R.H., *Σύγχρονα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2003.

Καραμπετάκης Νικόλαος, *Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων I*, Διδακτικές σημειώσεις τμήματος Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Παρασκευόπουλος Π., *Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο, Τόμος Α, και Β*, Αθήνα, 2001.

Πετρίδης Β., *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, τόμος Α*, Θεσσαλονίκη, 2001.

Χατζίκος Ε., *Matlab 6 για Μηχανικούς*, Εκδ. Τζιόλα, 2002.

Ευρετήριο

Άδεια χρήσης

Creative Commons.Αναφορά-Μη-Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγο Έργο 3.0 Ελλάδα

ΤΟ ΕΡΓΟ (ΟΠΩΣ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ) ΠΑΡΕΧΕΤΑΙ ΥΠΟ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ ΑΥΤΗΣ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΑΔΕΙΑΣ ΤΟΥ ΝΟΜΙΚΟΥ ΠΡΟΣΩΠΟΥ CREATIVE COMMONS CORPORATION (ΣΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΦΕΞΗΣ ΚΑΛΟΥΜΕΝΗ «CCPL» Η «ΑΔΕΙΑ»). ΤΟ ΕΡΓΟ ΠΡΟΣΤΑΤΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΝΟΜΟ ΠΕΡΙ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑΣ ΚΑΙ/Η ΑΛΛΟ ΙΣΧΥΟΝΤΑ ΝΟΜΟ. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΚΑΘΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ, ΕΚΤΟΣ ΑΝ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ ΒΑΣΕΙ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΔΕΙΑΣ Η ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΠΕΡΙ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑΣ.

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΕΧΟΜΕΝΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΩΣ ΑΠΟΔΟΧΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΔΕΙΑΣ. ΣΤΟ ΒΑΘΜΟ ΠΟΥ Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΔΕΙΑ ΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΩΣ ΣΥΜΒΑΣΗ, Ο ΣΥΜΒΑΛΛΟΜΕΝΟΣ ΠΑΡΕΧΕΙ Σ' ΕΣΕΝΑ ΤΟΝ ΑΝΤΙΣΥΜΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΔΕΙΑΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΑΥΤΗΣ.

1. Ορισμοί

α.«Παράγωγο Έργο (Τροποποίηση)» σημαίνει ένα έργο βασισμένο στο αντικείμενο της αδειοδότησης ή στο αντικείμενο της αδειοδότησης και σε άλλα υφιστάμενα έργα, όπως μια μετάφραση, διασκευή, δημιουργία παραγώγου έργου, μουσική διασκευή ή άλλη τροποποίηση συγγραφικού ή καλλιτεχνικού έργου, ηχητική έκδοση (φωνογράφημα) ή δραματοποίηση, και περιέχει έκδοση κινηματογραφικής ταινίας (οπτικοακουστικό έργο), ή οποιαδήποτε άλλη μορφή με την οποία το αντικείμενο της αδειοδότησης μπορεί να διασκευασθεί, μετατραπεί ή να προσαρμοσθεί σε οποιαδήποτε μορφή που εύλογα προέρχεται από την αρχική, εκτός όταν πρόκειται για Συλλογικό Έργο που δεν μπορεί να θεωρηθεί Παράγωγο Έργο για το σκοπό της Άδειας αυτής. Προς αποφυγή αμφιβολιών, όπου το αντικείμενο της αδειοδότησης είναι μουσική σύνθεση ή εγγραφή ήχου (φωνογράφημα), ο συγχρονισμός του αντικείμενο της αδειοδότησης με μια κινούμενη εικόνα («συγχρονισμός») θα θεωρείται Παράγωγο Έργο για το σκοπό της Άδειας αυτής.

β.«Συλλογικό Έργο» σημαίνει μια συλλογή συγγραφικών ή καλλιτεχνικών έργων όπως ανθολογία ή εγκυκλοπαίδεια, ή δραματοποιήσεων, ηχητικών εκδόσεων (φωνογραφήματα) ή αναμεταδόσεων, ή άλλων έργων ή συλλογή έργων άλλων από τα αναφερόμενα στον όρο 1(ζ) της παρούσας Άδειας, ή συλλογή εκφράσεων της λαϊκής παράδοσης ή απλών γεγονότων και στοιχείων, η οποία συλλογή, με κριτήρια την επιλογή και διαρρύθμιση του περιεχομένου της, είναι πρωτότυπη. Στην έννοια του Συλλογικού Έργου συμπεριλαμβάνεται και το αντικείμενο της αδειοδότησης ως σύνολο σε μη τροποποιημένη μορφή, μαζί με ένα αριθμό άλλων συνεισφορών, που αποτελούν ξεχωριστά και ανεξάρτητα έργα καθ' αυτά, και συγκεντρώνονται σ' ένα συλλογικό σύνολο. Ένα έργο που αποτελεί Συλλογικό Έργο δεν θα θεωρείται Παράγωγο Έργο (όπως ορίζεται παραπάνω) για τους σκοπούς της παρούσας Άδειας.

γ.«Διανομή» σημαίνει τη διάθεση στο κοινό του πρωτότυπου αντικείμενου της αδειοδότησης ή αναπαραγωγών του αντικείμενου της αδειοδότησης ή τροποποιήσεών του, με οποιονδήποτε τρόπο, με πώληση ή οποιαδήποτε άλλη δικαιοπραξία διάθεσης δικαιωμάτων επ' αυτού.

δ.«Χορηγών την Άδεια» σημαίνει το ένα ή περισσότερα φυσικά, ή νομικά πρόσωπα τα οποία προσφέρουν το αντικείμενο της αδειοδότησης υπό τους όρους της παρούσας Άδειας.

ε.«Πρώτος Δημιουργός (Αρχικός Δικαιούχος)» σημαίνει, στην περίπτωση του συγγραφικού ή καλλιτεχνικού έργου, το ένα ή περισσότερα φυσικά, ή νομικά πρόσωπα—στην περίπτωση που το νομικό πρόσωπο έχει καταστεί δημιουργός κατά πλάσμα δικαίου—τα οποία δημιούργησαν το αντικείμενο της αδειοδότησης, ή στην περίπτωση που υφίσταται ανωνυμία ή ψευδωνυμία στη δημιουργία του αντικείμενου της αδειοδότησης, το πρόσωπο που σύμφωνα με το νόμο παρουσιάζει το αντικείμενο της αδειοδότησης στο κοινό.

στ.«Δικαιούχος Συγγενικών Δικαιωμάτων» σημαίνει (i) ο ηθοποιός, μουσικός, τραγουδιστής, χορωδός, χορευτής, καλλιτέχνης κουκλοθέατρου, καλλιτέχνης θεάτρου σκιών, καλλιτέχνης βαριεττέ, καλλιτέχνης τσίρκου, και οποιοσδήποτε άλλος καλλιτέχνης που στην περίπτωση καλλιτεχνικής παράστασης υποκρίνεται, τραγουδάει, αποδίδει, απαγγέλλει, υποδύεται, μεταφράζει ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο συμμετέχει σε παράσταση φιλολογικών ή καλλιτεχνικών έργων ή εκφράσεων της λαϊκής παράδοσης, (ii) στην περίπτωση εγγραφής ήχου (φωνογράφημα), ο παραγωγός, είτε φυσικό είτε νομικό πρόσωπο, με πρωτοβουλία και ευθύνη του οποίου ενεργείται η πρώτη ηχογράφηση, (iii) στην περίπτωση εγγραφής εικόνας ή εικόνας και ήχου (οπτικοακουστικό έργο) ο παραγωγός, είτε φυσικό είτε νομικό πρόσωπο, με πρωτοβουλία και ευθύνη του οποίου ενεργείται η πρώτη εγγραφή εικόνας με ή χωρίς ήχο, (iv) στην περίπτωση της αναμετάδοσης, το νομικό πρόσωπο που αναμεταδίδει.

ζ.«Αντικείμενο της αδειοδότησης» σημαίνει το πρωτότυπο πνευματικό συγγραφικό, καλλιτεχνικό ή επιστημονικό έργο, σε οποιαδήποτε μορφή ή υλικό φορέα και αν αποτυπωθεί, στις οποίες συμπεριλαμβάνονται και τα μέσα ψηφιακής αποτύπωσης, σύμφωνα με τους ορισμούς του Ελληνικού νόμου περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Για την εφαρμογή της Άδειας αυτής, το αντικείμενο της αδειοδότησης, ενδεικτικά και όχι περιοριστικά περιλαμβάνει κάθε καλλιτεχνική παράσταση, ηχητική εγγραφή (φωνογράφημα), εγγραφή εικόνας και ήχου (οπτικοακουστικό έργο), αναμετάδοση, ή βάση δεδομένων, σύμφωνα με τους ορισμούς του Ελληνικού νόμου περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Ο ορισμός «Αντικείμενο της αδειοδότησης» λαμβάνεται υπόψη στο βαθμό που η καλλιτεχνική παράσταση, ηχητική εγγραφή (φωνογράφημα), εγγραφή εικόνας και ήχου (οπτικοακουστικό έργο), αναμετάδοση, ή βάση δεδομένων προστατεύεται από το νόμο στη χώρα της δικαιοδοσίας Σας.

η.«Εσείς» σημαίνει το φυσικό ή νομικό πρόσωπο το οποίο ασκεί δικαιώματα βάσει της Άδειας αυτής, το οποίο δεν έχει προηγουμένως παραβιάσει τους όρους της παρούσας Άδειας σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης ή το οποίο ασκεί τα δικαιώματα βάσει της Άδειας αυτής με τη συναίνεση του δικαιούχου.

θ.«Παρουσίαση στο κοινό» σημαίνει η παρουσίαση του αντικείμενου της αδειοδότησης σε κύκλο ευρύτερο από το στενό κύκλο της οικογένειας και του άμεσου κοινωνικού περιβάλλοντος, που γίνεται με οποιονδήποτε τρόπο ή διαδικασία με χρήση ασύρματων ή ενσύρματων υλικών φορέων ή ψηφιακών μέσων και με τρόπο που καθένας από το κοινό μπορεί με ίδια μέσα να έχει πρόσβαση στο αντικείμενο της αδειοδότησης από τον τόπο που επιλέγει.

ι.«Αναπαραγωγή» σημαίνει η παραγωγή αντιγράφων, προσωρινών ή οριστικών, του αντικείμενου της αδειοδότησης με οποιονδήποτε τρόπο συμπεριλαμβανομένων των ηχητικών ή τηλεοπτικών εγγραφών και των εγγραφών του αντικείμενου της αδειοδότησης με σκοπό την παραγωγή ή/και αναπαραγωγή του επί ψηφιακών ή άλλων ηλεκτρονικών υλικών φορέων για τη διατήρησή του.

2. Νόμιμοι περιορισμοί (Exceptions)

Η Άδεια αυτή δεν θίγει με οποιονδήποτε τρόπο τους νόμιμους περιορισμούς του περιουσιακού δικαιώματος και το ηθικό δικαίωμα του δημιουργού βάσει του νόμου για την προστασία της πνευματικής ιδιοκτησίας ή άλλων νόμων.

3. Παροχή Άδειας.

Βάσει των όρων και προϋποθέσεων της Άδειας αυτής, ο Χορηγών την Άδεια με το παρόν ιδιωτικό συμφωνητικό Σας παρέχει μια παγκόσμια, χωρίς πληρωμή (πνευματικών ή συγγενικών) δικαιωμάτων, μη αποκλειστική, διαρκή άδεια να ασκείτε τα δικαιώματα στο αντικείμενο της αδειοδότησης όπως προσδιορίζεται παρακάτω:

α.Να αναπαράγετε το αντικείμενο της αδειοδότησης, να ενσωματώνετε το αντικείμενο της αδειοδότησης σε ένα ή περισσότερα Συλλογικά Έργα και να αναπαράγετε το αντικείμενο της αδειοδότησης που έχει ενσωματωθεί σε Συλλογικά Έργα.

β.Να διανέμετε αντίγραφα και παρουσιάζετε στο κοινό το αντικείμενο της αδειοδότησης, συμπεριλαμβανομένων και των υλικών ενσωματώσεων σε Συλλογικά Έργα.

γ.Να κάνετε οποιαδήποτε χρήση ουσιώδους μέρους των περιεχομένων βάσης δεδομένων, στην περίπτωση που το αντικείμενο της αδειοδότησης είναι βάση δεδομένων.

Τα ανωτέρω δικαιώματα μπορούν να ασκηθούν με όλα τα τεχνικά μέσα και σε όλους τους υλικούς φορείς ενσωμάτωσης αντικείμενου της αδειοδότησης. Τα ανωτέρω δικαιώματα περιλαμβάνουν το δικαίωμα να γίνονται αυτές οι μετατροπές οι οποίες είναι τεχνικά αναγκαίες για την άσκηση των δικαιωμάτων σε άλλα τεχνικά μέσα και υλικούς φορείς ενσωμάτωσης αντικείμενου της αδειοδότησης. Υπάρχει επιφύλαξη υπέρ του δικαιούχου για όλα τα δικαιώματα που δεν παρέχονται σαφώς από τον Χορηγούντα την Άδεια, όπως ενδεικτικά και όχι περιοριστικά αναφέρονται τα δικαιώματα της Ρήτρας 4(ε) και 4(στ).

Στην περίπτωση που ο Χορηγών την Άδεια είναι δικαιούχος του δικαιώματος ειδικής φύσης (sui generis) του κατασκευαστή βάσης δεδομένων σύμφωνα με τον Ελληνικό νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας, όπως αυτό ισχύει κατ' εφαρμογή στο Ελληνικό Δίκαιο της Οδηγίας 96/9/ΕΟΚ για τη νομική προστασία των βάσεων δεδομένων, ο Χορηγών την Άδεια παραιτείται αυτού του δικαιώματός του.

4. Περιορισμοί

Η παρεχόμενη άδεια βάσει της Ρήτρας 3 όπως προσδιορίζεται παραπάνω υπόκειται στους εξής περιορισμούς:

α.Μπορείτε να προβείτε σε διανομή, ή δημόσια εκτέλεση του αντικείμενου της αδειοδότησης μόνον βάσει των όρων της παρούσας Άδειας. Είστε υποχρεωμένοι να περιλάβετε ένα αντίγραφο αυτής της Άδειας ή το Κανονιστικό Αναγνωριστικό Πόρου (Uniform Resource Identifier) της Άδειας αυτής σε κάθε αντίγραφο του αντικείμενου της αδειοδότησης το οποίο διανέμετε, ή εκτελείτε δημοσίως. Δεν μπορείτε να επιβάλλετε όρους στο αντικείμενο της αδειοδότησης οι οποίοι περιορίζουν τους όρους της Άδειας ή την άσκηση από τον λήπτη του αντικείμενου της αδειοδότησης των δικαιωμάτων που παρέχονται σ' αυτόν υπό τους όρους της παρούσας Άδειας. Δεν μπορείτε να χορηγήσετε άδεια περαιτέρω εκμετάλλευσης του αντικείμενου της αδειοδότησης. Πρέπει να τηρείτε άθικτες όλες τις γνωστοποιήσεις που αφορούν την Άδεια αυτή και τους περιορισμούς της ευθύνης σε κάθε αντίγραφο του αντικείμενου της αδειοδότησης που διανέμετε ή παρουσιάζετε δημόσια. Σε κάθε διανομή ή δημόσια παρουσίαση του αντικείμενου της αδειοδότησης, δεν επιτρέπετε να κάνετε χρήση οποιουδήποτε τεχνολογικού μέτρου επί του αντικείμενου της αδειοδότησης που έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό της άσκησης από τον λήπτη του αντικείμενου της αδειοδότησης των δικαιωμάτων που παρέχονται σ' αυτόν υπό τους όρους της παρούσας Άδειας. Η παρούσα Ρήτρα 4(α) ισχύει για το αντικείμενο της αδειοδότησης που είναι ενσωματωμένο σε Συλλογικό Έργο, αλλά δεν απαιτείται το Συλλογικό Έργο ξεχωριστά από το ίδιο το αντικείμενο της αδειοδότησης να υπόκειται στους όρους της παρούσας Άδειας. Αν δημιουργείτε Συλλογικό Έργο, εφόσον γίνει γνωστοποίηση από τον Χορηγούντα την Άδεια, πρέπει, στο βαθμό που αυτό είναι δυνατόν, να αφαιρέσετε από το

Συλλογικό Έργο κάθε αναφορά σε δικαιούχο όπως αυτό απαιτείται από τη Ρήτρα 4(δ).

β.Δεν μπορείτε να ασκείτε δικαιώματα παρεχόμενα σε Σας βάσει της προαναφερόμενης Ρήτρας 3 κατά τρόπο που αποσκοπεί κυρίως σε εμπορική εκμετάλλευση ή στοχεύει σε ιδιωτική χρηματική ανταμοιβή. Η ανταλλαγή του αντικείμενου της αδειοδότησης με άλλα έργα προστατευμένα σύμφωνα με το νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας μέσω συστήματος ψηφιακού μοιράσματος/ανταλλαγής αρχείων ή άλλως δεν θα θεωρείται ότι αποσκοπεί ή οδηγεί σε εμπορικό πλεονέκτημα ή ιδιωτική χρηματική ανταμοιβή, υπό τον όρο ότι δεν υπάρχει πληρωμή χρηματικής αμοιβής σχετικά με την ανταλλαγή έργων προστατευμένων σύμφωνα με το νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας.

γ.Αν διανείμετε, ή παρουσιάζετε στο κοινό το αντικείμενο της αδειοδότησης ή το Συλλογικό Έργο, πρέπει, εφόσον δεν έχει υποβληθεί αίτημα σχετικό με τη Ρήτρα 4(α), να κρατήσετε άθικτες όλες τις πληροφορίες για το δικαιούχο πνευματικής ιδιοκτησίας και να παρέχετε, ανάλογα με το μέσον ή τα μέσα που χρησιμοποιείτε: (1) το όνομα (ή το ψευδώνυμο) του Πρώτου Δημιουργού (Αρχικού Δικαιούχου) ή του Δικαιούχου Συγγενικών δικαιωμάτων αν υπάρχει και/ή (2) αν ο Πρώτος Δημιουργός (Αρχικός Δικαιούχος) ή ο Δικαιούχος Συγγενικών δικαιωμάτων και/ή ο Χορηγών την Άδεια ορίσει, στους όρους χρήσης ή σε άλλο σχετικό μέσο, άλλον ή άλλους (π.χ. ένα ινστιτούτο, εκδότη, περιοδικό) αναφορικά με τις πληροφορίες για τα δικαιώματα πνευματικής ιδιοκτησίας όσον αφορά τον Χορηγούντα την Άδεια, το όνομα αυτού ή αυτών («Δικαιούχοι»). Επίσης, τον τίτλο του αντικείμενου της αδειοδότησης αν υπάρχει, και (3) στο βαθμό που αυτό είναι δυνατό, το Κανονιστικό Αναγνωριστικό Πόρου (Uniform Resource Identifier), αν υπάρχει, το οποίο ο Χορηγών την Άδεια προσδιορίζει συνδεόμενο με το αντικείμενο της αδειοδότησης, εκτός αν αυτό το Κανονιστικό Αναγνώρισης Πόρου (Uniform Resource Identifier) δεν αναφέρεται στις πληροφορίες για την πνευματική ιδιοκτησία ή στις πληροφορίες χορήγησης άδειας για το αντικείμενο της αδειοδότησης. Αυτή η αναφορά που απαιτείται σύμφωνα με τη Ρήτρα 4(δ) μπορεί να γίνει με οποιονδήποτε εύλογο τρόπο, υπό τον όρο, όμως, ότι στην περίπτωση Συλλογικού Έργου, κατ' ελάχιστη προϋπόθεση αυτή η αναφορά θα φαίνεται όπου εμφανίζεται οποιαδήποτε άλλη ανάλογη αναφορά δικαιούχου για συγγραφικό δικαίωμα και κατά τρόπο τουλάχιστον τόσο εμφανή όπως αυτή η άλλη ανάλογη αναφορά δικαιούχου για συγγραφικό δικαίωμα. Για την άρση κάθε αμφιβολίας, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις αναφορές που απαιτούνται από αυτή τη Ρήτρα για το σκοπό της πληροφόρησης περί το δικαιούχο πνευματικής ιδιοκτησίας όπως ορίζεται παραπάνω, και επιπλέον κατά την άσκηση των δικαιωμάτων Σας υπό τους όρους αυτής της Άδειας, δεν μπορείτε έμμεσα ή άμεσα να επικαλεστείτε ή εννοήσετε την ύπαρξη οποιασδήποτε σχέσης ή έγκρισης από τον Πρώτο Δημιουργό (Αρχικό Δικαιούχο) ή το Δικαιούχο Συγγενικών δικαιωμάτων, τον Χορηγούντα την Άδεια, ή το Δικαιούχο που αφορά Εσάς ή τις χρήσεις του αντικείμενου της αδειοδότησης από Εσάς, χωρίς ταυτόχρονα να την αποδεικνύετε με ξεχωριστή, έγγραφη άδεια του Πρώτου Δημιουργού (Αρχικού Δικαιούχου) ή του Δικαιούχου Συγγενικών δικαιωμάτων, του Χορηγούντα την Άδεια ή του Δικαιούχου.

δ.Προς άρση κάθε αμφιβολίας, οι περιορισμοί που αναφέρονται παραπάνω [4(α), 4(β), 4(γ)] δεν εφαρμόζονται σ' αυτά τα μέρη του αντικείμενου της αδειοδότησης που περιλαμβάνονται στον ορισμό «Αντικείμενο της αδειοδότησης» αυτής της Άδειας αποκλειστικά επειδή συνιστούν αντικείμενο του δικαιώματος ειδικής φύσης (sui generis) του κατασκευαστή βάσης δεδομένων σύμφωνα με τον Ελληνικό νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας κατ' εφαρμογή της Οδηγίας 96/9/ΕΟΚ.

ε.Προς άρση κάθε αμφιβολίας, γίνεται δεκτό ότι:

Υποχρεωτικές αδειοδοτήσεις μη δεκτικές παραίτησης: Στην περίπτωση υποχρεωτικών αδειοδοτήσεων στις οποίες δεν είναι δυνατή η παραίτηση (για παράδειγμα, αναφορικά με την είσπραξη αμοιβών για πνευματικά δικαιώματα) ο Χορηγών την Άδεια διατηρεί το δικαίωμα να εισπράττει τέτοιες αμοιβές είτε για εμπορική είτε για μη εμπορική χρήση του αντικειμένου της αδειοδότησης.

Φορείς Συλλογικής Διαχείρισης πνευματικών δικαιωμάτων: Ο Χορηγών την Άδεια παραιτείται από το δικαίωμα να εισπράττει (είτε ατομικά είτε μέσω Οργανισμού Συλλογικής Διαχείρισης πνευματικών δικαιωμάτων, στην περίπτωση που ο Χορηγών την Άδεια είναι μέλος τέτοιου φορέα) αμοιβές για πνευματικά δικαιώματα αναφορικά με μη εμπορικές χρήσεις του αντικειμένου της αδειοδότησης. Ο Χορηγών την Άδεια διατηρεί το δικαίωμα να εισπράττει (είτε ατομικά είτε μέσω Οργανισμού Συλλογικής Διαχείρισης πνευματικών δικαιωμάτων, στην περίπτωση που ο Χορηγών την Άδεια είναι μέλος τέτοιου φορέα) αμοιβές για πνευματικά δικαιώματα αναφορικά με εμπορικές χρήσεις του αντικειμένου της αδειοδότησης.

στ.Όλες οι εξουσίες του ηθικού δικαιώματος παραμένουν αναλλοίωτες στο βαθμό που προβλέπονται στον εφαρμοστέο νόμο και δεν είναι δεκτικές παραίτησης.

5. Δηλώσεις & Εγγυήσεις

ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΑΠΟΔΕΚΤΗΣ, ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗΣ, ΓΡΑΠΤΗΣ ΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΜΕΡΩΝ, ΚΑΙ ΣΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΟ ΒΑΘΜΟ ΑΠΟ ΤΟ ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΟ ΔΙΚΑΙΟ, Ο ΧΟΡΗΓΩΝ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΠΡΟΣΦΕΡΕΙ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΩΣ ΕΧΕΙ ΚΑΙ ΔΕΝ ΠΡΟΒΑΙΝΕΙ ΣΕ ΔΗΛΩΣΕΙΣ Η ΕΓΓΥΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΕΡΓΟ, ΣΑΦΕΙΣ, ΕΝΝΟΟΥΜΕΝΕΣ, ΘΕΣΜΙΚΕΣ Η ΑΛΛΕΣ, ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΧΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΤΙΚΑ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΟΝΤΑΙ ΟΙ ΕΓΓΥΗΣΕΙΣ ΤΙΤΛΟΥ, ΕΜΠΟΡΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑΣ, ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΕΝΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟ ΣΚΟΠΟ, ΜΗ-ΠΑΡΑΒΙΑΣΗΣ Η ΑΠΟΥΣΙΑΣ ΚΡΥΦΩΝ Η ΑΛΛΩΝ ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΩΝ, ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ Η ΑΠΟΥΣΙΑΣ ΛΑΘΩΝ, ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΙΜΩΝ Η ΟΧΙ. ΣΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΚΑΙΟΔΟΣΙΕΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ Ο ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΟΥΜΕΝΩΝ ΕΓΓΥΗΣΕΩΝ, ΑΥΤΟΣ Ο ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΗΝ ΕΧΕΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ Σ’ ΕΣΑΣ.

6. Περιορισμός ευθύνης

ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗΣ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗΣ ΡΥΘΜΙΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΙΣΧΥΟΝΤΑ ΝΟΜΟ, ΣΕ ΚΑΜΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ο ΧΟΡΗΓΩΝ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΔΕΝ ΘΑ ΕΥΘΥΝΕΤΑΙ ΕΝΑΝΤΙ ΣΑΣ ΒΑΣΕΙ ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΝΟΜΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΟΥ ΑΦΟΡΑ ΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ, ΠΡΟΚΑΛΟΥΜΕΝΕΣ, ΕΠΙΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΩΣ ΠΟΙΝΗ Η ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΙΣΜΟ ΖΗΜΙΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ Η ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ, ΑΚΟΜΗ ΚΑΙ ΑΝ Ο ΧΟΡΗΓΩΝ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΕΙΝΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΜΕΝΟΣ ΓΙΑ ΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΟΚΛΗΣΗΣ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ.

7. Καταγγελία

α.Αυτή η Άδεια και τα παρεχόμενα μ’ αυτήν δικαιώματα καταγγέλλονται αυτόματα με την παράβαση εκ μέρους Σας των όρων της Άδειας αυτής. Ωστόσο, τα φυσικά ή νομικά πρόσωπα τα οποία έχουν γίνει αποδέκτες Συλλογικών Έργων από Εσάς βάσει της Άδειας αυτής, δεν θα υφίστανται τις συνέπειες της καταγγελίας της άδειάς τους, υπό τον όρο ότι αυτά τα φυσικά ή νομικά πρόσωπα θα συμμορφώνονται πλήρως με αυτές τις άδειες. Οι Ρήτρες 1, 2, 5, 6, 7 και 8 θα παραμείνουν σε ισχύ μετά από κάθε καταγγελία της Άδειας αυτής.

β.Βάσει των ανωτέρω όρων και προϋποθέσεων, η παρούσα Άδεια είναι διαρκής (για όλη τη διάρκεια της ισχύος προστασίας των πνευματικών δικαιωμάτων ή συγγενικών δικαιωμάτων επί του αντικειμένου της αδειοδότησης). Άσχετα με τα ανωτέρω, ο Χορηγών την Άδεια διατηρεί το δικαίωμα να παρέχει το αντικείμενο της αδειοδότησης υπό διαφορετικούς όρους (άδειας) ή να παύσει τη διανομή του αντικείμενου της αδειοδότησης οποτεδήποτε, υπό την προϋπόθεση, ωστόσο, ότι αυτή η επιλογή δεν θα χρησιμεύει στο να καταγγέλλει την Άδεια αυτή (ή άλλη άδεια η οποία χορηγήθηκε ή απαιτείται να χορηγηθεί βάσει των όρων της παρούσας Άδειας) και η Άδεια αυτή θα συνεχίσει να είναι σε πλήρη ισχύ εκτός εάν καταγγελθεί όπως αναφέρεται ανωτέρω.

8. Γενικά

α.Κάθε φορά που διανέμετε ή παρουσιάζετε στο κοινό το αντικείμενο της αδειοδότησης ή ένα Συλλογικό Έργο, ο Χορηγών την Άδεια προσφέρει στον αποδέκτη μια άδεια στο αντικείμενο της αδειοδότησης με τους ίδιους όρους και προϋποθέσεις όπως η άδεια ή οποία χορηγήθηκε σε Εσάς βάσει της παρούσας Άδειας.

β.Αν μια διάταξη της παρούσας Άδειας είναι ανίσχυρη ή δεν είναι δυνατόν να επιβληθεί σύμφωνα με τον ισχύοντα νόμο, αυτό δεν θα θίγει την ισχύ ή την δυνατότητα να επιβληθούν οι υπόλοιποι όροι της Άδειας αυτής, και χωρίς άλλη ενέργεια από τους συμβαλλομένους στο παρόν συμφωνητικό, η διάταξη αυτή θα ανασυνταχθεί στο ελάχιστο αναγκαίο μέτρο για να καταστεί ισχυρή και επιβαλλόμενη μεταξύ των συμβαλλόμενων μερών.

γ.Κανένας όρος ή διάταξη της παρούσας Άδειας δεν θα θεωρείται ότι έχει γίνει αντικείμενο παραίτησης από δικαίωμα και καμία παραβίαση δικαιώματος δεν θα θεωρείται ότι έχει γίνει αποδεκτή, εκτός αν αυτή η παραίτηση από δικαίωμα ή η συγκατάθεση έχουν γίνει γραπτώς και έχουν υπογραφεί από το συμβαλλόμενο μέρος το οποίο χρεώνεται αυτήν την παραίτηση ή συγκατάθεση.

δ.Η Άδεια αυτή περιέχει το κείμενο της συνολικής συμφωνίας μεταξύ των συμβαλλομένων μερών σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης για το οποίο χορηγείται άδεια. Δεν υπάρχουν συμφωνίες ή υποσχέσεις σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης που να μην ορίζονται στο παρόν. Ο Χορηγών την Άδεια δεν θα δεσμεύεται από πρόσθετες ρήτρες ή όρους που μπορεί να εμφανισθούν σε οποιαδήποτε επικοινωνία μαζί Σας. Η Άδεια αυτή δεν μπορεί να τροποποιηθεί χωρίς αμοιβαία γραπτή συγκατάθεση του Χορηγούντος την Άδεια και Εσάς.

Σημείωμα για τον οργανισμό Creative Commons Corporation

Το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation δεν είναι συμβαλλόμενο στην παρούσα Άδεια και δεν παρέχει καμία εγγύηση σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης. Το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation δεν ευθύνεται απέναντί Σας ή απέναντι σε άλλο συμβαλλόμενο βάσει οποιουδήποτε νομικού συλλογισμού για ζημίες, στις οποίες ενδεικτικά και όχι περιοριστικά αναφέρονται οποιεσδήποτε γενικές, ειδικές, τυχαίες ή μη ζημίες που μπορεί να σχετίζονται από την άδεια αυτή. Ανεξάρτητα από τις ανωτέρω δύο (2) διατυπώσεις, αν το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation σαφώς ταυτίζεται με τον Χορηγούντα την Άδεια, θα έχει όλα τα δικαιώματα και υποχρεώσεις του Χορηγούντος την Άδεια.

Κανένας συμβαλλόμενος δεν θα χρησιμοποιεί το εμπορικό σήμα «Creative Commons» χωρίς την προηγούμενη γραπτή συγκατάθεση του νομικού προσώπου Creative Commons Corporation, εκτός αν ο σκοπός της χρήσης είναι να δηλωθεί στο κοινό ότι το αντικείμενο της αδειοδότησης διατίθεται με την άδεια CCPL. Οποιαδήποτε επιτρεπόμενη χρήση του σήματος «Creative Commons» θα είναι σύμφωνη με τις κατευθυντήριες οδηγίες χρήσης εμπορικού σήματος του νομικού προσώπου Creative Commons Corporation όπως θα δημοσιεύεται στο δικό του δικτυακό τόπο ή άλλως όπως θα διατίθενται εκάστοτε κατόπιν αιτήσεως. Προς άρση αμφιβολιών, ο εν λόγω περιορισμός χρήσης του εμπορικού σήματος δεν αποτελεί περιεχόμενο αυτής της Άδειας.

Μπορείτε να επικοινωνήσετε με το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation στη διαδικτυακή διεύθυνση http://creativecommons.org/.