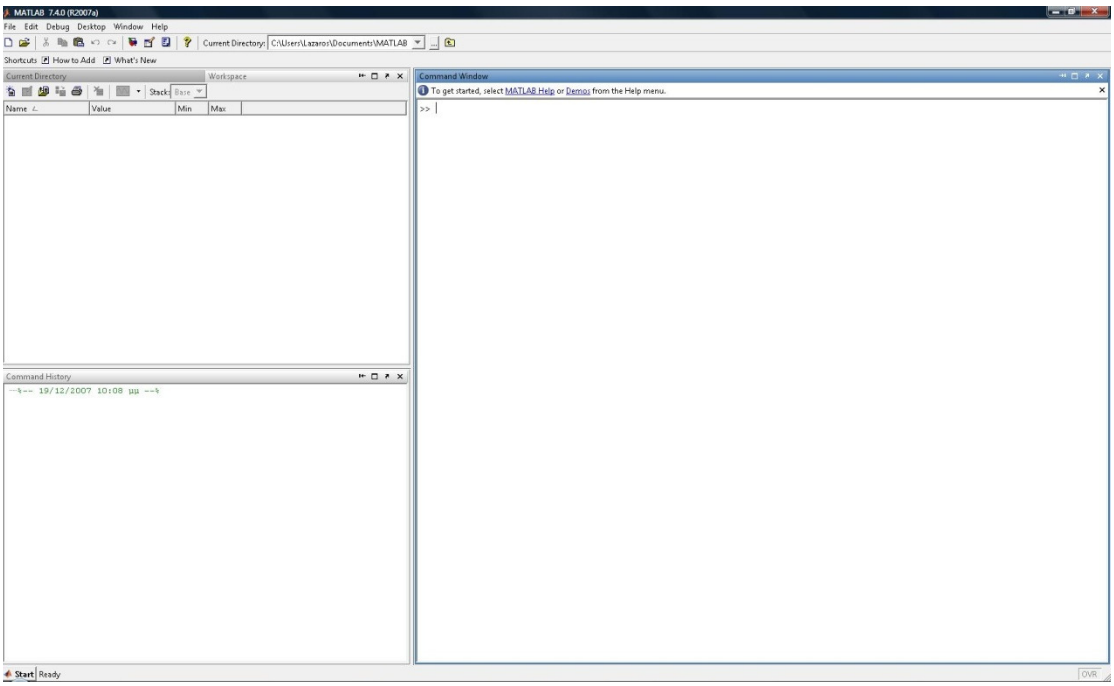
1ο Εργαστήριο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB

Η γλώσσα προγραμματισμού MATLAB (MATrix LABoratory) είναι δομημένη πάνω στην έννοια των πινάκων και χρησιμεύει στην επίλυση πολύπλοκων μαθηματικών μοντέλων εύκολα και γρήγορα. Η ευρεία χρήση της MATLAB οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην επεκτασιμότητα της μέσω των διάφορων εργαλειοθηκών, κάθε μια από τις οποίες περιέχει έναν αριθμό συναρτήσεων για ένα συγκεκριμένο αντικείμενο. Στόχος του πρώτου εργαστηρίου είναι η εξοικείωση του σπουδαστή με το περιβάλλον του MATLAB και την χρήση βασικών εντολών όπως ο ορισμός μεταβλητών και η εκτέλεση μαθηματικών πράξεων.

Αφού τρέξουμε την εφαρμογή θα δούμε το περιβάλλον του προγράμματος το οποίο αποτελείται από το Command Window(παράθυρο εντολών), το Workspace(*χώρος εργασίας*) και το Command History(ιστορικό εντολών) όπως φαίνεται παρακάτω :



Στο Workspace αποθηκεύονται οι οριζόμενες στο παράθυρο εντολών μεταβλητές, ενώ στο Command History καταγράφονται όλες οι εντολές που χρησιμοποιήσαμε. Οι μεταβλητές αυτές είναι διαθέσιμες μέχρι την έξοδο από το MATLAB, ενώ είναι δυνατή η αποθήκευση τους στο δίσκο και η ανάκτηση τους σε επόμενη εκκίνηση του προγράμματος.

Στα πλαίσια των εργαστηριακών ασκήσεων του μαθήματος είναι απαραίτητη η χρήση ορισμένων βασικών συναρτήσεων και τελεστών του MATLAB, καθώς και η χρήση ορισμένων συναρτήσεων της εργαλειοθήκης συστημάτων ελέγχου (control systems toolbox).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Το Matlab δουλεύει αποκλειστικά με ένα αντικείμενο, τον πίνακα. Η δήλωση μιας μεταβλητής στο παράθυρο εντολών γίνεται ταυτόχρονα με την απόδοση τιμής σε αυτήν. Για παράδειγμα, ο ορισμός μιας μεταβλητής m στην οποία αποδίδουμε την τιμή 7 γίνεται με την εντολή

» m=7

m =
7

Το MATLAB στην περίπτωση αυτή έχει ορίσει έναν πίνακα μίας γραμμής και μίας στήλης(1x1). Αν δεν επιθυμούμε να εμφανίζεται το αποτέλεσμα της εκτέλεσης μιας εντολής, βάζουμε στο τέλος ένα ελληνικό ερωτηματικό:

» M=10;

Στο παράθυρο εργασίας θα παρατηρήσατε ότι έχουν δημιουργηθεί δύο μεταβλητές M και m, δηλαδή γίνεται διάκριση πεζών-κεφαλαίων στα ονόματα μεταβλητών.

Για να ορίσουμε έναν πίνακα γράφουμε μέσα σε αγκύλες [ ] τα στοιχεία του. Η κάθε στήλη χωρίζεται από την άλλη με κενό ή κόμμα (,), ενώ κάθε γραμμή με ερωτηματικό (;) ή Enter. Για να προσπελάσουμε έναν πίνακα, δηλώνουμε μέσα σε παρένθεση τους δείκτες του (γραμμή , στήλη).

Για παράδειγμα αν θέλουμε να εισάγουμε στο MATLAB τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

και να βρούμε το στοιχείο στην δεύτερη γραμμή και δεύτερη στήλη γράφουμε :

» A= [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9] {πίνακας 3 x 3}

A =

1 2 3

4 5 6

7 8 9

» A(2,2)

ans = 5

ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΕΙΚΤΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

n = length(t1)	Επιστρέφει το μήκος του διανύσματος t1 ή για πίνακα τη μέγιστη διάστασή του.
[x,y] = size(A)	Εκχωρεί στο x τις γραμμές του πίνακα A και στο y τις στήλες του A.
A(3,2)	Επιστρέφει το στοιχείο που ανήκει στην τρίτη γραμμή και δεύτερη στήλη.
A(2,4) = 7	Θέτει ως τιμή του στοιχείου 2,4 την τιμή 7 (τα υπόλοιπα στοιχεία συμπληρώνονται με μηδενικά).
B = [3:6, 1:4]	Δημιουργεί τον πίνακα [3 4 5 6 1 2 3 4].
B = [3:6; 1:4]	Δημιουργεί τον πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.
B(2,:)	Επιστρέφει ως διάνυσμα γραμμή τη 2η γραμμή του B.
B(:,3)	Επιστρέφει ως διάνυσμα στήλη τη 3η στήλη του B.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΕΙΔΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

A = rand(2,4)	Σχηματίζει έναν πίνακα με 2 γραμμές και 4 στήλες και στοιχεία τυχαίας πραγματικής τιμής από το 0 έως και το 1.
A = rand(3)	Σχηματίζει έναν τετραγωνικό πίνακα με διάσταση 3 και τυχαία στοιχεία.
A = zeros(2,4)	Σχηματίζει έναν πίνακα με 2 γραμμές και 4 και μηδενικά στοιχεία.
A = zeros(3)	Σχηματίζει έναν τετραγωνικό πίνακα με διάσταση 3 και μηδενικά στοιχεία.
A = ones(2,4)	Σχηματίζει έναν πίνακα με 2 γραμμές και 4 και μοναδιαία στοιχεία.
A = ones(3)	Σχηματίζει έναν τετραγωνικό πίνακα με διάσταση 3 και μοναδιαία στοιχεία.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Η εντολή ***x=(a:s:b)*** (ή ***x=a:s:b*** ή ***x=[a:s:b]***) κατασκευάζει γραμμικά διαστήματα, δηλαδή πίνακες-γραμμές με πρώτο στοιχείο το *a,* τελευταίο το *b*, και βήμα *s*. Για παράδειγμα :

» x=3:9 {πίνακας ισαπεχόντων τιμών με βήμα 1 στο διάστημα [3, 9]}
x =
3 4 5 6 7 9

» y=56:3:80 {πίνακας ισαπεχόντων τιμών με βήμα 3 στο διάστημα [56, 80] }
y =
56 59 62 65 68 71 74 77 80

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

C = A+B	Επιστρέφει το άθροισμα των A και B, που έχουν κοινές διαστάσεις.
*C = A*B*	Εκτελεί το γινόμενο του A(m x n) επί τον B(n x t) και το εκχωρεί στον C(m x t).

*C = A.*B*	Για τους πίνακες A και B, που έχουν κοινές διαστάσεις, δημιουργεί πίνακα C του οποίου κάθε στοιχείο ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων των A, B.
C = A./B	Παρόμοια με πριν για την πράξη της διαίρεσης.
C = A^3	Υψώνει τα στοιχεία του πίνακα A στην τρίτη δύναμη (ισχύει για τετραγωνικό πίνακα μόνο).
C = A.^3	Δημιουργεί τον πίνακα C ίδιων διαστάσεων με τον A και κάθε στοιχείο του ισούται με την 3η δύναμη του αντίστοιχου του A.
C= A.^B	Για τους πίνακες A και B, που έχουν κοινές διαστάσεις, δημιουργεί πίνακα C του οποίου κάθε στοιχείο ισούται με το αντίστοιχο του A υψωμένο στο αντίστοιχο του B.
A^(-1)	Επιστρέφει τον αντίστροφο πίνακα του A.
inv(A)	Επίσης επιστρέφει τον αντίστροφο πίνακα του A.
det(A)	Επιστρέφει την ορίζουσα του πίνακα A.
abs(A)	Επιστρέφει τις απόλυτες τιμές των στοιχείων του πίνακα A.
C = A\B	Αντίστροφη διαίρεση: εκτελεί την πράξη inv(A)*B, όπου ο B δεν πρέπει απαραίτητα να είναι τετραγωνικός πίνακας, αρκεί όμως το πλήθος των γραμμών του να είναι ίσος με τη διάσταση του τετραγωνικού A. Η αντίστροφη διαίρεση είναι χρήσιμη για την επίλυση του συστήματος .
max(A)	Αν το A είναι πίνακας, επιστρέφει το διάνυσμα-γραμμή του οποίου κάθε στοιχείο ισούται με το μέγιστο από τα στοιχεία της στήλης που ανήκει. Αν το A είναι διάνυσμα (στήλη ή γραμμή), επιστρέφει το μέγιστο αριθμό.
min(A)	Ίδια σύνταξη με το max, αλλά επιστρέφει τα ελάχιστα.
sum(A)	Αν το A είναι πίνακας, επιστρέφει το διάνυσμα-γραμμή του οποίου κάθε στοιχείο ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της στήλης που ανήκει. Αν το A είναι διάνυσμα (στήλη ή γραμμή), επιστρέφει το άθροισμα όλων των στοιχείων.
prod(A)	Ίδια σύνταξη με το sum, αλλά επιστρέφει τα γινόμενα.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Τα πολυώνυμα αναπαρίστανται σαν διανύσματα-γραμμές που περιέχουν τους συντελεστές κατά φθίνουσα διάταξη. Οι μηδενικοί όροι πρέπει προφανώς να λαμβάνονται υπ' όψη, γράφοντας 0 στις αντίστοιχες θέσεις. Π.χ. το $p(x)=2x^3 + 5x - 6$ δίνεται σαν p=[2 0 5 -6]. Οι πράξεις των πολυωνύμων υλοποιούνται ως εξής:

conv(p,q)	Πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων
[q,r]=deconv(a,b)	Διαίρεση δύο πολυωνύμων όπου q είναι το πηλίκο και r το υπόλοιπο της διαίρεσης.
r=roots(p)	Επιστρέφει τις ρίζες του πολυωνύμου p στο διάνυσμα-στήλη r.
p=poly(r)	Κατασκευάζει το πολυώνυμο p από τις ρίζες του διανύσματος-στήλη r.
polyder(p)	Επιστρέφει την παράγωγο του πολυωνύμου p.

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Εντολή PLOT

plot (x1 , y1 , options1, x2 , y2 , options2 ....,xn , yn , optionsn)

Η **plot** σχεδιάζει τη γραφική παράσταση μιας ή περισσότερων συναρτήσεων με τη βοήθεια πινάκων στους οποίους αποθηκεύουμε διακριτές τιμές. Στην μορφή αυτή της **plot** σχεδιάζουμε το y συναρτήσει του xi i=1..n, πάνω στους ίδιους άξονες. Το yi πρέπει να είναι διάνυσμα ή πίνακας της ίδιας διάστασης με το xi (οι yi , xi μπορεί να είναι απλές μεταβλητές, οπότε η γραφική παράσταση θα είναι ένα σημείο). Με τις επιλογές *options* καθορίζουμε το χρώμα και το σύμβολο σχεδίασης της γραφικής παράστασης. Η μορφή των επιλογών είναι: **'**cs**'** , όπου c το πρώτο γράμμα του χρώματος, π.χ. r για το red, g για το green, b για το blue, k για το black κ.τ.λ., και s για το σύμβολο σχεδίασης, π.χ. 'o', '+', 'x', '∗', '-' κ.λ.π.

Παράδειγμα:

»x = 0:0.1:6; { Ορισμός του x σε μορφή διαστήματος. Το 0.1 είναι το βήμα }

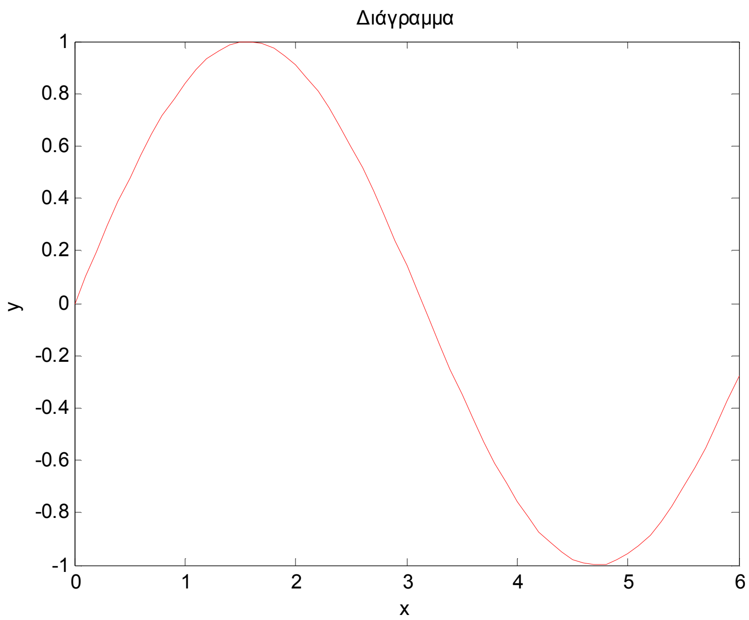
»y = sin(x);

»plot(x, y, 'r')

»title(`Διάγραμμα`)

»xlabel(`x`)

»ylabel(`y`)



<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Δημιουργείστε δύο πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 3 \end{bmatrix}$.

   Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

   a) Άθροισμα, αφαίρεση, γινόμενο, διαίρεση

   b) $AB^{-1},\ A^{-1}B,\ |A^{-1}|BA, |B|B^{-1}A$

2. Έστω ότι έχουμε δύο πολυώνυμα :

   $p(x) = 3x^4 + 5x^2 - x - 8,\ q(x) = 2x^2 - x + 3$

   Να βρεθούν :

   a) Οι ρίζες και οι παράγωγοι των πολυωνύμων.

   b) Οι ρίζες και οι παράγωγοι του αθροίσματος και του γινομένου τους.

3. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \cos(2x) + \sin^2(x) + 5$ στο διάστημα (-3,4), με τίτλο γραφήματος ‘Συνάρτηση’ και τις αντίστοιχες ονομασίες για τους άξονες.

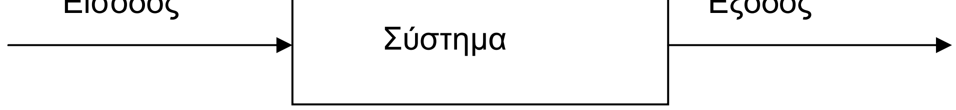
2ο Εργαστήριο

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Τις έννοιες ενός **σήματος** και ενός **συστήματος** τις συναντάμε σε πολλούς τομείς των τεχνολογικών και εφαρμοσμένων επιστημών. Στο εργαστήριο αυτό θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε και να περιγράψουμε αναλυτικά τις δύο αυτές βασικές έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση του αντικειμένου της μαθηματικής θεωρίας των συστημάτων.

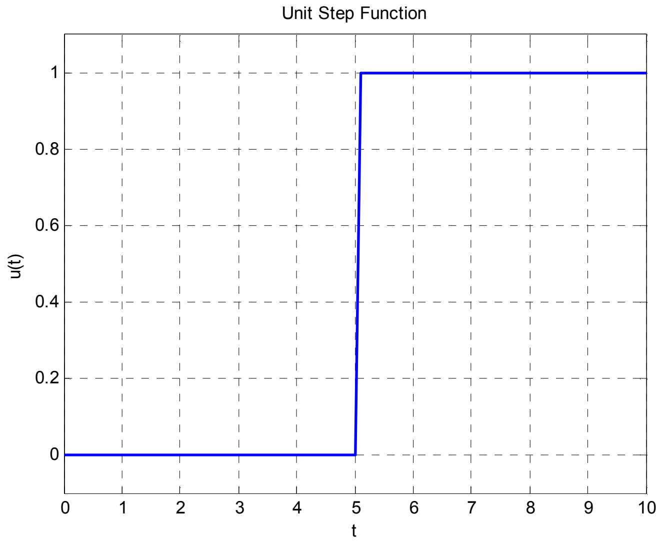
Το ***σήμα*** αποτελεί μία μαθηματική συνάρτηση μίας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών (μία από τις οποίες είναι υποχρεωτικά ο χρόνος) και τυπικά περιέχει πληροφορίες για τη χρονική εξέλιξη μιας ποσότητας η οποία περιγράφει ένα φαινόμενο ή μία διαδικασία.

Με τον όρο ***σύστημα*** εννοούμε ένα μέρος του φυσικού κόσμου το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων τα οποία λειτουργούν συγχρόνως κατά προδιαγεγραμμένο τρόπο έτσι ώστε να επιτυγχάνεται κάποιος στόχος. Ένα σύστημα επικοινωνεί με το περιβάλλον μέσω σημάτων. Τα σήματα που δέχεται ένα σύστημα ονομάζονται διεγέρσεις ή είσοδοι και τα σήματα που παράγει ένα σύστημα λόγω των διεγέρσεων και των μη μηδενικών αρχικών συνθηκών ονομάζονται αποκρίσεις ή έξοδοι.



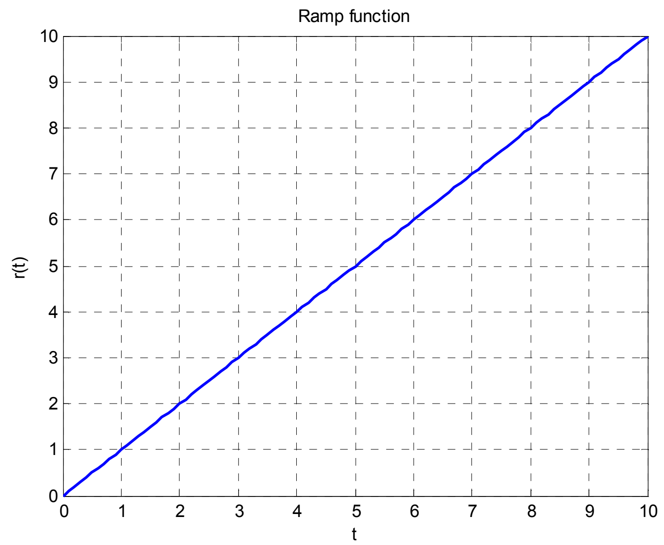
Βασικά σήματα

Μοναδιαία συνάρτηση βαθμίδας (unit step function):



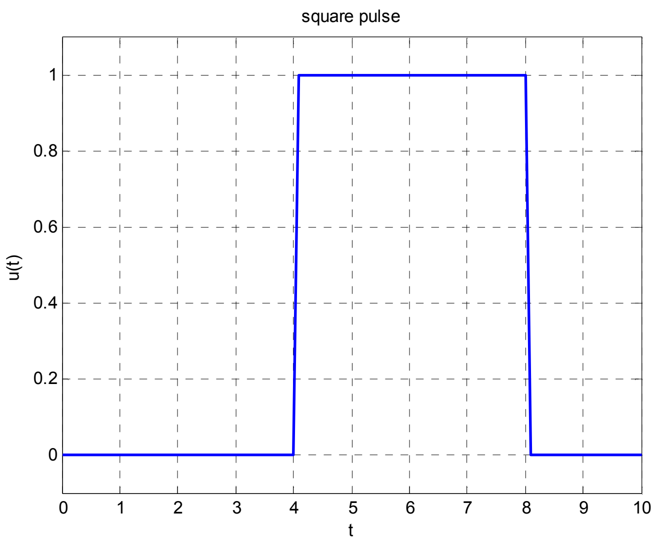

```
t=[0:0.1:10];
u=[zeros(1,51),ones(1,50)];
plot(t,u,'Linewidth',2)
title('Unit Step Function')
ylim([-0.1,1.1])
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
grid('on')
```

Μοναδιαία συνάρτηση ράμπας (Ramp function):



```
t=[0:0.1:10];
u=[ones(1,101)];
r=u.*t;
plot(t,r,'Linewidth',2)
title('Ramp function');
xlabel('t');
ylabel('r(t)');
grid('on');
```

Τετραγωνικός Παλμός (square pulse):

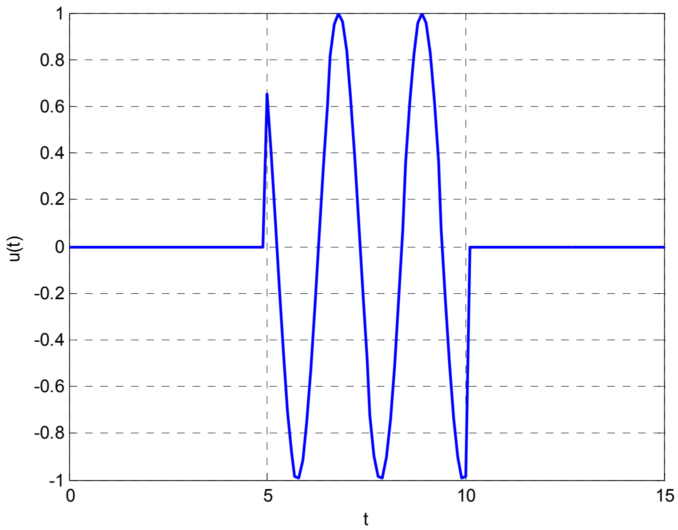



```
t=[0:0.1:10];
u=[zeros(1,41),ones(1,40),zeros(1,20)];
plot(t,u,'Linewidth',2)
ylim([-0.1,1.1]);
title('square pulse');
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
grid('on');
```

Ειδικοί τύποι σημάτων

a. Για να απομονώσουμε μία συνάρτηση σε ένα χρονικό διάστημα μηδενίζοντας τις υπόλοιπες τιμές της μπορούμε να ακολουθήσουμε ένα από τα παρακάτω σύνολα εντολών:

Π.χ. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης:



1^{ος} τρόπος:

```
t=[0:0.1:15];
r=[5:0.1:10];
u=[zeros(1,50),sin(3*r),zeros(1,50)];
plot(t,u,'Linewidth',2)
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
grid('on');
```

2^{ος} τρόπος:

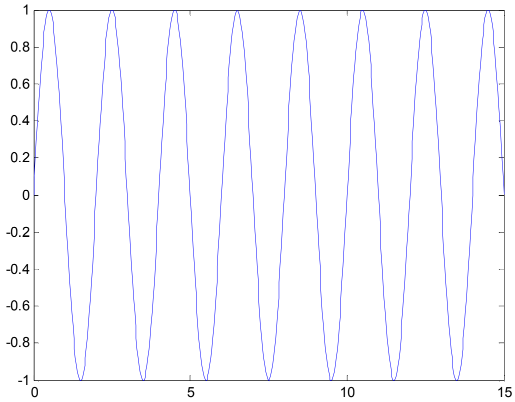
```
t=[0:0.1:15];
u=[zeros(1,50),ones(1,50),zeros(1,51)];
s=sin(3*t).*u;
plot(t,s,'Linewidth',2)
xlabel('t');
ylabel('s(t)');
grid('on');
```

b. Εντολή gensig

Η εντολή gensig παράγει συγκεκριμένου τύπου σήματα, όπως ημίτονο και τετραγωνικό παλμό. Συντάσσεται ως εξής:
[U,T]=gensig('Τύπος συνάρτησης', περίοδος, διάστημα)
Τύπος συνάρτησης: 'sin' ή 'square' ή 'pulse'

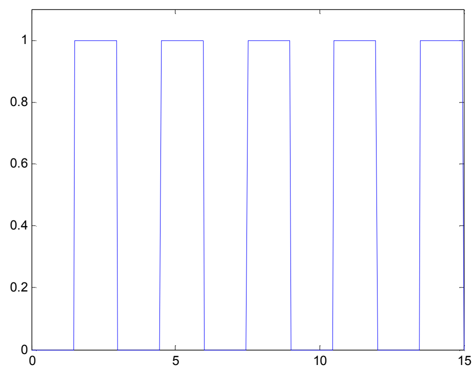
Παραδείγματα:

1.




```
[U,T]=gensig('sin',2,15);
plot(T,U)
```

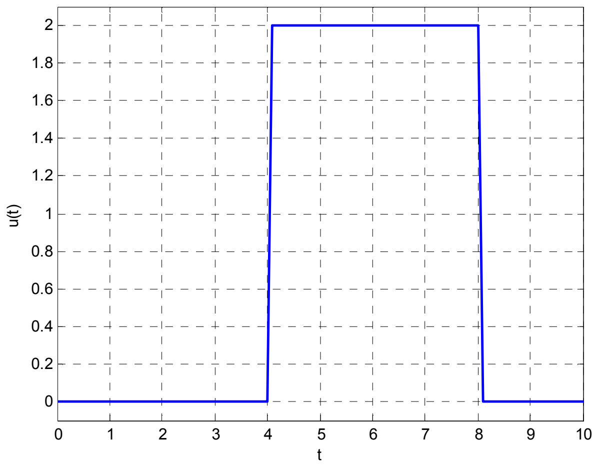
2.



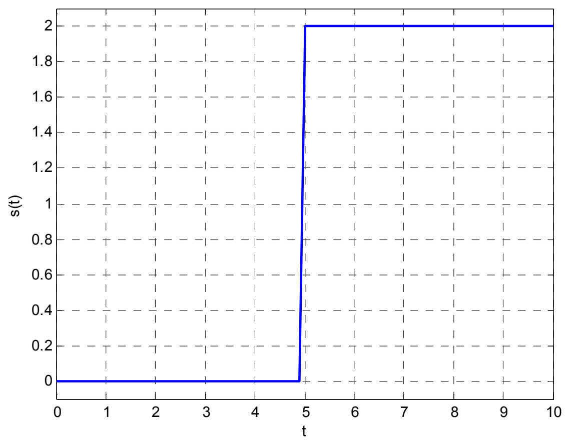

```
[U,T]=gensig('square',3,15);
plot(T,U)
ylim([0,1.1]);
```

Ασκήσεις:

1. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης:

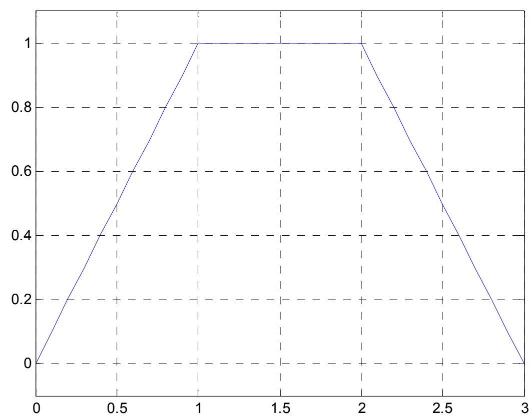


2. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

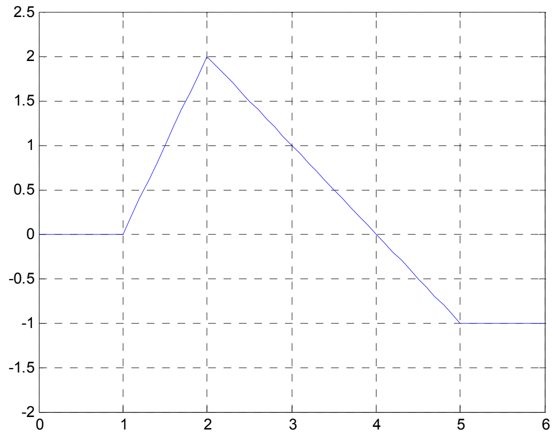


3. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t) = e^{-t}\sin(3t)$.

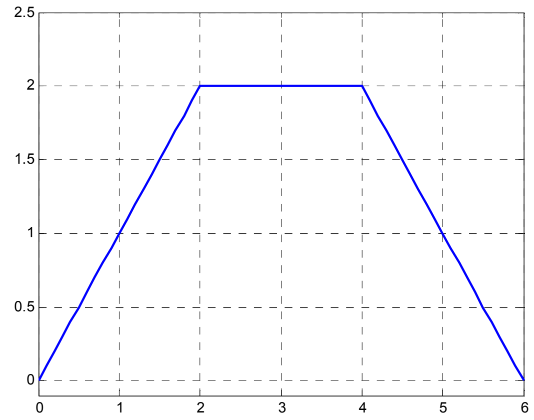
4. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



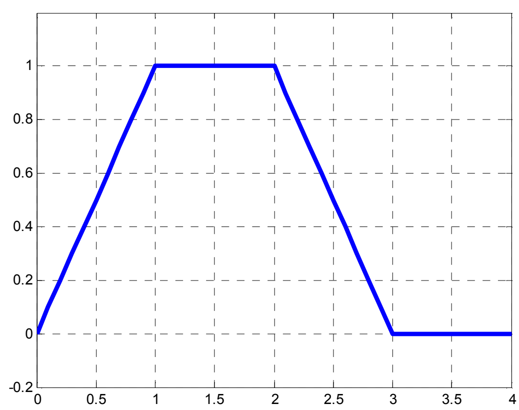
5. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



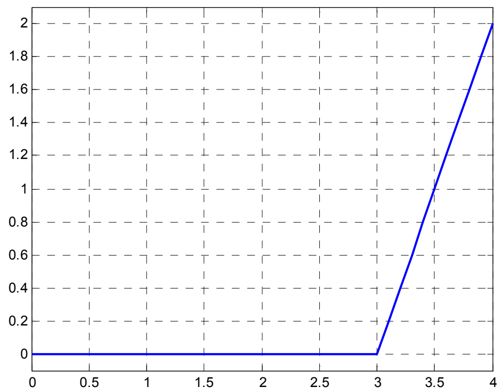
6. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



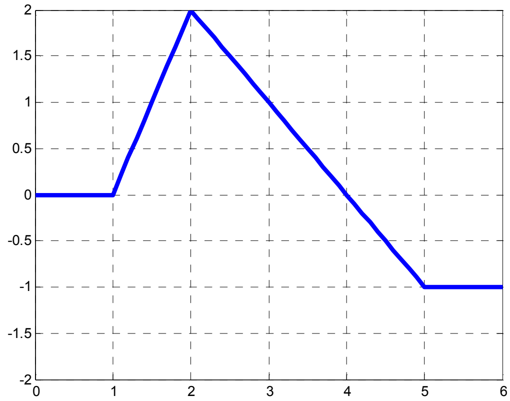
7. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



8. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



9. Να οριστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

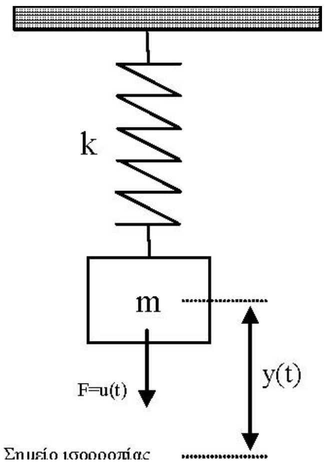


3ο Εργαστήριο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ο σχεδιασμός και η ανάλυση των συστημάτων ελέγχου βασίζεται σε μαθηματικά μοντέλα σύνθετων φυσικών συστημάτων. Τα μαθηματικά μοντέλα, τα οποία προκύπτουν από τους φυσικούς νόμους, περιγράφονται γενικά από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Πολλά φυσικά συστήματα όμως, συμπεριφέρονται γραμμικά γύρω από ένα σημείο λειτουργίας και έτσι είναι δυνατό να τα προσεγγίσουμε γραμμικά.

Έστω ένα ελατήριο με μία μάζα κρεμασμένη στο ένα άκρο του όπως στο παρακάτω σχήμα:



όπου k είναι ο συντελεστής σκληρότητας του ελατηρίου, m η μάζα του ελατηρίου, y(t) η απόσταση του κέντρου βάρους της μάζας από το σημείο ισορροπίας της και u(t) η κάθετη δύναμη την οποία εφαρμόζουμε στη μάζα.

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι η:

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = u(t),$$

όπου b μια σταθερά που εξαρτάται από την αντίσταση του αέρα. Ποια είναι η ελεύθερη απόκριση του συστήματος όταν την χρονική στιγμή 0 το σώμα βρίσκεται στην θέση y(0) = 1 και έχει ταχύτητα y΄(0) = 2; Δίνεται ότι m = 10, k = 5, b = 2.

Η λύση με την βοήθεια του Matlab επιτυγχάνεται με την εντολή :

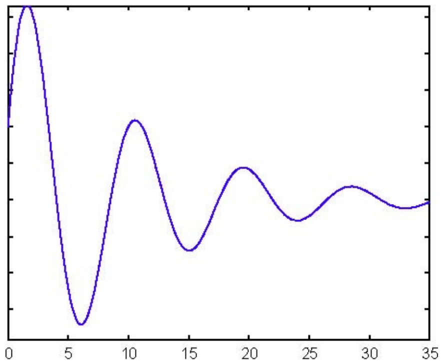
```
>>sol=dsolve('10*D2y+2*Dy+5*y=0')
```

Για να βρούμε τις σταθερές C1 και C2 θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τις αρχικές συνθήκες!!!

```
>>sol=dsolve('10*D2y+2*Dy+5*y=0','y(0)=1','Dy(0)=2')
>>t=0:0.01:100;
>>y=subs(sol)
>>plot(t,y)
```

Ένας άλλος τρόπος για την γραφική απεικόνιση του αποτελέσματος είναι μέσω της εντολής:

```
>>ezplot(sol,[0 , 35])
```



Τι θα πρέπει να κάνουμε για να σχεδιάσουμε την έξοδο του συστήματος αν για είσοδο έχουμε την σταθερή τιμή 5; Τι παρατηρείτε;

Ασκήσεις

1. Με τη βοήθεια της εντολής subplot να γίνει η γραφική παράσταση της εξόδου του συστήματος (μάζα – ελατήριο) που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = u(t),$$

σε ένα παράθυρο 3Χ1, θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδέν και με αρχικές συνθήκες:

a. y(0)=0, y΄(0)=0
b. y(0)=0, y΄(0)=1
c. y(0)=0, y΄(0)=-1

Δίνεται ότι m = 10, k = 5, b = 2.

Για καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις να βρεθεί σε ποια θέση ισορροπεί το ελατήριο, σε πόσο χρονικό διάστημα και ποια η μέγιστη απόστασή του από τη θέση ισορροπίας.

2. Με τη βοήθεια της εντολής subplot να γίνει η γραφική παράσταση της εξόδου του συστήματος (μάζα – ελατήριο) που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = u(t),$$

σε ένα παράθυρο 2Χ1 , θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδέν και με αρχικές συνθήκες y(0)=0, y΄(0)=1 για:

a. k = 5
b. k=15

Δίνεται ότι m = 10, b = 2. Τι παρατηρείτε;

3. Να γίνει η γραφική παράσταση της εξόδου του συστήματος (μάζα – ελατήριο) που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$my''(t)+by'(t)+ky(t)=u(t),$$

για είσοδο sin(t) και μηδενικές αρχικές συνθήκες.
Δίνεται ότι m = 10, k = 5, b = 2. Που ισορροπεί το σύστημα;

4. Να γίνει η γραφική παράσταση της εξόδου του συστήματος (μάζα – ελατήριο) που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$my''(t)+by'(t)+ky(t)=u(t),$$

για είσοδο $\sin(t)\cdot e^{-2t}$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.
Δίνεται ότι m = 10, k = 5, b = 2. Που ισορροπεί το σύστημα;

4ο Εργαστήριο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Έστω μια διαφορική εξίσωση της γενικής μορφής :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + ... + b_0 u(t)$$

Συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που αντιστοιχεί στην διαφορική εξίσωση ονομάζεται ο μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής εξίσωσης που δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μας δίνει τον λόγο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου και ορίζεται για μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα

Δίνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση :

$$5y''(t) + 3y'(t) + 7y(t) = 3u'(t) + 2u(t)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και να εισαχθεί στο Matlab.

Λύση

$$G(s) = \frac{3s+2}{5s^2 + 3s + 7}$$

Εισαγωγή της συνάρτησης μεταφοράς στο Matlab :

Πρώτος τρόπος

>>g = tf([3 2],[5 3 7])

Δεύτερος τρόπος

>>s = tf(‘s’)

*>>g = (3*s+2)/(5*s^2+3*s+7)*

Αποκρίσεις

- *Ελεύθερη απόκριση* ενός συστήματος λέγεται η απόκριση όταν έχω μηδενική είσοδο.
- *Δυναμική απόκριση* ενός συστήματος λέγεται η απόκριση όταν έχω μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- *Κρουστική απόκριση* ενός συστήματος ονομάζεται η δυναμική απόκριση όταν έχω σαν είσοδο την κρουστική συνάρτηση (ή συνάρτηση του Dirac).

  Εντολή Matlab: impulse(g)

  Χαρακτηριστικά:

  a. **Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης (Peak Amplitude):**
     Η μέγιστη τιμή που παίρνει η κρουστική απόκριση.
  b. **Χρόνος αποκατάστασης (Settling Time):**
     Το χρονικό διάστημα στο οποίο η κρουστική απόκριση θα φθάσει και θα παραμείνει σχεδόν σε κατάσταση ισορροπίας.
- *Βηματική* απόκριση ενός συστήματος λέγεται η δυναμική απόκριση όταν έχω σαν είσοδο τη βηματική συνάρτηση.

  Εντολή Matlab: step(g)

  Χαρακτηριστικά:

  a. **Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης (Peak Amplitude):**
     Η μέγιστη τιμή που παίρνει η βηματική απόκριση.
  b. **Χρόνος αποκατάστασης (Settling Time):**
     Το χρονικό διάστημα στο οποίο η βηματική απόκριση θα φθάσει και θα παραμείνει σχεδόν σε κατάσταση ισορροπίας.
  c. **Υπερύψωση (Overshoot):**
     Ποσοστό που μας δείχνει την ύπαρξη ή όχι έντονων ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας.
  d. **Χρόνος ανόδου (Rise Time):**
     Το χρονικό διάστημα στο οποίο η βηματική απόκριση φτάνει από το 10% στο 90% της τελικής τιμής.

e. **Τελική τιμή (Steady Time):**
   Η τιμή που παίρνει τελικά το σύστημα όταν φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας.

- Με την εντολή lsim(g,u,t) μπορώ να αναπαριστώ γραφικά την απόκριση ενός συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς g, που δέχεται ως είσοδο τη συνάρτηση u σε χρόνο t.

  Χαρακτηριστικά:

  a. **Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης (Peak Amplitude):**
     Η μέγιστη τιμή που παίρνει η απόκριση.

Σημείωση: Οι εντολές Impulse και step μπορούν να μας δώσουν και τις γραφικές παραστάσεις περισσότερων συναρτήσεων στο ίδιο παράθυρο συντάσσοντάς τες ως: Impulse(g1,g2,…,gn) ή αντίστοιχα Step(g1,g2,…,gn)

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα παρακάτω συστήματα :

$$3y''(t)+2y'(t)+6y(t)=6u(t)$$
$$6y'''(t)-8y'(t)+4y(t)=2u'(t)-3u(t)$$

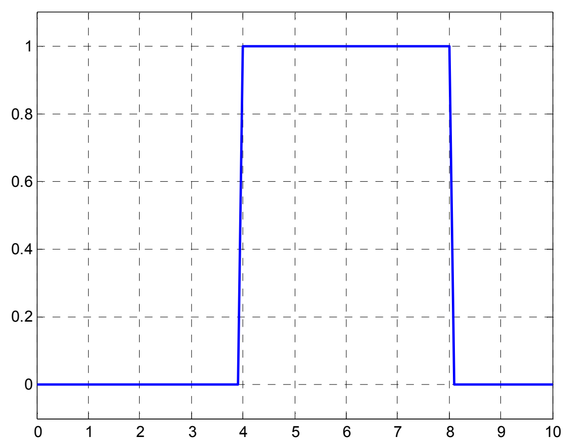
Να βρεθούν :

i. Οι συναρτήσεις μεταφοράς και να εισαχθούν στο Matlab.
ii. Η Κρουστική και η βηματική απόκριση σε ένα παράθυρο (2x2).
iii. Να βρεθούν το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης και ο χρόνος αποκατάστασης των παραπάνω αποκρίσεων.

2. Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς :

$$G(s)=\frac{(4s^2-3)(6s+8)}{(6s^3-2s^2+9)(s^2+8)}$$

i. Να εισαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς στο Matlab.
ii. Να γίνει η γραφική παράστασης της κρουστικής και βηματικής απόκρισης. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή τους;
iii. Χρησιμοποιώντας την εντολή lsim να γίνει η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς για είσοδο:



3. Δίνεται η διαφορική εξίσωση (μάζας – ελατηρίου):

$$my''(t)+by'(t)+ky(t)=u(t)$$

   i. Να εισαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς στο Matlab για m=10 και m=80.
   ii. Να γίνουν σε ένα παράθυρο 2Χ2 οι γραφικές παραστάσεις της βηματικής και κρουστικής απόκρισης για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
      a. m=10
      b. m=80
   iii. Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά της βηματικής απόκρισης και στις δύο περιπτώσεις.
   iv. Ποιο από τα δύο συστήματα φτάνει πιο γρήγορα σε κατάσταση ισορροπίας;
   v. Ποιο από τα δύο συστήματα έχει μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης;

   Δίνεται ότι k = 5, b = 2.

5ο Εργαστήριο

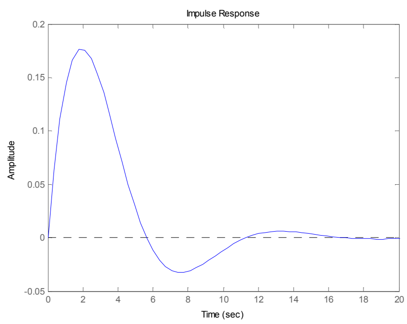
Ανάλυση Συστημάτων

- Πόλοι ενός συστήματος ονομάζονται οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. *Εντολή Matlab: >> pole(sys)*
- Μηδενικά ενός συστήματος ονομάζονται οι ρίζες του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς. *Εντολή Matlab: >>zero(sys)*

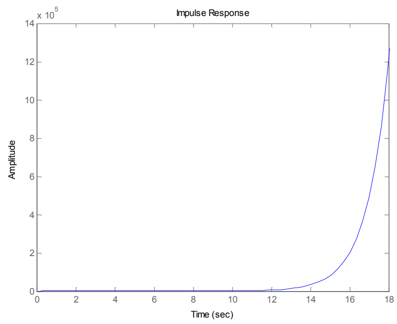
Με την εντολή *pzmap(sys)* κάνουμε στο Matlab το διάγραμμα πόλων - μηδενικών, όπου με (x) συμβολίζονται οι πόλοι και με (o) τα μηδενικά.

Ορισμοί ευστάθειας:

- Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν η κρουστική απόκριση τείνει στο μηδέν ενώ ο χρόνος τείνει στο άπειρο.



Ευσταθές

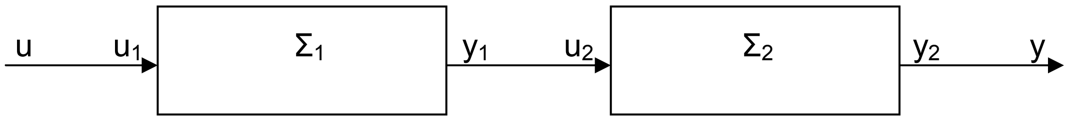


Ασταθές

- Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές αν για κάθε πεπερασμένου πλάτους είσοδο παράγεται πεπερασμένου πλάτους έξοδος.

Κριτήριο ευστάθειας: Ένα σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς έχουν πραγματικό μέρος αυστηρά αρνητικό (δηλαδή βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο).

<u>Σύνδεση σε σειρά</u>



Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς G(s), δύο συστημάτων με συναρτήσεις μεταφοράς $G_1(s)$ και $G_2(s)$, που συνδέονται σε σειρά είναι:

$$\mathbf{G(s) = G_1(s) * G_2(s)}$$

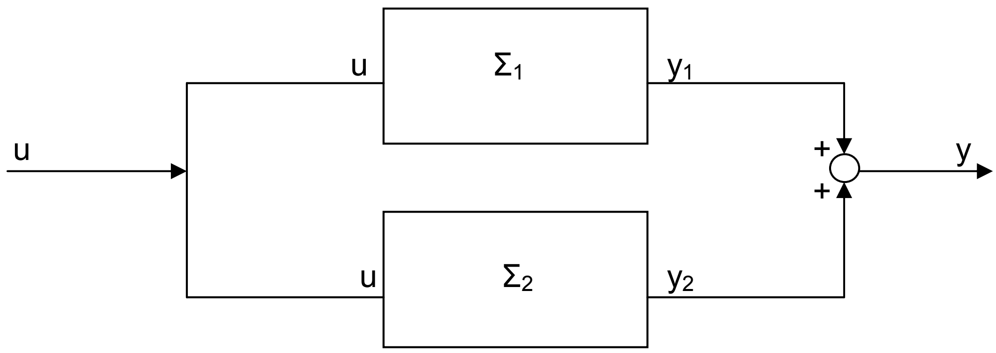
Για την εισαγωγή της συνάρτησης μεταφοράς στο Matlab γράφουμε:

*>> g=g1*g2*

ή χρησιμοποιούμε την εντολή:

>> g=series(g1,g2)

<u>Παράλληλη σύνδεση</u>



Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς G(s), δύο συστημάτων με συναρτήσεις μεταφοράς $G_1(s)$ και $G_2(s)$, σε παράλληλη σύνδεση είναι:

$$\mathbf{G(s) = G_1(s) + G_2(s)}$$

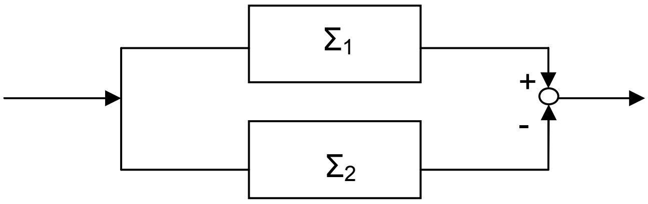
Για την εισαγωγή της συνάρτησης μεταφοράς στο Matlab γράφουμε:

>> g=g1+g2

ή χρησιμοποιούμε την εντολή:

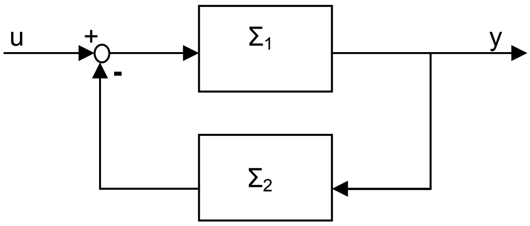
>> g=parallel(g1,g2)

Παρατήρηση:
Αν τα πρόσημα του αθροιστή αλλάξουν, αλλάζει αντίστοιχα και η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος όπως φαίνεται παρακάτω:



$G(s) = G_1(s) - G_2(s)$

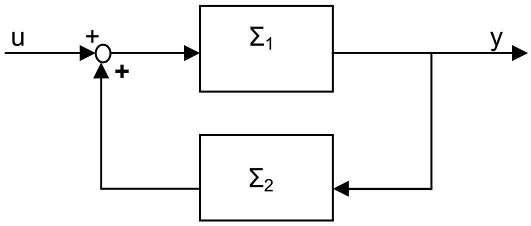
Ανάδραση (Αρνητική/Θετική)



Αρνητική ανάδραση με συνολική συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

Εντολή Matlab: *>>feedback(g1,g2)*



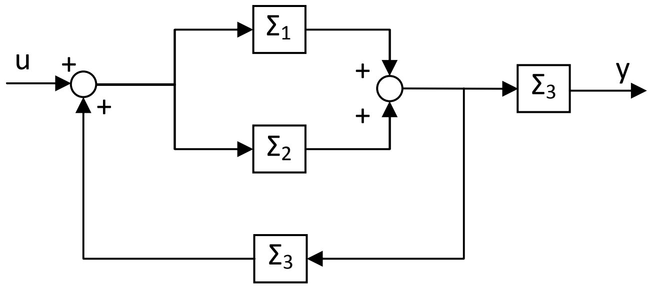
Θετική ανάδραση με συνολική συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s)=\frac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}$$

Εντολή Matlab: *>>feedback(g1,g2,1)*

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ολική συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω συστήματος



Δίνονται οι: $G_1(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-1)}$, $G_2(s)=\dfrac{1}{s+2}$, $G_3(s)=\dfrac{0.5s}{3s^2+5s+1}$

Λύση

Εισάγουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς

>>s=tf(΄s΄)

>>g_1 =1/((s+1)*(s-1))

>>g_2 =1/(s+2)

>>g_3 =(0,5*s)/(3*s^2+5*s+1)

και στη συνέχεια υπάρχουν δύο τρόποι για να βρούμε τη συνολική συνάρτηση μεταφοράς :

- Πρώτος τρόπος

>> g_{12}=parallel(g_1,g_2)

>>g_{123}=feedback(g_{12},g_3,1)

>>g_{tot}=series(g_{123},g_3)

- Δεύτερος τρόπος

>>g_{tot}= series(feedback(parallel(g_1,g_2),g_3,1),g_3)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς :

$$G_1(s) = \frac{s+2}{5s^3+7s-3}, G_2(s) = \frac{1}{(s^2-3s+4)(s+8)}$$

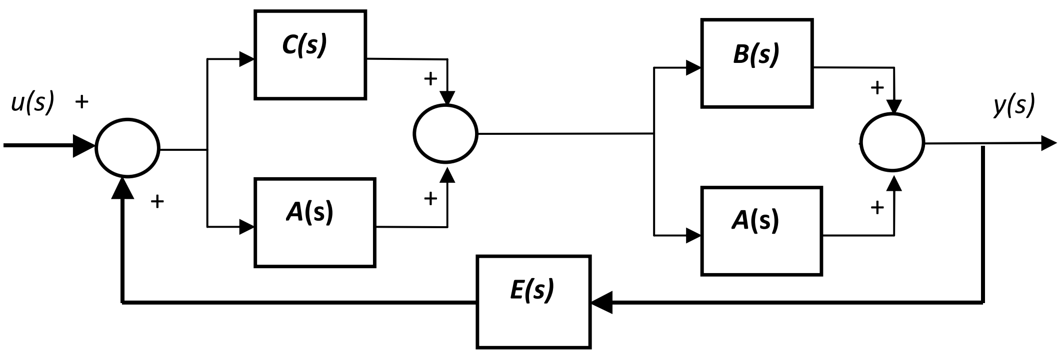
Σε ένα παράθυρο να σχεδιαστούν τα εξής διαγράμματα πόλων μηδενικών :

g_1
g_2
g_1,g_2 σε σειρά
g_1,g_2 παράλληλα
g_1,g_2 σε αρνητική ανάδραση

Είναι κάποιο από τα παραπάνω συστήματα ευσταθές; Πως επηρεάζει η σύνδεση σε σειρά, η παράλληλη σύνδεση και η ανάδραση τους πόλους και τα μηδενικά του συστήματος; Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για το πώς επηρεάζεται η ευστάθεια;

2. Θεωρήστε το παρακάτω μπλοκ διάγραμμα, στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου για το οποίο έχουμε τις εξής πληροφορίες για τα επιμέρους στοιχεία που το απαρτίζουν :

$$A(s) = \frac{1}{s-3},\ B(s) = \frac{s+2}{s-2},\ C(s) = \frac{s+3}{s+4},\ E(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

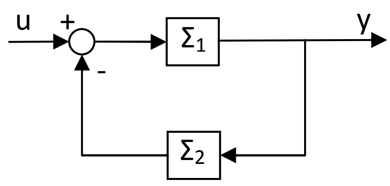


i. Να βρεθεί η ολική συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.
ii. Είναι το ολικό σύστημα ευσταθές;
iii. Σε ένα παράθυρο να σχεδιαστούν η βηματική απόκριση, η κρουστική απόκριση και το διάγραμμα πόλων μηδενικών της συνολικής συνάρτησης μεταφοράς.

3. Δίνεται το παρακάτω σύστημα :

Σ_1 : $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = u'(t) + u(t)$

Σ_2 : $y(t) = ku(t), k \in R$



i. Είναι το Σ_1 ευσταθές;
ii. Είναι το $\Sigma_{ολ}$ ευσταθές για κ=2,3,5;
iii. Να γίνουν τα παρακάτω διαγράμματα του ολικού συστήματος σε ένα παράθυρο 3x2

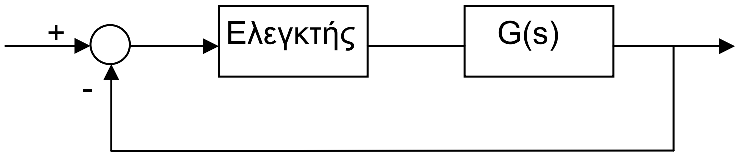
pzmap(k=2)	impulse(k=2)
pzmap(k=3)	impulse(k=3)
pzmap(k=5)	impulse(k=5)

iv. Σε ένα δεύτερο παράθυρο να σχεδιαστούν η βηματική απόκριση του ολικού συστήματος για κ=2,3,5 σε ένα διάγραμμα.

6ο Εργαστήριο

Γεωμετρικός Τόπος Ριζών

- Κλειστό λέγεται ένα σύστημα όταν έχει ανάδραση.
- Ανοιχτό λέγεται ένα σύστημα όταν δεν έχει ανάδραση.
- Ελεγκτής είναι ένα σύστημα με την προσθήκη του οποίου, προσπαθούμε να δώσουμε στο κλειστό σύστημα κάποιες επιθυμητές ιδιότητες. Όταν ο ελεγκτής είναι πραγματικός αριθμός ονομάζεται συντελεστής κέρδους. (K)



- Σταθεροποιήσιμο λέγεται ένα σύστημα όταν με την προσθήκη κάποιου ελεγκτή μπορεί να γίνει ευσταθές.
- Γεωμετρικός τόπος ριζών ονομάζεται το γράφημα που δείχνει πως μεταβάλλονται οι πόλοι του κλειστού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο όταν μεταβάλλεται το K.

Παρατήρηση: Όταν στην ανάδραση δεν υπάρχει συνάρτηση μεταφοράς, θεωρούμε ότι συνάρτηση μεταφοράς είναι η μοναδιαία συνάρτηση.

Βασικοί κανόνες για την κατασκευή γεωμετρικού τόπου ριζών(γ.τ.ρ)

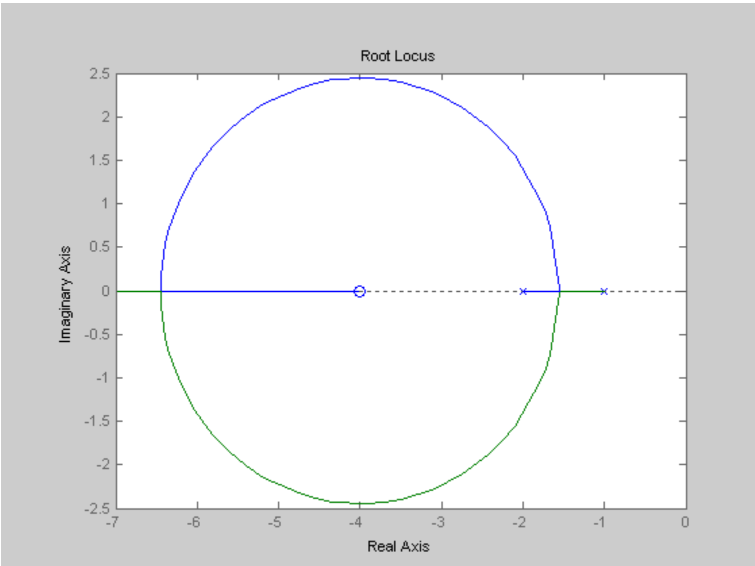
1. Βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά του ανοιχτού συστήματος και τα τοποθετώ στο μιγαδικό επίπεδο.
2. Κάθε πόλος κινείται προς το (πλησιέστερο) μηδενικό ή το άπειρο, το οποίο θεωρείται ότι έχει μηδενικό ή πόλο ανάλογα με το αν υπάρχει έλλειψη σε μηδενικά ή πόλους αντίστοιχα.
3. Ένα τμήμα του πραγματικού άξονα θα είναι τμήμα του γ.τ.ρ αν ο αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών του συστήματος που βρίσκονται στα δεξιά του είναι περιττός.
4. Αν έχω δύο πραγματικούς πόλους ή δύο πραγματικά μηδενικά τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο στον άξονα των πραγματικών

αριθμών και το διάστημα μεταξύ τους είναι τμήμα του γ.τ.ρ τότε υπάρχει σημείο μεταξύ τους από το οποίο φεύγει ή έρχεται αντίστοιχα ο κλάδος του γ.τ.ρ.

5. Ο γ.τ.ρ είναι συμμετρικός ως προς τον πραγματικό άξονα.
6. Οι κλάδοι του γ.τ.ρ έχουν πλήθος max(αριθμός πόλων, αριθμός μηδενικών).

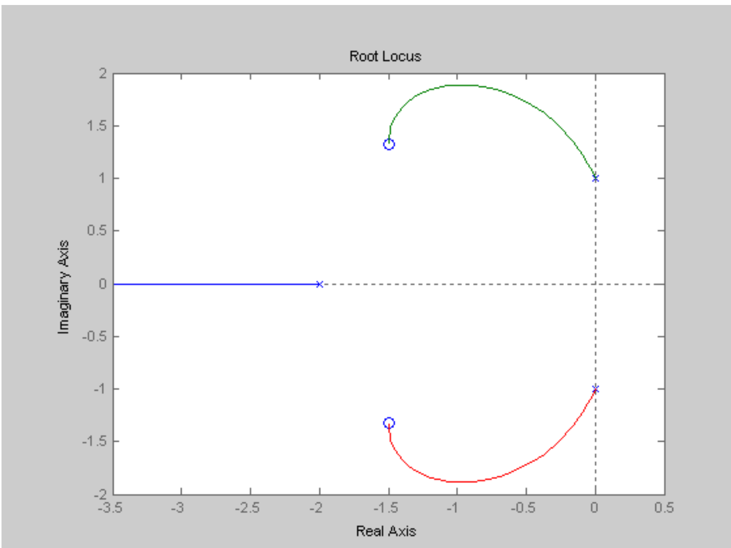
Παραδείγματα

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται ο γ.τ.ρ των συστημάτων με τις αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς του ανοιχτού συστήματος.



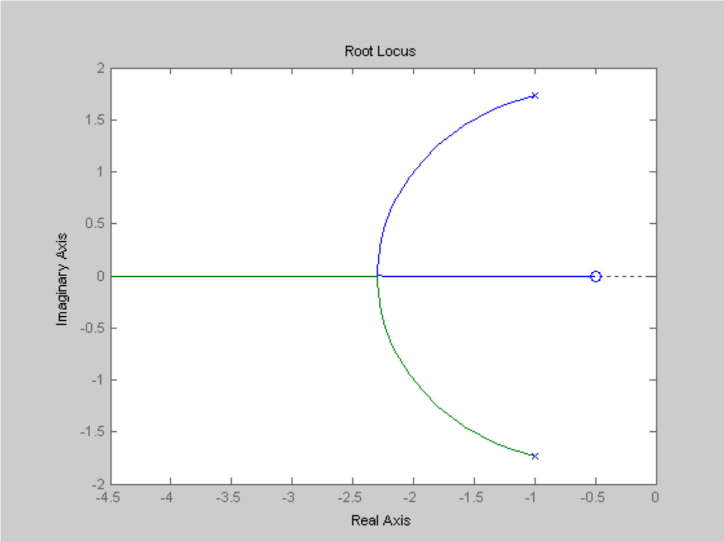
Συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+1)}$$



Συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{s^2+3s+4}{(s+2)(s^2+1)}$$



Συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{2s+1}{2s^2+4s+8}$$

Ο γ.τ.ρ παράγεται από το Matlab με την εντολή *rlocus(sys)*. Στο γράφημα που προκύπτει μπορούμε να μετακινήσουμε τους πόλους στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο και να δούμε την τιμή του συντελεστή κέρδους που πρέπει να εισάγουμε στο σύστημα ώστε να έχουμε το συγκεκριμένο πόλο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο γ.τ.ρ είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη σταθεροποίηση ενός συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί ο γ.τ.ρ. των συστημάτων με τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς:

a. $G(s)=\frac{(s+1)(s+4)}{s^2+5s+6}$

b. $G(s)=\frac{s-2}{s^3+2s+1}$

c. $G(s)=\frac{(s-2)(s^2+2)}{(s-3)(s+1)}$

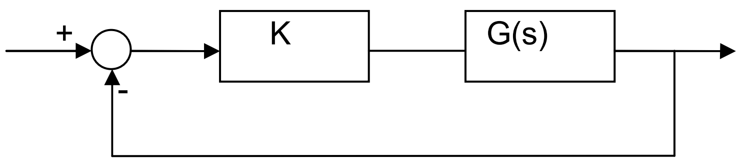
Είναι τα παραπάνω συστήματα σταθεροποιήσιμα; Αν ναι, για ποιες περίπου τιμές του K;

2. Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\frac{s+1}{s^2-5s+6}$.

a. Είναι το παραπάνω σύστημα ευσταθές;

b. Να επιλέξετε μία τιμή για το συντελεστή κέρδους K ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές.

c. Ποια είναι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος; Ποιοι είναι οι πόλοι του κλειστού συστήματος;



d. Σε ένα παράθυρο 2x2 να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της κρουστικής και βηματικής απόκρισης του ανοιχτού και του κλειστού συστήματος.

e. Να βρεθούν το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, ο χρόνος ανόδου και ο χρόνος αποκατάστασης του κλειστού συστήματος.

3. Έστω ένα σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση: y´´(t)-5y´(t)-24y(t)=u´´(t)+5u´(t)+4u(t).

a. Είναι το παραπάνω σύστημα ευσταθές;

b. Να επιλέξετε μία τιμή του συντελεστή κέρδους ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές;

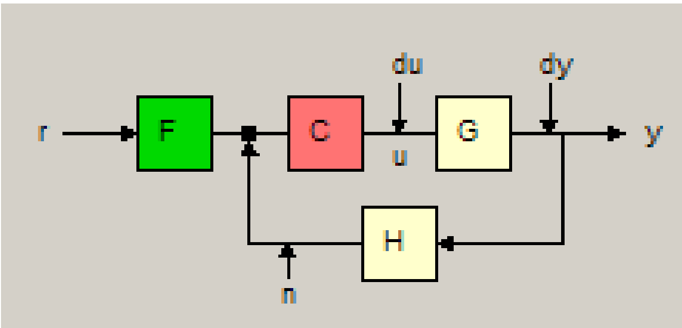
c. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος και να γίνει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

7^{o} Εργαστήριο

SISOTOOL

Το SISOTOOL είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη σχεδίαση ελεγκτών με τη μέθοδο του γεωμετρικού τόπου ριζών. Για να μεταφερθούμε στο περιβάλλον του sisotool εισάγουμε στο Matlab τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και χρησιμοποιούμε την εντολή *sisotool.*

Στο παράθυρο του sisotool μπορούμε να δούμε στα αριστερά το γεωμετρικό τόπο ριζών του κλειστού συστήματος. Στην πάνω δεξιά γωνία φαίνεται η διάταξη του κλειστού συστήματος την οποία μπορούμε να αλλάζουμε χρησιμοποιώντας το FS. Τα συστήματα που θα μελετήσουμε είναι αυτά με την παρακάτω διάταξη.



Όπου,

G (plant): η συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού συστήματος

C: η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή (η οποία φαίνεται στην πάνω αριστερή γωνία)

H: η συνάρτηση μεταφοράς της ανάδρασης

F: η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου

r: η είσοδος του κλειστού συστήματος

y: η έξοδος του κλειστού συστήματος

u: η είσοδος στο ανοιχτό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς G

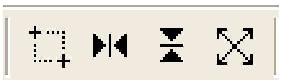
n: η είσοδος του ελεγκτή

du: ο θόρυβος στη είσοδο της συνάρτησης μεταφοράς του ανοιχτού συστήματος

dy: ο θόρυβος στη έξοδο της συνάρτησης μεταφοράς του ανοιχτού συστήματος

Θα ξεκινήσουμε την ξενάγηση στο περιβάλλον του sisotool αρχίζοντας από τα μενού:

File →	Import:	Στο παράθυρο που ανοίγει μπορούμε να εισάγουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς των συστημάτων.
	Export:	Επιλέγουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς και τις εισάγουμε αυτόματα στο χώρο εργασίας (workspace) του Matlab.
View→	System data:	Μπορούμε να δούμε τους πόλους, τα μηδενικά και τις συναρτήσεις μεταφοράς των συναρτήσεων μεταφοράς G και H.
	Closed-loop pole:	Μπορούμε να δούμε τους πόλους του κλειστού συστήματος.

Παρατήρηση: Χρησιμοποιώντας τη γραμμή εργαλείων  μπορούμε να κάνουμε σμίκρυνση ή μεγέθυνση στο γεωμετρικό τόπο ριζών.

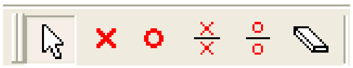
Αυτό που μας ενδιαφέρει σε ένα σύστημα είναι να είναι ευσταθές και να ικανοποιεί κάποιες προδιαγραφές (χαρακτηριστικά του συστήματος). Σύροντας τους πόλους του συστήματος στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο του γεωμετρικού τόπου ριζών, εξασφαλίζουμε την ευστάθεια του συστήματος για τις διάφορες τιμές του συντελεστή κέρδους (εδώ C). Πως μπορούμε όμως να εξασφαλίσουμε ότι το σύστημα έχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά;

Edit→	Root locus→	Design Constraints→	New:	Μπορούμε να εισάγουμε τον επιθυμητό χρόνο αποκατάστασης(settling time) ή την επιθυμητή υπερύψωση(overshoot). Στο παράθυρο του sisotool εμφανίζονται γκρι ‘μπάρες’. Για να έχουμε τα

				επιθυμητά χαρακτηριστικά θα πρέπει οι πόλοι του συστήματος να βρίσκονται αριστερά από αυτές. (Τα αποτελέσματα που παράγουν τα design constraints είναι προσεγγιστικά)
Edit→	Root locus→	Design Constraints→	Edit:	Μπορούμε να αλλάξουμε τα ήδη επιλεγμένα χαρακτηριστικά.

Analysis→	Response to step command:	Μπορούμε να δούμε την απόκριση του συστήματος. Κάνοντας δεξί κλικ έχουμε:
		• Plot types: επιλέγουμε την απόκριση που θέλουμε • Systems: επιλέγουμε το σύστημα. Μας ενδιαφέρει το πρώτο από αυτά, δηλαδή αυτό του συνολικού συστήματος • Characteristics: επιλέγουμε τα χαρακτηριστικά της απόκρισης
	Other loop responses:	Επιλέγουμε τις γραφικές παραστάσεις που θέλουμε να έχουμε σε ένα παράθυρο. Μετακινώντας τους πόλους στο γεωμετρικό τόπο ριζών βλέπουμε παράλληλα πως μεταβάλλονται τα αντίστοιχα διαγράμματα καθώς και τα χαρακτηριστικά τους εφόσον τα έχουμε επιλέξει.

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενα μαθήματα υπάρχουν συστήματα που δεν είναι σταθεροποιήσιμα. Για να κάνουμε τα συστήματα αυτά ευσταθή μπορούμε να μεταβάλλουμε το γεωμετρικό τόπο ριζών με την προσθήκη ενός πολυωνυμικού ελεγκτή. Προσθέτοντας τους κατάλληλους πόλους ή μηδενικά στο σύστημα μπορούμε να επιτύχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα. Την προσθήκη πόλων ή μηδενικών μπορούμε να την κάνουμε χρησιμοποιώντας την παρακάτω γραμμή εργαλείων

 ή χρησιμοποιώντας το μενού:

Edit→	Root locus:	Μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε μηδενικά και πόλους. Τα νέα μηδενικά/πόλοι εμφανίζονται με κόκκινο χρώμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{s^2 + 4s + 1}{s^2 - 7s + 10}$. Να επιλέξετε κατάλληλο συντελεστή κέρδους ώστε να είναι το σύστημα ευσταθές. Να εμφανίσετε σε ένα παράθυρο την βηματική και την κρουστική απόκριση. Ποιος είναι ο χρόνος αποκατάστασης και η υπερύψωση της βηματικής απόκρισης;

2. Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{s+1}{s^3 + 6s - 5}$. Είναι το σύστημα αυτό σταθεροποιήσιμο με την προσθήκη κάποιου συντελεστή κέρδους; Να επιλέξετε κατάλληλο πολυωνυμικό ελεγκτή ώστε να γίνει το σύστημα σταθεροποιήσιμο. Ποια είναι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος; Να την εμφανίσετε στο Matlab με το όνομα gtot.

3. Έστω ένα σύστημα ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{2s+1}{2s^3 + 4s^2 - 8s + 1}$. Να επιλέξετε κατάλληλο πολυωνυμικό ελεγκτή ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές, να έχει χρόνο αποκατάστασης μικρότερο του 7 και υπερύψωση μικρότερη του 20%.

8^{o} Εργαστήριο

ΕΙΔΗ ΕΛΕΓΚΤΩΝ

Στα προηγούμενα μαθήματα είδαμε τους συντελεστές κέρδους και γενικότερα τους πολυωνυμικούς ελεγκτές. Τρία άλλα είδη πολυωνυμικών ελεγκτών είναι οι ελεγκτές προήγησης (Lead compensators), οι ελεγκτές υστέρησης (Lag compensators) καθώς και οι PID ελεγκτές.

- **Ελεγκτής προήγησης**

$C(s)=\frac{s-z_0}{s-p_0}\cdot K$, όπου $|z_0|<|p_0|,\ z_0,p_0\in R^-,K\in R$

Παρατήρηση: ο ελεγκτής προήγησης προκύπτει στο sisotool αν προσθέσουμε έναν πραγματικό πόλο και ένα πραγματικό μηδενικό στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο του γ.τ.ρ. με τον πόλο να βρίσκεται αριστερά από το μηδενικό.

- **Ελεγκτής υστέρησης**

$C(s)=\frac{s-z_0}{s-p_0}\cdot K$, όπου $|z_0|>|p_0|,\ z_0,p_0\in R^-,K\in R$

Παρατήρηση: ο ελεγκτής υστέρησης προκύπτει στο sisotool αν προσθέσουμε έναν πραγματικό πόλο και ένα πραγματικό μηδενικό στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο του γ.τ.ρ. με τον πόλο να βρίσκεται δεξιά από το μηδενικό.

- **PID Ελεγκτής**

$C(s)=K_p+K_I\frac{1}{s}+K_D\cdot s=\frac{K_D\cdot s^2+K_p\cdot s+K_I}{s}$, όπου $K_D,K_p,K_I\in R$

Παρατήρηση: ο PID ελεγκτής προκύπτει στο sisotool αν προσθέσουμε έναν πραγματικό πόλο στο μηδέν και δύο μηδενικά στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο του γ.τ.ρ.

Αντίστοιχα,

PI ελεγκτής: $C(s)=K_p+K_I\frac{1}{s}=\frac{K_p\cdot s+K_I}{s}$

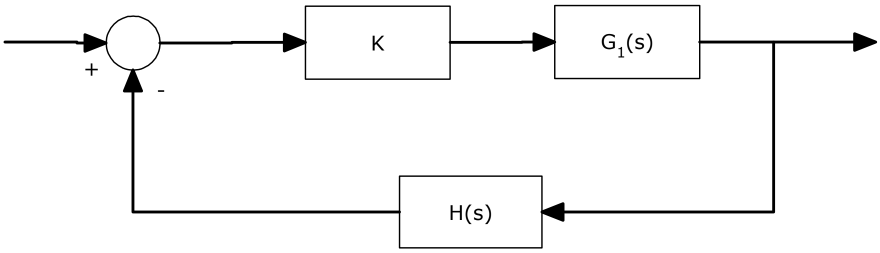
PD ελεγκτής: $C(s)=K_p+K_D\cdot s$

Παρατήρηση: Στο sisotool,

Compensator →	Edit:	Επιλέγοντας το C μπορώ να προσθέσω στον ελεγκτή μηδενικά ή πόλους

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Α) Έστω το σύστημα $G_1(s) = \dfrac{(s+1)}{(s-1)(s-4)}$, $H_1(s)=1$ και η σύνδεση του σχήματος.



1) Να βρεθεί ελεγκτής Κ (αν υπάρχει) έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές.
2) Να βρεθεί ελεγκτής Κ (αν υπάρχει) έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές και να έχει ποσοστό υπερύψωσης <30%.
3) Έστω $H(s) = \dfrac{1}{(s-1)}$. Υπάρχει ελεγκτής που να κάνει το σύστημα να είναι ευσταθές?

Β) Με συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού συστήματος την $G_1(s)$ και συνάρτηση ανάδρασης την H(s) να βρεθεί:

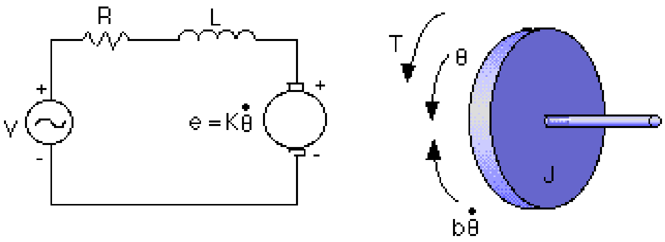
1) Ελεγκτής προήγησης που να κάνει το κλειστό σύστημα:
   - **a.** Ευσταθές
   - **b.** Ευσταθές με χρόνο αποκατάστασης μικρότερο των 2 sec
   - **c.** Να μεταφερθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος του ερωτήματος b, στο Matlab με το όνομα g_lead

2) Ελεγκτής PID που να κάνει το κλειστό σύστημα:
   - **a.** Ευσταθές
   - **b.** Ευσταθές με χρόνο αποκατάστασης μικρότερο των 2 sec
   - **c.** Να μεταφερθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος του ερωτήματος b, στο Matlab με το όνομα g_pid

3) Ελεγκτής PD που να κάνει το κλειστό σύστημα:
   - **a.** Ευσταθές
   - **b.** Ευσταθές με χρόνο αποκατάστασης μικρότερο των 2 sec
   - **c.** Να μεταφερθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος του ερωτήματος b, στο Matlab με το όνομα g_pd

Γ) Σε ένα παράθυρο 3Χ1 να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις αποκρίσεων των g_lead, g_pid, g_pd για είσοδο u(t)=sin(t) και χρόνο από 0 έως 10.

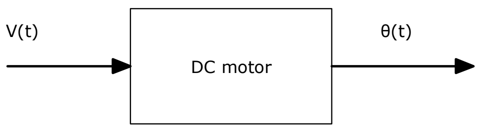
ΑΣΚΗΣΗ 2η - Έλεγχος θέσης κινητήρα συνεχούς ρεύματος



Ένας κινητήρας συνεχούς ρεύματος παρέχει περιστροφική κίνηση και σε συνδυασμό με γρανάζια αυτή η περιστροφική κίνηση μπορεί να μετατραπεί σε μεταβατική. Το σύστημα έχει σαν είσοδο ένα σήμα ανάλογο της τάσης V(t) και σαν έξοδο την γωνία περιστροφής θ(t)(σε rad). Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{K}{s((Js+b)(Ls+R)+K^2)}$$

όπου J=3.2284E-6, b=3.5077E-6, K=0.0274, R=4, L=2.75E-6.



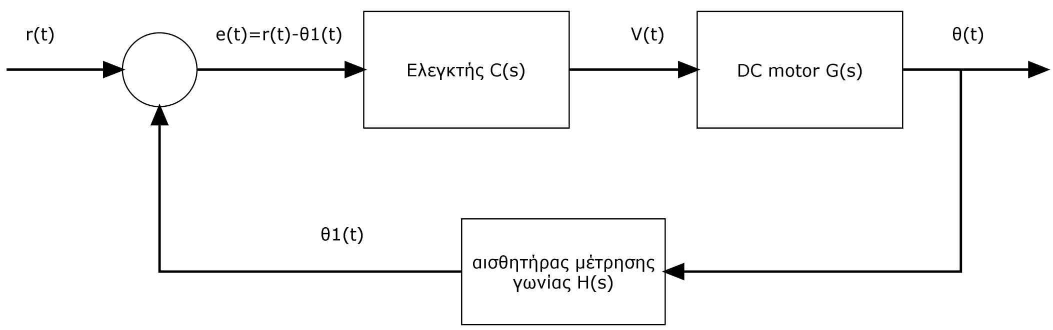
Το σύστημα είναι προφανώς σύστημα μιας εισόδου μίας εξόδου.

1) Να εισαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος στο MATLAB.
2) Πως συμπεριφέρεται το μοτέρ όσον αφορά την γωνία όταν έχω σαν είσοδο V(t)=1?
3) Πως συμπεριφέρεται το μοτέρ όσον αφορά την γωνία όταν έχω σαν είσοδο V(t)=-1?

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΕΛΕΓΚΤΗ

Ο στόχος είναι να μπορεί ο χρήστης να εισάγει σαν είσοδο μια επιθυμητή γωνία r(t) και να μπορεί ένας αυτόματος ελεγκτής να «διατάζει» το μοτέρ μέσω της τάσης V(t) έτσι ώστε η πραγματική γωνία θ(t) να γίνει ίση με την επιθυμητή.

Σε τέτοια προβλήματα ο ελεγκτής έχει σαν είσοδο το λάθος e(t):= r(t) – θ1(t). Έτσι έχουμε το ακόλουθο σχήμα.



όπου για λόγους απλότητας ο αισθητήρας γωνίας έχει συνάρτηση μεταφοράς H(s)=1.

Έτσι το κλειστό σύστημα πρέπει να έχει τις ακόλουθες προδιαγραφές στη βηματική του απόκριση:

Α) Χρόνο αποκατάστασης μικρότερο των 0.04 δευτερολέπτων.

Β) Υπερύψωση μικρότερη του 16%

Γ) Μηδενικό σφάλμα στο σημείο ισορροπίας (Το e(t) να είναι 0)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθούν οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος.

2) Να γίνει ο γεωμετρικός τόπος ριζών του συστήματος.

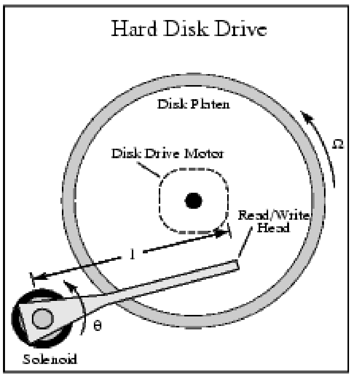
3) Να βρεθεί η βηματική απόκριση του συστήματος στο SISOTOOL για

- C(s)=0.1
- C(s)=0.5
- C(s)=1
- C(s)=5
  ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Να γίνει zoom στο γ.τ.ρ. στο 0.

Ικανοποιεί κάποιος από τους παραπάνω ελεγκτές τα κριτήρια Α,Β και Γ?

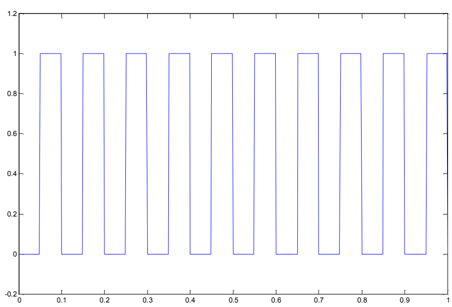
4) Να βρεθεί ελεγκτής C(s) που να ικανοποιεί τα κριτήρια Α,Β και Γ. Ποιοι είναι οι πόλοι του κλειστού συστήματος?
5) Να εξαχθεί το κλειστό σύστημα στο MATLAB με το όνομα cl_motor.
6) Αν «διατάξω» το μοτέρ θέτοντας είσοδο r(t)=2.1, ποια η γωνία που σχηματίζεται? Σε πόσο χρονικό διάστημα σταματάει το μοτέρ να κινείται?

ΑΣΚΗΣΗ 3η



Έστω η κεφαλή ενός σκληρού δίσκου όπως στο σχήμα. Το σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση: $J\theta''(t)+C\theta'(t)+K\theta(t)=K_m i(t)$ όπου $J=0.01, C=0.004, K=10, K_m=0.05$. Η $\theta(t)$ είναι η γωνία της κεφαλής σε ακτίνια, $\theta'(t)$ η γωνιακή ταχύτητα της κεφαλής και $i(t)$ η ένταση του ρεύματος. Θεωρούμε σαν είσοδο το $i(t)$ και έξοδο την γωνία της κεφαλής. Στόχος είναι να φτιαχτεί ένας ελεγκτής για την ακριβή και γρήγορη τοποθέτηση της κεφαλής σε μια επιθυμητή γωνία.

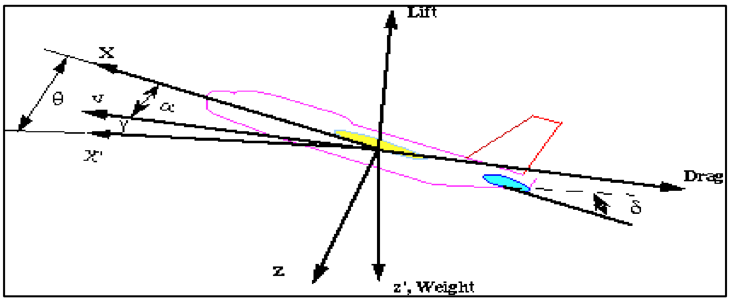
1) Να υπολογιστεί και να εισαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος στο MATLAB.
2) Αν έχω σαν είσοδο ρεύμα έντασης 1^A, σχολιάστε την συμπεριφορά της γωνίας. Ποια η μέγιστη κατ απόλυτη τιμή γωνία που εμφανίζεται? Που ισορροπεί τελικά η γωνία?
3) Αν έχω σαν είσοδο ρεύμα έντασης 3^A, σχολιάστε την συμπεριφορά της γωνίας. Ποια η μέγιστη κατ απόλυτη τιμή γωνία που εμφανίζεται? Που ισορροπεί τελικά η γωνία?
4) Σχολιάστε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές?
5) Ποιοι είναι οι πόλοι του συστήματος? Να γίνει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.
6) Να βρεθεί ελεγκτής C(s)=K με την βοήθεια του sisotool έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να έχει χρόνο αποκατάστασης μικρότερο του 0.07sec.
7) Αν το παραπάνω ερώτημα είναι αδύνατο, να βρεθεί ελεγκτής C(s) με την βοήθεια του sisotool έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να έχει χρόνο αποκατάστασης μικρότερο του 0.07sec.
8) Να βρεθεί ελεγκτής C(s) με την βοήθεια του sisotool έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να έχει χρόνο αποκατάστασης μικρότερο του 0.07sec και υπερύψωση μικρότερο του 5%.
9) Να κάνετε export το κλειστό σύστημα που διαλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα με όνομα **closedsys**. Να υπολογιστεί η απόκριση του κλειστού συστήματος όταν έχω σαν είσοδο το δίπλα σήμα το οποίο παράγεται με την εντολή



```
[u,t]=gensig('square',0.1,1)
```

10) Ποια είναι η μέγιστη τιμή που εμφανίζεται στην παραπάνω απόκριση? Ποιες εντολές χρησιμοποιήσατε για να την βρείτε?

ΑΣΚΗΣΗ 5η



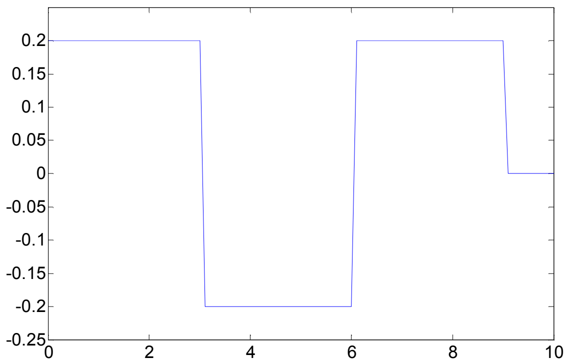
Έστω ένα **αεροπλάνο σε πτήση** όπως στο σχήμα. Η μοντελοποίηση του αεροπλάνου σε ώρα πτήσης είναι ένα πολύπλοκο πρόβλημα που καταλήγει σε έξι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Οι βασικές δυνάμεις που επιδρούν στο αεροσκάφος φαίνονται στο σχήμα. Υποθέτουμε ότι το αεροπλάνο πετάει σε σταθερό ύψος, με σταθερή ταχύτητα. Επιπλέον για ευκολία ας υποθέσουμε ότι μια αλλαγή στην κάθετη γωνία πτήσης δεν επιφέρει αλλαγή στην ταχύτητα. **Στόχος είναι ο έλεγχος της κάθετης γωνίας πτήσης του αεροπλάνου θ μέσω της γωνίας των πίσω πτερυγίων δ.** Και οι δύο γωνίες μετριούνται σε **rad**. Το σύστημα το οποίο αντιπροσωπεύει ένα μοντέλο της **Boeing** δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s}$$

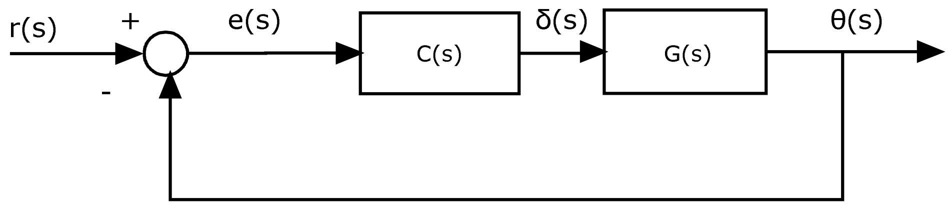
1) Είναι το σύστημα **ευσταθές**? Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

2) Αν ο πιλότος έχει την γωνία δ σταθερά στις 10 μοίρες πως συμπεριφέρεται η γωνία πτήσης του αεροπλάνου?

3) Αν ο πιλότος μεταβάλει την γωνία των πίσω πτερυγίων όπως στο δίπλα σχήμα ποια είναι η συμπεριφορά του αεροπλάνου? Ποια είναι η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της γωνίας πτήσης που εμφανίζεται?



4) Να βρεθεί ελεγκτής με την βοήθεια του SISOTOOL όπως στο σχήμα όπου η νέα είσοδος στο σύστημα είναι η επιθυμητή γωνία πτήσης. Το κλειστό σύστημα πρέπει να έχει τις ακόλουθες προδιαγραφές:



a. Υπερύψωση μικρότερη του 10%
b. Χρόνο ανύψωσης μικρότερο των 2sec
c. Χρόνο αποκατάστασης μικρότερο των 10sec
d. Σφάλμα στο σημείο ισορροπίας μικρότερο του 2%

Αφού βρεθεί ελεγκτής που να ικανοποιεί τα παραπάνω να υπολογίσετε στο κλειστό σύστημα:

5) Τους πόλους και τα μηδενικά.

6) Την μέγιστη γωνία πτήσης του αεροπλάνου αν r(t)=0.15.

7) Την μέγιστη και την ελάχιστη γωνία πτήσης του αεροπλάνου αν r(t) δίνεται από το διπλανό σχήμα.