**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΜΕ ΠΙΘΑΝΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ**

**Πτυχιακή Εργασία του**

Παχατουριδη Σαββα (676)

Επιβλέπων: Σ. Βολογιαννιδης

**ΣΕΡΡΕΣ, ΝΟΕMBΡΙΟΣ 2009**

**Περίληψη**

Τα τελευταία χρόνια οι πίνακες έχουν αποκτήσει ένα σημαντικό ρόλο που συνεχώς πλαταίνει για τις περισσότερες από τις εφαρμοσμένες επιστήμες.

Ένας από τους λόγους που οφείλεται η διεύρυνση είναι ότι πολλά από τα προβλήματα των εφαρμοσμένων επιστημών διατυπώνονται είτε απευθείας με τη μορφή γραμμικών εξισώσεων είτε με την μορφή εξισώσεων που μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε γραμμικές με την βοήθεια μιας απλής διαδικασίας γραμμικοποίησης.

Ο σημαντικότερος όμως λόγος είναι η μεγάλη διάδοση των ηλεκτρονικών υπολογιστών που διευκολύνοντας σε εξαιρετικά μεγάλο βαθμό τους αριθμητικούς υπολογισμούς ώθησαν στην ανάπτυξη νέων τρόπων προσέγγισης στα προβλήματα της εφαρμοσμένης επιστήμης.

Αντίστοιχα τα προβλήματα ιδιοτιμών αποτελούν βασικά προβλήματα σε διάφορες επιστήμες όπως η θεωρία ελέγχου και συστημάτων. Στα πλαίσια αυτής της πτυχιακής θα μελετηθεί αλγοριθμικά το πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών τετράγωνων πινάκων, όπως και το γενικευμένο πρόβλημα των ιδιοτιμών που προκύπτει όταν ο πίνακας είναι πολυωνυμικός, είτε πρώτου είτε μεγαλυτέρου βαθμού.

**Περιεχόμενα**

**Κεφάλαιο 1. Βασική Θεωρία**

* 1. Έννοια και Γενικά Χαρακτηριστικά των Πινάκων………………………………….........4
  2. Ανάστροφος Πίνακας…………………………………………………………………........7
  3. Μοναδιαίος Πίνακας…………………………………………………………………..…....8
  4. Αντίστροφος Πίνακας………………………………………………………………..…......8
  5. Τριγωνικός Πίνακας…………………………………………………………………..........8
  6. Ορθογώνιος Πίνακας..................................................................................................9
  7. Ορίζουσα....................................................................................................................9
  8. Συμμετρικοί και Αντισυμμετρικοί Πίνακες..................................................................11
  9. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.....................................................................................12
  10. Γενικευμένο Πρόβλημα Ιδιοτιμών.............................................................................16
  11. Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο.....................................................................................17
  12. Μετασχηματισμός householder...............................................................................17
  13. Παραγοντοποίηση με την χρήση Householder........................................................19
  14. Givens Rotation........................................................................................................24
  15. Hessenberg-Τριγωνική μορφή.................................................................................26
  16. Γραμμικοποίηση.......................................................................................................29

**Κεφάλαιο 2. Αλγόριθμοι Εύρεσης Ιδιοτιμών**

2.1) Μέθοδος Δύναμης.....................................................................................................30

2.2) Μέθοδος QR..............................................................................................................40

2.3) Μέθοδος QZ..............................................................................................................46

* 1. α) Εύρεση Ιδιοτιμών Πολυωνυμικών Πινάκων............................................................48

β)Υλοποίησης στο matlab.......................................................................................52

**Κεφάλαιο 1**

**1.1) Έννοια και Γενικά Χαρακτηριστικά των Πινάκων**

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές εμφανίζονται σύνολα αριθμητικών τιμών που από τη φύση τους ακολουθούν μια διάταξη κατά δυο έννοιες. Για παράδειγμα οι αριθμοί των φοιτητών που μπήκαν τα τελευταία πέντε χρόνια στα τμήματα της Πολυτεχνικής Σχολής του ΑΠΘ, έχουν μια διάταξη κατά τμήμα και μια διάταξη κατά ακαδημαϊκή χρονιά.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ακαδ. Χρονιά  Τμήμα | 1990-91 | 1991-92 | 1992-93 | 1993-94 | 1994-95 |
| Πολιτικοί  Αρχιτέκτονες  Τοπογράφοι  Ηλεκτρολόγοι  Μηχανολόγοι  χημικοί | 183  68  84  101  89  29 | 193  93  85  115  56  131 | 195  107  86  118  109  106 | 200  80  97  115  110  90 | 300  150  150  150  150  130 |

Τέτοια σύνολα αριθμών με διπλή διάταξη ονομάζονται **πίνακες.** Όταν η διάταξη των στοιχείων του πινάκα είναι δοσμένη, όταν δηλαδή είναι καθορισμένη η σημασία κάθε σειράς και κάθε στήλης, ένας πίνακας σαν τον παραπάνω μπορεί να γραφεί απλά

Στα μαθηματικά οι πίνακες συμβολίζονται για συντομία με κεφαλαία κατά κανόνα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, που τυπώνονται με έντονους χαρακτήρες

1. **A**=

Ένα διαφορετικό παράδειγμα όπου εμφανίζονται πίνακες είναι τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων όπως π.χ. το σύστημα

3x - 2y + 7z = 3

(2) 5x + y - 2z = -1

-x + 8y + 4z = 2

Εδώ έχουμε τον πινάκα των συντελεστών των εξισώσεων

τον πινάκα των σταθερών όρων

και τον πινάκα των αγνώστων

Κάθε πίνακας διαθέτει σειρές και στήλες. Έτσι οι σειρές του πινάκα Α είναι οι σειρές

Και οι στήλες του είναι οι στήλες

Όταν ένας πίνακας έχει n σειρές και μ στήλες λέμε ότι είναι πίνακας διαστάσεων n × m, η απλά ,ένας n × m πίνακας. Ο παραπάνω πίνακας Α είναι διαστάσεων 6 × 5 .

Ένας πίνακας που έχει μόνο μια σειρά ονομάζεται **πίνακας - σειρά**, και ένας πίνακας που έχει μόνο μια στήλη ονομάζεται **πίνακας – στήλη**. Οι πίνακες των σταθερών ορών και των αγνώστων του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων (2) είναι πίνακες – στήλες. Πολλές φορές οι πίνακες στήλες ονομάζονται και **διανύσματα**.

Οι πραγματικοί αριθμοί που περιέχουν σε ένα πινάκα ονομάζονται **στοιχεία** του πινάκα. κάθε στοιχείο χαρακτηρίζεται από τη σειρά και τη στήλη του πινάκα στις οποίες ανήκει. Το στοιχείο της σειράς i και της στήλης j ενός πινάκα **Α** συμβολίζουμε με Αij .Έτσι Α34 είναι το στοιχείο της 3ης σειράς και της 4ης στήλης.

**1.2) Ανάστροφος Πίνακας**

Η αναστροφή ενός πινάκα είναι μια διαδικασία στην οποία οι σειρές του πινάκα γίνονται στήλες και οι στήλες σειρές. Ο **ανάστροφος** ενός n × m πινάκα **Α,** συμβολίζεται με **Ατ** (T από τον αγγλικό όρο transpose=ανάστροφος) και είναι ένας πίνακας διαστάσεων m × n που έχει σαν πρώτη στήλη την πρώτη σειρά του **Α,** σαν δεύτερη στήλη τη δεύτερη σειρά του **Α** και ούτω καθεξής. Ταυτόχρονα, η πρώτη σειρά του **Ατ** είναι η πρώτη στήλη του **Α,** η δεύτερη σειρά του **Ατ** είναι δεύτερη στήλη του **Α** και ούτω καθεξής. Έτσι το στοιχείο του **Ατ** που βρίσκεται την i σειρά και j στήλη ισούται με το στοιχείο που βρίσκεται στην j στήλη ισούται με το στοιχείο που βρίσκεται στην j σειρά και i στήλη του **Α**

(1) (**Ατ)ij** =**Aji**

Ο ανάστροφος του πινάκα

1. **Α**=

Είναι ο πίνακας

1. **ΑT**=

**1.3) Μοναδιαίος Πίνακας**

Ο n×n πίνακας με αij=1, για i=j και αij=0, για i≠j λέγεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται με In η σκέτο I

Δηλαδή I= , Ι=

**1.4) Αντίστροφος Πίνακας**

Ο αντίστροφος ενός πινάκα Α είναι ο πίνακας Α-1 που ικανοποιεί τις σχέσεις

**Α Α-1 = Α-1 Α = Ι**

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Πρέπει αναγκαστικά τόσο ο **Α** όσο και ο **Α-1** να είναι τετραγωνικοί και των ίδιων διαστάσεων. Έτσι η έννοια του αντίστροφου περιορίζεται στους τετραγωνικούς πίνακες. Επίσης αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη αντιστρόφου του τετραγωνικού πινάκα Α είναι ο πίνακας Α να είναι ομαλός, να μη μηδενίζεται η ορίζουσα του, |Α|≠0

**1.5) Τριγωνικός Πίνακας**

Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται κάτω τριγωνικός όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο είναι μηδενικά και πάνω τριγωνικός όταν όλα τα κάτω από τη διαγώνιο στοιχεία του είναι μηδενικά. για παράδειγμα από τους πίνακες

,

**1.6) Ορθογώνιος Πίνακας**

Μια ιδιαίτερη κατηγορία ομαλών αντιστρέψιμων πινάκων, που η αντιστροφή τους είναι ιδιαίτερα εύκολη και που έχουν μεγάλη σημασία σε πολλές πρακτικές εφαρμογές είναι οι ορθογώνιοι πίνακες.

Ένας ομαλός τετραγωνικός πίνακας Α ονομάζεται ορθογώνιος όταν ο αντίστροφος του είναι ίσος με τον ανάστροφο του δηλαδή αν

Α-1=ΑΤ

Ένας ορθογώνιος πίνακας προφανώς ικανοποιεί την σχέση

ΑΤΑ=ΑΑΤ=Ι

**1.7) Ορίζουσα**

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους χ,y στη γενική μορφή

1. αχ+βy=λ
2. γχ+δy=μ

η με συμβολισμό πινάκων

1. =

Για να λύσουμε το σύστημα προχωρούμε σε μια διαδικασία απαλοιφής των αγνώστων με τον εξής τρόπο:

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με δ και την (2) με -β

1. αδχ+βδy=λδ
2. –βγχ-βδy=-μβ

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με -γ και την (2) με α

1. –αγχ-βγy=-λγ
2. αγχ+αδy=μα

Προσθέτουμε την (4) με την (5) και την (6) με την (7)

1. (αδ-βγ)χ=λδ-μβ
2. (αδ-βγ)y=μα-λγ

Η ποσότητα Δ=αδ-βγ που περιέχει όλα τα στοιχειά του πινάκα των συντελεστών του συστήματος (3) παίζει καθοριστικό ρόλο για το αν το σύστημα των εξισώσεων (8) και (9), η των ισοδύναμων εξισώσεων (1) και (2),έχει μοναδική λύση η όχι. Μόνο αν

1. Δ=αδ-βγ≠0

Το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

1. χ=
2. y=

η ποσότητα αδ-βγ ονομάζεται **ορίζουσα** του πινάκα

Των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος (1),(2).

Γενικότερα, η **ορίζουσα** ενός τετραγωνικού πινάκα διαστάσεων 2×2



Είναι η ποσότητα α11α22-α12α21 που συμβολίζεται με

1. det(A)=|A|== α11α22-α12α21.

Η ορίζουσα καθορίζει αν το σύστημα διαθέτει μια μοναδική λύση, πράγμα που συμβαίνει μόνο όταν η τιμή της διαφέρει από το μηδέν. Η ορίζουσα (14) ενός πινάκα 2×2 ονομάζεται ορίζουσα 2ης τάξης. Με παρόμοια διαδικασία προσδιορίζεται και η ορίζουσα τάξης n, εκφρασμένη σαν συνάρτηση των στοιχείων ενός n×n πινάκα Α.

**1.8) Συμμετρικοί και Αντισυμμετρικοί Πίνακες**

Ένας πίνακας που είναι ίσος με τον ανάστροφο του ονομάζεται συμμετρικός. Ο πίνακας **Α** είναι συμμετρικός όταν

**Ατ=Α**

Επειδή όταν ο **Α** είναι διαστάσεων n×m ο **Ατ** είναι διαστάσεων m×n ο **Ατ** είναι διαστάσεων m×n, η παραπάνω σχέση μπορεί να ισχύσει μόνο για τετραγωνικούς πίνακες. Έτσι η έννοια του συμμετρικού πινάκα αναφέρεται μόνο σε τετραγωνικούς πίνακες.

Τα στοιχεία ενός συμμετρικού πινάκα παρουσιάζουν μια μορφή συμμετρίας σε σχέση με τη διαγώνιο. Το στοιχείο της i σειράς και j στήλης είναι ίσο με το στοιχειό της j σειράς και i στήλης. Πράγματι από τη σχέση **Ατ=Α** έχουμε (**Ατ)ij** =**Aij** και επειδή (**Ατ)ij** =**Aji** από τον ορισμό (1) του ανάστροφου, έχουμε τελικά

**Αij** =**Aji**

**Παράδειγμα:**

Οι παρακάτω πίνακες είναι συμμετρικοί

Στον παρακάτω συμμετρικό πινάκα τονίζονται διαγραμματικά οι συμμετρίες των στοιχείων σε σχέση με τη διαγώνιο

Ένας τετραγωνικός πίνακας **Α** ονομάζεται **αντισυμμετρικός** όταν ο ανάστροφος του είναι ίσος με τον αντίθετο του, όταν δηλαδή

**Ατ=-Α.**

Για τα στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πινάκα ισχύει η σχέση

**Αij** =**-Aji**

Δυο στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πινάκα, που είναι συμμετρικά σε σχέση με τη διαγώνιο, είναι μεταξύ τους αντίθετα.

Σαν συνέπεια της παραπάνω σχέσης όλα τα διαγώνια στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πινάκα είναι μηδενικά.

**Παραδειγμα:**

Οι παρακάτω πίνακες είναι αντισυμμετρικοί:

, , ,

**1.9**) **Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα**

Σε πάρα πολλές εφαρμογές εμφανίζεται το πρόβλημα του προσδιορισμού της λύσης x ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με τη μορφή

1. Αx=λx

Όπου ο Α είναι τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων n×n. Το σύστημα αυτό δεν έχει λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, αν εξαιρέσουμε βέβαια την προφανή λύση x=0.

Οι τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες το σύστημα (1) έχει λύση, εξαρτώνται μόνο από τον πινάκα Α και ονομάζονται **ιδιοτιμές** του Α.

Δηλαδή Α= , x=,λER

Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί και με την εξής μορφή:

α11x1+α12x2+…+α1nxn=λx1

α21x1+α22x2+…+α2nxn=λx2

αn1x1+αn2x2+…+αnnxn=λxn

Tο λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του Α και το x **ιδιοδιάνυσμα** του Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Αx=λIx

Ax=λx => Ax-λx=0 => (A-λI)x=0 (2)

Η σχέση (2) μας δίνει ουσιαστικά το σύστημα:

(α11-λ)x1+α12x2+…+α1nxn=0

α21x1+(α22-λ)x2+…+α2nxn=0

αn1x1+αn2x2+…+(αnn-λ)xn=0

Από γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενική λύση όταν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν.

Ο πινάκας των συντελεστών του συστήματος είναι 0:

που συμβολίζεται A-λI

Οπότε θέλουμε det(A-λI)=0 : ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του Α

Το πολυώνυμο: PA(λ)=det(A-λΙ) ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α

**Παράδειγμα :**

Να βρεθούν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πινάκα Α= για της ιδιοτιμές λ1=1 και λ2=4.

**Λύση**

Για λ1=1

Ax=λx => =1=>

==> =>

=> => 2x1=x2 ~> x= =x1

Ο αντιπρόσωπος του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ1 είναι

Για λ2 =4

Ax=λx => =4=>

=>==>=>

=> => -x1=x2 ~> x= =x1

Ο αντιπρόσωπος του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ2 είναι

**Παράδειγμα:**

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του Α=

**Λύση**

Αx=λx => (A-λI)x=0

A-λI=-λ=-=

=

det(A-λΙ)=0 =>=0

=>(9-λ)(1-λ)2=0 => λ1=1 η λ2=9

PA(λ)=(9-λ)(1-λ)2: χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ1=1

Α= x=

Ax=λx => =1 =>

=> =>

=> => x==a

Αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ2=9

Α= x=

Ax=λx => =9 =>

=> =>

=> =>θέτω x1=α

x==a

**1.10) Γενικευμένο Πρόβλημα Ιδιοτιμών**

Μέχρι στιγμής μελετήσαμε την εύρεση ιδιοτιμών για έναν πινάκα |λI-Α| τι γίνεται ώμος όταν έχουμε ζευγάρι πινάκων δηλαδή Ax=λΕx => Ax-λΕx=0 => (A-λΕI)x=0. Το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών ορίζει σαν ιδιοτιμές ενός ζευγαριού πινάκων (Ε,Α) τις ρίζες της |λΕ-Α|.

Κάποιες βασικές ιδιότητες ζευγαριών πινάκων είναι ότι η ομοιότητα πινάκων διατηρεί τις ιδιοτιμες δηλαδή ο UAU-1 και ο Α έχουν τις ίδιες ιδιοτιμες .

Επίσης η ισοδυναμία πολυωνιμικων πινάκων διατηρεί της ιδιοτιμες δηλαδή U(sE-A)V~>έχει ίδιες γενικευμένες ιδιοτιμες με το (E,A) αν το U και V είναι αντιστρέψιμοι. Δηλαδή U(sE-A)V~>sUEV-UAV eig(UEV,UAV)~eig(E,A) όπου το eig(a,b) μας δίνει στο matlab τις ιδιοτιμες τον πινάκων a και b.

**1.11) Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο**

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α∊ℂm×m που συμβολίζεται ως pA η απλούστερα p,είναι το πολυώνυμο βαθμού m που ορίζεται ως :

pA(z)=det(zI-A)

λόγο της συγκεκριμένης θέσης του πρόσημου (-), δηλαδή το p είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, βαθμού m, είναι 1.

**1.12)** **Μετασχηματισμός householder**

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα:

**Πρόβλημα:** Δεδομένου ενός διανύσματος x∊Rn και σταθεράς κ∊(1,2,…,n) να βρεθεί ένας πίνακας Η τέτοιος ώστε οι τελευταίες n-k συνιστώσες του διανύσματος Ηx να είναι μηδέν.

Για την επίλυση του προβλήματος θα εισάγουμε κάποιους πίνακες των οποίων η δομή είναι τέτοια ώστε ο πολλαπλασιασμός τους με κάποιο διάνυσμα μετασχηματίζει το διάνυσμα αυτό σε ένα άλλο που διαφέρει μόνο στην κατεύθυνση.

**Ορισμός:** Για κάποιο διάνυσμα u∊Rn το οποίο έχει μοναδιαίο μήκος ‌‌‌‌‌‌‌||u||2=1, ο πίνακας

Η=Ι-2uuT

Ονομάζεται μετασχηματισμός **householder**.

Παρακάτω θα αναλυθεί ο μετασχηματισμός Householder με την βοήθεια ενός παραδείγματος.

**Παράδειγμα :**

Έστω ότι έχουμε χ= και θέλουμε εκείνον τον πίνακα **H** όπου το διάνυσμα **Hx** να έχει μηδέν την τρίτη συνιστώσα.

**Βήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω (1 όρο) του 3 στοιχείου

Υπολογίζω το κ από τη σχέση κ=n-λ, όπου n είναι ο αριθμός γραμμών του πινάκα, και το λ είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω άρα κ=3-1 => κ=2

**Βήμα 2**

Βρίσκω το S==> S= = =5 όπου xk είναι τα στοιχεία του πινάκα της στήλης X

**Βήμα 3**

Υπολογίζω το πρόσημο του xκ

sgn(xk)= αρα sgn(x2)=+1

**Βήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y==

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά Χ-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το u= Άρα u== u==

**Βήμα 7**

Υπολογίζω τον πινάκα Householder Η=I-2uuT=

===

**Επαλήθευση**

Η\*Χ=Υ αρα H\*X=

**1.13) Παραγοντοποίηση με την χρήση Householder**

Έστω ότι έχουμε ένα πινάκα Α∊Rn×n και θέλουμε να μετατρέψουμε το πινάκα αυτό σε ένα τριγωνικό πινάκα μέσω ορθογώνιων μετασχηματισμών, δηλαδή να κάνουμε μηδέν όλα τα στοιχειά που βρίσκονται κάτω από την βασική διαγώνιο. Εάν θέσουμε τις στήλες του Α να είναι τα διανύσματα α1,…,αn τότε για να εξουδετερώσουμε να n-1 τελευταία στοιχειά της πρώτης στήλης του Α βρίσκουμε ένα πινάκα H1 και θα έχουμε

H1A=[H1a1H1a2…H1an]==A1

Εξουδετερώνοντας τα τελευταία n-2 στοιχειά της δεύτερης στήλης του πινάκα Α1 με κάποιον πινάκα H2

Η2Α1==Α2

Συνεχίζοντας κατά αυτόν το τρόπο θα καταλήξουμε σε ένα άνω τριγωνικό πινάκα

Ηn-1An-2==An-1=R

Αναπτύσσοντας τον πινάκα An-2 θα έχουμε

Ηn-1Hn-2…H1A=R

Και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι κάθε πίνακας Hi είναι συμμετρικός και ορθογώνιος θα έχουμε

Α=Η1Η2…Ηn-1R

Θέτοντας με Q =H1H2…Hn-1 και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των ανάστροφων πινάκων (ΑΒ)Τ=ΒτΑτ θα έχουμε

QTQ=(H1H2…Hn-1)T(H1H2…Hn-1)

=(Hn-1Hn-2…H1)(H1H2…Hn-1)

=I.

Οπότε ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος και ο R είναι άνω τριγωνικός, και έχουμε εκφράσει τον Α ως το γινόμενο ενός ορθογώνιου και ενός ενώ τριγωνικού πινάκα.

**Παράδειγμα**

Έστω ότι θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το πινάκα

Α=

Για την πρώτη στήλη του πινάκα θα έχουμε

X1=

Εφαρμόζουμε householder

**Βήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω 2 όρους

n-κ=2, n=το στοιχειό του πινάκα, και το 2 είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω αρα 3-κ=1 => κ=1

**Βήμα 2**

Βρίσκω το S==> S=30

**Βήμα 3**

Βρίσκω το πρόσημο

sgn(xk)= αρα sgn(x1)=+1

**Βήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y==

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά Χ-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το u= u=

**Βήμα 7**

Το Η1=I-2uuT=

Μετά βρίσκω

H1A==Α1

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία διαλέγοντας την δεύτερη στήλη του πινάκα A1

X2=

**Βήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω 1 όρο

n-κ=1, n=το στοιχειό του πινάκα, και το 1 είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω άρα 3-κ=1 => κ=2

**Βήμα 2**

Βρίσκω το S==> S=15

**Βήμα 3**

Βρίσκω το πρόσημο

sgn(xk)= αρα sgn(x2)=-1

**Βήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y==

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά Χ-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το u= αρα u=

**Βήμα 7**

Το Η2=I-2uuT=

Μετά βρίσκω

H2A1==R

Και θα έχουμε Α=QR όπου

Q=H1H2= -

Έτσι γίνετε η ανάλυση της παραγοντοποίησης με την χρήση του householder

**1.14) Givens Rotation**

Ένα πλεονέκτημα των πινάκων **Givens** όπως και των πινάκων **Householder** που είδαμε προηγούμενος είναι ότι και αυτοί οι πίνακες είναι ορθογώνιοι, μια ιδιότητα που όπως έχουμε προαναφέρει εξασφαλίζει την αριθμητική ευστάθεια στους υπολογισμούς και επίσης εξασφαλίζει τον μηδενισμό ενός πινάκα Α. Οι πίνακες Givens είναι μοναδιαίοι πίνακες με κάποια στοιχεία τους να περιέχουν τον πινάκα . Για να κατανοήσουμε την λειτουργία της θα την μελετήσουμε μέσα από ένα παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε έναν πινάκα Α= και θέλουμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στην θέση (2,1) και (3,2) ξεκινάμε με τον μηδενισμό του στοιχείου (2,1) θα πρέπει να υπολογίσουμε τα c,s οι τύποι εύρεσης είναι = όπου r= , c=α/r , s=b/r το α είναι στο παράδειγμα μας το στοιχείο πάνω από αυτό που θέλουμε να μηδενίσουμε δηλαδή το 6 και το b είναι το στοιχείο που θέλουμε να μηδενίσουμε δηλαδή το 5. Επομένως το r==7.8102, c=6/r=0.7682, s=b/r=5/r=0.6402.

Δημιουργούμε τον πίνακα Givens όπου είναι της μορφής

G1==

Διαπιστώνουμε πως ο πίνακας Givens θα έχει το ίδιο μέγεθος με τον αρχικό μας πινάκα και το -s θα έχει την θέση του στοιχείου που θα μηδενίσουμε δηλαδή την θέση στο παράδειγμα μας (2,1) ενώ η κύρια διαγώνιος συμπληρώνετε με μονάδες. Αν πολλαπλασιάσουμε τον G1 πινάκα με τον Α θα δούμε πως μηδενίστηκε το στοιχείο που θέλαμε, προσοχή την σειρά του πολλαπλασιασμού

G1\*Α= =Α

Με την ίδια λογική θα μηδενίσουμε το στοιχείο που βρίσκετε στην θέση (3,1)

r==3.1751, c=-2.4328/r=-0.7662, s=b/r=4/r=1.2598

G2==

G2\*A=

Καταλήγουμε σε έναν ισοδύναμο με τον Α άνω τριγωνικό πινάκα

**Σημείωση**. Στην περίπτωση που θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε τον πινάκα Givens απτήν δεξιά μεριά του Α τότε θα ισχύει το εξής = όπου b είναι το στοιχείο που θέλουμε να μηδενίσουμε

**1.15) Hessenberg-Τριγωνική μορφή**

Έστω ότι έχουμε δύο πίνακες Α και Β διαστάσεων n×n. Στόχος του αλγορίθμου που θα παρουσιαστεί είναι να μετατραπεί με ισοδυναμία πινάκων ο πίνακας Α σε Hessenberg μορφή ενώ ο πίνακας Β σε άνω τριγωνική.

**Βημα 1**. Βρίσκουμε έναν ορθογώνιο πινάκα U όπου θα ισχύει

B=UTB

Όπου ο Β να είναι άνω τριγωνικός

Και έχουμε και τον Α όπου θα ισχύει

A=UTA

**Βημα 2**. Μετατρέπουμε τον Α σε μορφή Hessenberg διατηρώντας παράλληλα την τριγωνική δομή του Β

Δηλαδή

A=UTA=

Β= UTB

Καταρχήν μηδενίζουμε το (n,1) στοιχειό του πινάκα Α με την βοήθεια ενός πίνακα **Givens Rotation** οπότε έχουμε

Α=Q\*A=

Επειδή όμως πρόκειται για ισοδυναμία πινάκων με ότι πολλαπλασιάζουμε τον έναν πινάκα πολλαπλασιάζουμε και στον άλλον γι αυτό ο νέος Β που παράγεται θα είναι:

Β= Q\*Β=

Παρατηρούμε ο τελευταίος μετασχηματισμός έχει χαλάσει την τριγωνική μορφή του πινάκα Β οπότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πάλι ένα πίνακα Givens αυτή την φορά για τον πινάκα Β με στόχο να μηδενίσουμε το στοιχείο εκείνο ώστε να έχουμε τον Β σε τριγωνική μορφή

Β= Β\*Z=

Ότι όμως πολλαπλασιάζουμε στον έναν πινάκα πολλαπλασιάζουμε και στον άλλον οπότε θα έχουμε έναν καινούριο Α ο οποίος όμως αποδεικνύεται ότι διατηρεί την δομή του.

Δηλαδή

A=A\*Z=

Τελικά η διαδικασία συνεχίζετε έως ότου ο πίνακας Α να γίνει άνω Hessenberg ενώ ο πίνακας Β παραμένει άνω τριγωνικός.

**Παράδειγμα:**

A= , B=

Βλέπουμε πως ο Β είναι τριγωνικής μορφής οπότε θα πρέπει να κάνουμε τον Α άνω hessenberg αυτό γίνεται με την βοήθεια τις Givens rotation δηλαδή

**Βήμα 1**

Προσπαθούμε να μηδενίσουμε το στοιχείο Α3,1

Βρίσκουμε τον givens πινάκα όπου είναι

Q=

Q\*A==Α

Ότι πολλαπλασιάζει τον έναν πινάκα αναγκαστικά πολλαπλασιάζει και τον άλλον άρα:

Q\*B==Β

Είδαμε ότι η δομή του Β καταστράφηκε οπότε θα εφαρμόσουμε τον Givens τώρα δεξιά του πινάκα Β για να μηδενίσουμε το στοιχείο Β3,2

Z=

B\*Z==B

Ο νέος Α θα είναι

A\*Z==A

Οπότε ο Α είναι άνω Hessenberg και ο Β είναι άνω τριγωνικός

* 1. **Γραμμικοποίηση**

Ένας m×n πίνακας Α=(αij), καλείται πολυωνυμικός πίνακας η λ-πίνακας αν τα στοιχεία του αij είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής λ. Στην περίπτωση αυτή θα συμβολίζουμε ειδικότερα Α(λ)=(αij(λ)).

Το πρόβλημα τις εύρεσης των ιδιοτιμών γενικεύεται στην περίπτωση που ο πίνακας που μας ενδιαφέρει είναι τετράγωνος και πολυωνυμικός. Σ αυτή τη περίπτωση ιδιοτιμές ενός πίνακα θα ονομάζονται οι ρίζες της ορίζουσάς του. Ο πιο διαδεδομένος τρόπος για την εύρεση των ιδιοτιμών είναι η γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα.

Γρμμικοποίηση ονομάζεται η διαδικασία μετασχηματισμού ενός p×p πολυωνυμικού πινάκα βαθμού n σε np×np πολυωνυμικό πινάκα βαθμού ένα, διατηρώντας αναλλοίωτες τις ιδιοτιμές. Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών ενός πολυωνυμικού πινάκα μετατρέπεται στην εύρεση των ιδιοτιμών ενός πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πινάκα, για τον οποίο υπάρχουν πολλές αριθμητικές μέθοδοι που θα αναλύσουμε πιο κάτω.

**Κεφάλαιο 2**

**2.1) Μέθοδος Δύναμης**

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε μια μέθοδο υπολογισμού της μεγαλύτερης ιδιοτιμής ενός πινάκα και του αντιστοίχου ιδιοδιανύσματος, καθώς και μια επέκταση της μεθόδου για τον υπολογισμό όλων των ιδιοτιμών.

Με την μέθοδο δύναμης θα δούμε ότι εάν κάνουμε κάποιες απλές υποθέσεις όσο αφορά τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα Α, εάν πολλαπλασιάσουμε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα με τον πίνακα αυτό αρκετές φορές θα καταλήξουμε με ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη σε μέγεθος ιδιοτιμή του πίνακα. Έστω ότι έχουμε ένα n×n πινάκα Α του οποίου οι ιδιοτιμές ικανοποιούν

‌‌ |1λ| < ‌‌ |2λ| ≥ |3λ| ≥ … ≥|λn| (1)

Και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x1,x2,…,xn είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον Rn. Λόγο της γραμμικής ανεξαρτησίας των x1,x2,…,xn το σύνολο αυτό των διανυσμάτων παράγει τον διανυσματικό χώρο Rn εφόσον η διάσταση του χώρου είναι n αποτελούνε βάση αυτού του χώρου. Δηλαδή για ένα οποιοδήποτε διάνυσμα v0∊ Rn υπάρχουνε σταθερές α1,α2,…,αn∊ R τέτοιες ώστε

v0=α1χ1+α2χ2+…+αnχn (2)

Οπότε εάν κανονικοποιούσαμε σε κάθε πολλαπλασιασμό της (2) με τον Α το διάνυσμα vk θα καταλήξουμε με ένα μοναδιαίο διάνυσμα που θα είναι ιδιοδιάνυσμα της λ1. Η παραπάνω διαδικασία εκφράζεται στον αλγόριθμο 3.

**Αλγόριθμος 3 (μέθοδος δύναμης)**

1 for k=0,1,… 🡪

2 vk+1 = Auk;

3 uk+1 = vk+1/׀׀ vk+1׀׀ºº;

4 if (||uk+1-uk||ºº < ∊) 🡪 6;

5 rof;

6 return vk+1,uk;

Ο αλγόριθμος 3 δέχεται ως είσοδο ένα πινάκα Α∊Rn\*n και ένα οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα u0∊ Rn.σε κάθε επανάληψη του βρόγχου στις γραμμές 1-5 υπολογίζει μια προσέγγιση uk του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή του Α. στην γραμμή 3 κανονικοποιεί το διάνυσμα που προκύπτει από το γινόμενο έτσι ώστε να αποφύγει την υπερχείλιση (η υποεκχειληση),ενώ στην γραμμή 4 ελέγχει εάν η σύγκλυση έχει επιτευχτεί όπου και τερματίζει τον αλγόριθμο. Για μεγάλο κ θα πάρουμε ένα διάνυσμα uk ≈ y όπου το y είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα της λ1 στον Α. δηλαδή θα έχουμε

Αuk ≈ λ1uk

Αλλά vk+1=Auk και θα έχουμε ότι vk+1= λ1uk. Γνωρίζουμε όμως ότι το uk είναι κανονικοποιημένο χρησιμοποιώντας το άπειρο μήκος || **.** ||ºº και μια από τις συνιστώσες του (η μεγαλύτερη σε τιμή για την ακρίβεια) θα είναι 1. Τότε η αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος vk θα είναι η προσέγγιση της ιδιοτιμής λ1.

**Παράδειγμα:** Έστω ότι για τον πινάκα

Α=

Γνωρίζουμε ότι λ1=3, λ2=1 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα,

Χ1= , Χ2=

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 6.1 για u0=(2,1)T θα έχουμε

v1=Au0= 🡺 u1=1/5v1=,

v2= Au1= 🡺 u2=1/2.8v2=,

v3= Au2= 🡺 u1=14/41v3=,

v4=Au3= ,

και η προσέγγιση θα είναι u3 ≈ x1 και 2.98 ≈ λ1 = 3.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει την μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ1 ενός πινάκα Α∊Rn\*n με την μέθοδο δύναμης και θέλουμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες λ2,…,λn, θα μετατρέψουμε το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα υπολογισμού ιδιοτιμών ενός πινάκα μεγέθους (n-1)\*(n-1). Έστω ότι μπορούμε να υπολογίσουμε ένα μη ιδιόμορφο πινάκα Η έτσι ώστε ο πίνακας ΗΑΗ-1 να έχει την παρακάτω δομή

ΗΑΗ-1=

Όπου ο πίνακας Α1 έχει μέγεθος (n-1)\*(n-1). εφόσον από κατασκευή οι πίνακες ΗΑΗ-1 και Α είναι όμοιοι θα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμες σύμφωνα με το θεώρημα ότι Α,Β∊Rn\*n και Β=S-1AS. Τότε οι Α,Β έχουνε το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Θα έχουμε δηλαδή

det(A-λI)=det(ΗΑΗ-1-λI)=(λ1-λ)det(A-λI).

Οπότε οι ιδιοτιμές λ2,…,λn του πινάκα Α θα είναι οι ιδιοτιμές του πινάκα Α1.Εφαρμόζοντας την μέθοδο δύναμης στον Α1 μπορούμε να υπολογίσουμε την λ2 και να επαναλάβουμε την διαδικασία για τον υπολογισμό των υπόλοιπων ιδιοτιμών. Μας μένει να βρούμε ένα τρόπο υπολογισμού του πινάκα **Η**. παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του ΗΑΗ-1 είναι το διάνυσμα λ1e1 , όπως επίσης και το διάνυσμα ΗΑΗ-1 e1 . θα έχουμε δηλαδή

**ΗΑΗ-1**e1=λ1e1 🡺 A(**H-1**e1)=λ1(**Η-1** e1).

Δηλαδή το διάνυσμα **Η-1**e1 θα πρέπει να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της λ1. Έχουμε όμως ήδη υπολογίσει ένα ιδιοδιάνυσμα του λ1 με την μέθοδο δύναμης το x1, άρα μπορούμε να θέσουμε

**Η-1**e1=x1  🡺 **H**x1=e1.

Πρέπει να βρούμε λοιπόν ένα μη ιδιόμορφο πινάκα Η που το γινόμενο Ηx1 να είναι ένα διάνυσμα όπου οι τελευταίες n-1 συνιστώσες να είναι μηδέν. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Householder μπορούμε να υπολογίσουμε ένα τέτοιο πινάκα.

**Παράδειγμα** υλοποίησης των αριθμητικών πράξεων στο matlab

Εύρεση των ιδιοτιμών με την μέθοδο της δύναμης.

Α=

>> eig(A)

ans =

71.9048

25.7313

-10.6168

2.9807

Έχει λ1=71,9048 λ2=25,7313 λ3=-10,6168 λ4=2,9807

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μέθοδος δύναμης του matlab για την εξεύρεση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής θα δούμε ότι για u0= θα εχουμε

>> [eig1,v1]=powerit(A,[1;1;1;1])

H ρουτίνα τις συνάρτησης powerit είναι

function [la, v] = powerit(A, v)

if norm(v) ~= 1

v = v/norm(v);

end

la = v'\*A\*v;

tol = length(v)\*norm(A,1)\*eps;

while norm(A\*v - la\*v,1) >= tol

w = A\*v;

v = w/norm(w);

la = v'\*A\*v;

end

w

Όπου αν το τρέξουμε θα μας δώσει την μέγιστη ιδιοτιμη

eig1 = 71.9048

και ιδιοδιάνυσμα

v1 =

τώρα θα εφαρμόσουμε householder στο ιδιοδιάνυσμα x=

**Βήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω 3 όρους

n-κ=λ, n=το στοιχειό του πινάκα, και το λ είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω αρα 4-κ=3 => κ=1

**Βήμα 2**

Υπολογίζω το S==> S= = =1

**Βήμα 3**

Υπολογίζω το πρόσημο του xk

sgn(xk)= αρα sgn(x1)=+1

**Βήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y=

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά Χ-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το u=

**Βήμα 7**

Υπολογίζω τον πινάκα Householder

Η=I-2uuT=

Άρα Η\*Α\*Η-1=

\*=

=

Τώρα θα πάρω τον 3×3 πινάκα A=και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μέθοδος της δύναμης του matlab για την εξεύρεση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής θα δούμε ότι για u0= θα εχουμε

>> [eig1,v1]=powerit(A,[1;1;1])

Όπου αν το τρέξουμε θα μας δώσει την μέγιστη ιδιοτιμή

eig1=25.7313

Και ιδιοδιάνυσμα

v1=

Τώρα θα εφαρμόσω householder στο ιδιοδιάνυσμα το καινούριο x=

**Bήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω 2 όρους

n-κ=λ, n=το στοιχειό του πινάκα, και το λ είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω άρα 3-κ=2 => κ=1

**Βήμα 2**

Βρίσκω το S==> S= =1

**Βήμα 3**

Υπολογίζω το πρόσημο του xκ

sgn(xk)= αρα sgn(x1)=+1

**Bήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y=

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά X-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το

u=

**Βήμα 7**

Υπολογίζω τον πινάκα Householder

Η=I-2uuT=

Άρα Η\*Α\*Η-1=

Τώρα θα πάρω τον 2×2 πινάκα A=και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μέθοδος της δύναμης του matlab για την εξεύρεση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής θα δούμε ότι για u0= θα εχουμε

>> [eig1,v1]=powerit(A,[1;1])

Όπου αν το τρέξουμε θα μας δώσει την μέγιστη ιδιοτιμή

eig1=-10.6168

Και ιδιοδιάνυσμα

v1=

Τώρα θα εφαρμόσω householder στο ιδιοδιάνυσμα το καινούριο x=

**Βήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω 1 όρο

n-κ=1, n=το στοιχειό του πινάκα, και το 2 είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω αρα 2-κ=1 => κ=1

**Βήμα 2**

Βρίσκω το S==> S= =1

**Βήμα 3**

Βρίσκω το πρόσημο

sgn(xk)= αρα sgn(x1)=+1

**Βήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y=

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά X-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το

u=

**Βήμα 7**

Υπολογίζω τον πινάκα Householder

Η=I-2uuT=

Άρα **ΗΑΗ-1**=

Και έτσι βρήκαμε όλες τις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα.

**2.2) Μέθοδος QR**

Η μέθοδος QR υπολογίζει όλες τις ιδιοτιμές ενός πινάκα και είναι προς το παρόν από τις καλύτερες μεθόδους. Η μέθοδος αυτή κάνει χρήση της παραγοντοποίησης πινάκων. Για την περιγραφή τις μεθόδου QR θα χρησιμοποιήσουμε ένα πινάκα Α∊Rn×n όπου θα τον μετατρέψουμε σένα γινόμενο δυο πινάκων όπου ο ένας θα είναι ο Q ορθογώνιος πίνακας και ο άλλος θα είναι ο R όπου θα είναι άνω τριγωνικός πίνακας.

Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα τον πινάκα που μελετήσαμε στο κεφάλαιο που μιλήσαμε για την παραγοντοποίηση

Έχουμε τον πινάκα Α= θα εφαρμόσουμε παραγοντοποίηση

Για την πρώτη στήλη του πινάκα θα έχουμε

X1=

Εφαρμόζουμε householder

**Βήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω 2 όρους

n-κ=2, n=το στοιχειό του πινάκα, και το 2 είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω αρα 3-κ=1 => κ=1

**Βήμα 2**

Βρίσκω το S==> S=30

**Βήμα 3**

Υπολογίζω το πρόσημο

sgn(xk)= αρα sgn(x1)=+1

**Βήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y==

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά Χ-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το

u= u=

**Βήμα 7**

Υπολογίζω τον πινάκα Householder

Η1=I-2uuT=

Μετά βρίσκω

H1A==Α1

Και τώρα παίρνουμε την δεύτερη στήλη του πινάκα A1 και εφαρμόζουμε householder

X2=

**Βήμα 1**

Θέλω να εξουδετερώσω 1 όρο

n-κ=λ, n=το στοιχειό του πινάκα, και το λ είναι το πόσους όρους θέλω να εξουδετερώσω αρα 3-κ=1 => κ=2

**Βήμα 2**

Βρίσκω το S==> S=15

**Βήμα 3**

Υπολογίζω το πρόσημο

sgn(xk)= αρα sgn(x2)=-1

**Βήμα 4**

Σχηματίζω το y όπου

Y= αρα Y==

**Βήμα 5**

Υπολογίζω την διαφορά Χ-Y

X-Y=

**Βήμα 6**

Σχηματίζω το

u= αρα u=

**Βήμα 7**

Υπολογίζω τον πινάκα Householder

Η2=I-2uuT=

Μετά βρίσκω

H2A1==R

Και θα έχουμε Α=QR όπου

Q=H1H2= -

Έτσι έχουμε μετατρέψει τον αρχικό μας πινάκα σε γινόμενο δύο πινάκων ο ένας είναι ο Q ο οποίος είναι ορθογώνιος και ο άλλος πίνακας μας είναι ο R ο οποίος είναι άνω τριγωνικός. Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του Α∊Rn×n θέτουμε Α0=Α και κάνουμε τις παρακάτω πράξεις

Α0=Q1R1, θέσε A1=R1Q1,

Α1=Q2R2, θέσε A2=R2Q2,

Α2=Q3R3, θέσε A3=R3Q3,

**:**

Ak-1=QkRk, θέσε Ak=RkQk

Και μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων ο πίνακας Ak θα συγκλίνει σε έναν ημιτριγωνικό πινάκα δηλαδή στο παράδειγμα μας:

Υπολογίζω την QR του αρχικού πίνακα:

Α0:=-

Υπολογίζω τον νέο πίνακα Α1 σαν το γινόμενο RQ

Α1==

Υπολογίζω την QR του A1

Α1:=Q\*R=

Υπολογίζω τον νέο πίνακα Α2 σαν το γινόμενο RQ

A2=\*

Υπολογίζω την QR του A2

A2:=Q\*R=

Υπολογίζω τον νέο πίνακα Α3 σαν το γινόμενο RQ

A3=\*

**.**

**.**

**.**

**.**

**.**

**.**

Υπολογίζω την QR του A19

A19=Q\*R=

Υπολογίζω τον νέο πίνακα Α20 σαν το γινόμενο RQ

A20=

Οπότε οι ιδιοτιμές θα είναι σύμφωνα με την QR λ1=59,2225 λ2=-26,2489 λ3=13,0264

**2.3) Μέθοδος QZ**

Την μέθοδο QZ την χρησιμοποιούμε για την εύρεση των γενικευμένων ιδοτιμών δυο πινάκων η ισοδύναμα του πολυωνυμικού πινάκα |λΒ-Α|. Μέχρι στιγμής μιλούσαμε για την εύρεση ιδιοτιμών ενός πινάκα τώρα θα μελετήσουμε ζευγάρι πινάκων. Θεωρούμε ότι έχουμε έναν πινάκα Α που είναι σε άνω hessenberg μορφή και ο Β θα είναι άνω τριγωνικός. Στόχος είναι να βρούμε δυο ορθογώνιους πίνακες Q και Z όπου θα ισχύουν QTAZ να είναι άνω Hessenberg και QTBZ να είναι άνω τριγωνικός

Πρώτο βήμα βρίσκω τα α1 και α2 όπου είναι οι ιδιοτιμές από ένα κομμάτι 2\*2 πινάκα κάτω δεξιά που δημιουργείτε από τον πίνακα C=AB-1. Επειδή είναι δύσκολος ο υπολογισμός του αντίστροφου λόγο αριθμητικών λαθών υπάρχει ένας άλλος τρόπος για τον υπολογισμό των δύο αυτών ιδιοτιμών

Έτσι βρίσκω την πρώτη στήλη του πίνακα Ν=(C-α1I)(C-α2I) όπου C=AB-1 και επειδή είναι δύσκολος ο υπολογισμός του αντίστροφου παίρνουμε τις πρώτες δύο στήλες του C όπου

(c1,c2)=(α1,α2)-1

Όπου ο **c1** και **c2** είναι η πρώτη και δεύτερη στήλη του πινάκα **C** (που θελουμε να υπολογίσουμε).

Ο **α1** και **α2** είναι η πρώτη και δεύτερη στήλη του πινάκα **Α**

Τα στοιχεία **b** είναι από τον πινάκα **Β**

Αντί να υπολογίσουμε Ν=(C-α1I)(C-α2I) υπολογίζουμε την πρώτη στήλη του Ν

n1=

όπου

x=(c11-α1)(c11-α2)+c12c21

y=c21(c11-α2)+c21(c22-α1)

z=c21c32

**Τρίτο βήμα:** βρίσκω τον πινάκα Q με Householder όπου Q1n1=

**Τέταρτο βήμα:** βρίσκω τα Q1\*A και Q1\*B

**Πέμπτο βήμα:** μετατρέπω τον καινούριο πινάκα Α και Β σε άνω Hessenberg και άνω τριγωνική αντίστοιχα δηλαδή θα καταλήξουμε

B=Q1BZ1Z2

A=Q1AZ1Z2

Όπου Q και Z είναι πίνακες είτε Householder είτε Givens rotation

Και τελικά το γινόμενο τον Q και Z μας δίνει τούς πίνακες Q και Z όπου τους ψάχναμε από την αρχή

Δηλαδή

Q=Q1Q2Q3…Qn-1

Και

Z=Z1Z2Z3…Zn-1

Τώρα για να βρούμε τις γενικευμένες ιδιοτιμές ισχύει πως λι=

**2.4 α)Εύρεση Ιδιοτιμών Πολυωνυμικών Πινάκων**

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με κανονικούς πολυωνυμικους πίνακες της μορφής

T(s)=T0sn+ T1sn-1+…+Tn  (1)

Με Ti∊ℂp×p. Θεωρούμε ότι ο T(s) είναι κανονικός δηλαδή θα ισχύει detT(s)≠0 για σχεδόν κάθε s∊ℂ. Ο παρακάτω πρωτοβάθμιος πίνακας

P(s)=sP0-P1

όπου

P0= , P1=

είναι γνωστός σαν **η πρώτη συνοδεύουσα μορφή** του T(s). Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι γνωστό ότι είναι μια γραμμικοποιηση του πολυωνυμικου πινάκα T(s). Καθως έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πολυωνυμικό πίνακα T(s).

**Παράδειγμα:**

Έχουμε τον πολυωνυμικό πινάκα

Βρίσκουμε το n και p όπου το n είναι ο μέγιστος βαθμός του πολυωνύμου και p είναι ο βαθμός του πινάκα επομένως

n=3 , p=2

Σύμφωνα με τον ορισμό (1) θα αναλύσουμε τον πολυωνυμικό πινάκα

s3 + s2+s+

Εφαρμόζουμε γραμμικοποίηση της πρώτης συνοδεύουσας μορφής

P0= , P1=

Οπότε μετατρέψαμε έναν πολυωνυμικό πινάκα σε δυο πίνακες 6×6 πρώτου βαθμού οπότε από εδώ και πέρα για την εύρεση των ιδιοτιμών χρησιμοποιούμε την μέθοδο QZ

Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για την **δεύτερη συνοδεύουσα μορφή** του Τ(s) όπου ορίζεται

P’(s)=sP0-P’1

Όπου

P0= , P’1=

Να σημειώσουμε εδώ πως και στης δυο συνοδεύουσες μορφές του Τ(s) θα πρέπει να ισχύει T0…Tn να είναι αντιστρέψιμοι.

**Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων**

Στην [6] παρουσιάστηκε μια νέα οικογένεια γραμμικοποιήσεων. Ορίζουμε τους πίνακες

Α0=diag

Ακ= , k=1,2,…,n-1

An=diag

Όπου

Ck=

**Πόρισμα:** Έστω P(s) η πρώτη συνοδεύουσα μορφή ενός κανονικού πολυωνυμικού πινάκα T(s). Για καθένα από τα τέσσερα διατεταγμένα σύνολα δεικτών Iκ=(ik,1,ik,2,…,ik,nk) ,k=1,2,3,4 τέτοια ώστε Ii∩Ij=Ø για i≠j και ={1,2,3,…,n-1} ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

R(s)=sA0-AI3AnAI4

είναι αυστηρά ισοδύναμος με το P(s), όπου ΑΙκ=Αικ,1Αικ,2…Αικ,nκ όταν Ικ≠Ø και ΑΙκ=I όταν Ικ= Ø

Σημειώνεται ότι η αυστηρή ισοδυναμία μας εξασφαλίζει το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές μένουν αναλλοίωτες. Επίσης παρατηρούμε ότι οι αντίστροφοι των πινάκων Ακ,κ=1,2…,n-1 έχουν σχετικά απλή μορφή, η οποία είναι

= , k=1,2,…,n-1

όπου

=

**Παράδειγμα:**

Έχουμε τον πολυωνυμικό πινάκα

Γράφουμε τον πινάκα ως

T(s)=T0sn+ T1sn-1+…+Tn

όπου

Τ0= , Τ1=, Τ2=, Τ3=,

Και άρα

Τ(s)=s3+s2++

Η διάσταση του πινάκα θα είναι np×np με p=3 και το n=3 είναι ο μέγιστος βαθμός του πολυωνυμικού πίνακα

Υπολογίζουμε το Α0= , A1=

A2= , A3=

Και σύμφωνα με το πόρισμα καταλήγουμε ότι

R(s)=sA0-A2A3 έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με το T(s)

**β)Υλοποίησης στο matlab**

Τα τεχνικά χαρακτηριστικά του μηχανήματος όπου πραγματοποιήθηκαν οι μετρήσεις:

υπολογιστής

Επεξεργαστής: AMD Athlon 64 ×2 Dual 3.01 GHz

Μνήμη: 2GB RAM

Software

MATLAB 7.5.0

Ακολουθεί η υλοποίηση αλγορίθμου για την εύρεση ιδιοτιμών πωλυωνυμικών πινάκων με την χρήση της πρώτης και δεύτερης συνοδεύουσας μορφής στο Matlab

**Εύρεση ιδιοτιμών με την χρίση της πρώτης συνοδεύουσας μορφής**

*Η συνάρτηση companion1 του δίνουμε τον αρχικό μας πινάκα και μας επιστρέφει το p0 και p1 και τις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα*

function [p0,p1,eigs] = companion1(A)

[n1,n2,nm]=size(A);

if (n1==n2) %ελέγχει εάν είναι ο πίνακας Α ορθογώνιος

deg=nm-1; %βρίσκουμε το deg γιατί συμβολίζει τον βαθμό του μέγιστου πολυωνυμικού πίνακα

sz=deg\*n1; %υπολογίζει την διάσταση του πινάκα p0 και p1

p0=eye(sz);%δημιουργούμε έναν μοναδιαίο πινάκα διαστάσεων όσο θα είναι οι πίνακες μας

p0(1:n1,1:n2)=A(:,:,nm);%τοποθετούμε πάνω αριστερά στον μοναδιαίο πινάκα τον πινάκα με τους σταθερούς όρους και έτσι φτιάξαμε τον p0

p1=zeros(sz,sz);%δημιουργούμε έναν μηδενικό πινάκα ίδιας διάστασης με το p1

tmpp1=zeros(n1,n1\*deg);% δημιουργούμε έναν μηδενικό πινάκα

for i=1:deg

tmpp1(1:n1,n1\*i-n1+1:n1\*i)=-A(:,:,nm-i);%δημιουργούμε τον πινάκα temp1

end

z=[eye((deg-1)\*n1), zeros((deg-1)\*n1,n1)];%δημιουργούμε τον πινάκα Ζ

p1=[tmpp1;z];%δημιουργεί τον p1 πίνακα

eigs=eig(p1,p0);%βρίσκει τις ιδιοτιμες με την μέθοδο QZ

else %σε περίπτωση που δεν είναι ορθογώνιοι πίνακες

'den einai tetragonos o pinakas'

end

Θα χρησιμοποιήσω το παράδειγμα μας, φτιάχνω πρώτα τον πινάκα και μετά θα καλέσω την συνάρτηση

Α=[1 0;0 7]

Α(:,:,2)=[0 1;0 1]

Α(:,:,3)=[1 0;0 0]

Α(:,:,4)=[0 1;1 0]

>> [x,y,z]=companion1(A)

x =

0 1 0 0 0 0

1 0 0 0 0 0

0 0 1 0 0 0

0 0 0 1 0 0

0 0 0 0 1 0

0 0 0 0 0 1

y =

-1 0 0 -1 -1 0

0 0 0 -1 0 -7

1 0 0 0 0 0

0 1 0 0 0 0

0 0 1 0 0 0

0 0 0 1 0 0

z =

1.7183

-0.0945 + 1.6293i

-0.0945 - 1.6293i

-1.5294

0 + 1.0000i

0 - 1.0000i

**Εύρεση ιδιοτιμων με την χρίση της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής**

*Η συνάρτηση companion2 του δίνουμε τον αρχικό μας πινάκα και μας επιστρέφει το p0 και p1 και τις ιδιοτιμες του αρχικού πίνακα*

function [p0,p1,eigs] = companion2(A)

[n1,n2,nm]=size(A);

if (n1==n2) %ελέγχει εάν είναι ο πίνακας Α ορθογώνιος

deg=nm-1; %βρίσκουμε το deg γιατί συμβολίζει τον βαθμό του μέγιστου πολυωνυμικου πίνακα

sz=deg\*n1; %υπολογίζει την διάσταση του πινάκα p0 και p1

p0=eye(sz); );%δημιουργούμε έναν μοναδιαίο πινάκα διαστάσεων όσο θα είναι οι πίνακες μας

p0(1:n1,1:n2)=A(:,:,nm); );%τοποθετούμε πάνω αριστερά στον μοναδιαίο πινάκα τον πινάκα με τους σταθερούς όρους και έτσι φτιάξαμε τον p0

p1=zeros(sz,sz); %δημιουργούμε έναν μηδενικό πινάκα ίδιας διάστασης με το

tmpp1=zeros(n1\*deg,n1); );% δημιουργούμε έναν μηδενικό πινάκα

for i=1:deg

tmpp1(n1\*i-n1+1:n1\*i,1:n1)=-A(:,:,nm-i); );%δημιουργούμε τον πινάκα temp1

end

z=[eye((deg-1)\*n1); zeros(n1,(deg-1)\*n1)]; %δημιουργούμε τον πινάκα Ζ

p1=[tmpp1,z]; %δημιουργεί τον p1 πίνακα

eigs=eig(p1,p0); %βρίσκει τις ιδιοτιμες με την μέθοδο QZ

else

'den einai tetragonos o pinakas'

end

Θα χρησιμοποιήσω το παράδειγμα μας, φτιάχνω πρώτα τον πινάκα Α και μετά θα καλέσω την συνάρτηση

Α=[1 0;0 7]

Α(:,:,2)=[0 1;0 1]

Α(:,:,3)=[1 0;0 0]

Α(:,:,4)=[0 1;1 0]

>> [x,y,z]=companion2(A)

x =

0 1 0 0 0 0

1 0 0 0 0 0

0 0 1 0 0 0

0 0 0 1 0 0

0 0 0 0 1 0

0 0 0 0 0 1

y =

-1 0 1 0 0 0

0 0 0 1 0 0

0 -1 0 0 1 0

0 -1 0 0 0 1

-1 0 0 0 0 0

0 -7 0 0 0 0

z =

1.7183

-0.0945 + 1.6293i

-0.0945 - 1.6293i

-1.5294

0 + 1.0000i

0 - 1.0000i

Τώρα θα μελετήσω τις δυο συνοδεύουσες μορφές ως προς τον χρόνο που χρειάζονται για να υπολογίσουν τις ιδιοτιμές κρατώντας σταθερή την διάσταση του πινάκα και μεταβάλλοντας τον μέγιστο βαθμό. Ο παρακάτω αλγόριθμος θα χρονομετρά τις δύο συναρτήσεις companion1 και companion2 και θα καταγράφει το χρόνο που χρειάζονται για τυχαίους πίνακες.

% d η διάσταση του πίνακα

d=10

clear('A')

clear('time1')

clear('time2')

% To deg δηλώνει πως θα μελετήσουμε πίνακες από βαθμό 1 μέχρι deg-1

deg=51

h=0

for j=2:deg

A=rand(d,d);

for i=2:j

A(:,:,i)=rand(d,d);

end

h=h+1;

tic();

[x,y,ee]=companion1(A);

time1(h)=toc()

tic();

[k,l,e]=companion2(A);

time2(h)=toc()

end

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο ακόλουθο πίνακα.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Διάσταση πινάκα | Μέγιστος βαθμός πινάκα | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμών με την χρήση της πρώτης συνοδεύουσας μορφής | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμών με την χρήση της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής |
| 10×10 | 1 βαθμού | 0,0006 | 0,0004 |
| 10×10 | 2 βαθμού | 0,0006 | 0,0005 |
| 10×10 | 3 βαθμού | 0,0029 | 0,0015 |
| 10×10 | 4 βαθμού | 0,0043 | 0,0053 |
| 10×10 | 5 βαθμού | 0,0053 | 0,0044 |
| 10×10 | 6 βαθμού | 0,0115 | 0,0068 |
| 10×10 | 7 βαθμού | 0,0097 | 0,0132 |
| 10×10 | 8 βαθμού | 0,0147 | 0,0127 |
| 10×10 | 9 βαθμού | 0,0172 | 0,0175 |
| 10×10 | 10 βαθμού | 0,024 | 0,0238 |
| 10×10 | 11 βαθμού | 0,031 | 0,0307 |
| 10×10 | 12 βαθμού | 0,0385 | 0,0345 |
| 10×10 | 13 βαθμού | 0,0469 | 0,0436 |
| 10×10 | 14 βαθμού | 0,0519 | 0,0534 |
| 10×10 | 15 βαθμού | 0,0617 | 0,0632 |
| 10×10 | 16 βαθμού | 0,0762 | 0,0778 |
| 10×10 | 17 βαθμού | 0,0925 | 0,0905 |
| 10×10 | 18 βαθμού | 0,1107 | 0,1061 |
| 10×10 | 19 βαθμού | 0,1339 | 0,1279 |
| 10×10 | 20 βαθμού | 0,1415 | 0,1386 |
| 10×10 | 21 βαθμού | 0,1783 | 0,1803 |
| 10×10 | 22 βαθμού | 0,1793 | 0,1826 |
| 10×10 | 23 βαθμού | 0,2102 | 0,207 |
| 10×10 | 24 βαθμού | 0,2447 | 0,231 |
| 10×10 | 25 βαθμού | 0,2662 | 0,2561 |
| 10×10 | 26 βαθμού | 0,3715 | 0,3697 |
| 10×10 | 27 βαθμού | 0,3885 | 0,3877 |
| 10×10 | 28 βαθμού | 0,4023 | 0,4018 |
| 10×10 | 29 βαθμού | 0,509 | 0,5053 |
| 10×10 | 30 βαθμού | 0,4945 | 0,4914 |
| 10×10 | 31 βαθμού | 0,575 | 0,5743 |
| 10×10 | 32 βαθμού | 0,7209 | 0,7014 |
| 10×10 | 33 βαθμού | 0,7174 | 0,701 |
| 10×10 | 34 βαθμού | 0,7867 | 0,7771 |
| 10×10 | 35 βαθμού | 0,8763 | 0,8456 |
| 10×10 | 36 βαθμού | 0,9311 | 0,9202 |
| 10×10 | 37 βαθμού | 1,0899 | 1,0647 |
| 10×10 | 38 βαθμού | 1,2135 | 1,2063 |
| 10×10 | 39 βαθμού | 1,5548 | 1,5265 |
| 10×10 | 40 βαθμού | 1,31 | 1,3563 |
| 10×10 | 41 βαθμού | 1,7061 | 1,6743 |
| 10×10 | 42 βαθμού | 1,887 | 1,8567 |
| 10×10 | 43 βαθμού | 1,9022 | 1,9243 |
| 10×10 | 44 βαθμού | 1,8428 | 1,815 |
| 10×10 | 45 βαθμού | 2,126 | 2,0609 |
| 10×10 | 46 βαθμού | 2,4285 | 2,2957 |
| 10×10 | 47 βαθμού | 2,6799 | 2,7019 |
| 10×10 | 48 βαθμού | 2,7915 | 2,7808 |
| 10×10 | 49 βαθμού | 2,9435 | 2,9181 |
| 10×10 | 50 βαθμού | 3,2014 | 3,1727 |

Ακολουθεί ένα διάγραμμα με τους χρόνους.

Το συμπέρασμα μετά από πολλές επαναλήψεις είναι ότι οι διαφορές μεταξύ των δυο συνοδευόντων μορφών είναι αμελητέες.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα αλλάξουμε τον αλγόριθμο ώστε να κρατήσουμε σταθερό τον βαθμό μεταβάλλοντας τις διαστάσεις του πίνακα

% d είναι h diastash tou pinaka opou tha meletisoyme apo 2x2 mexrei dxd

d=20

clear('A')

clear('time1')

clear('time2')

% tha melethsoyme pinakes me bathmo deg

deg=51

h=0

for j=2:d

A=rand(j,j);

for i=2:deg

A(:,:,i)=rand(j,j);

end

h=h+1;

tic();

[x,y,ee]=companion1(A);

time1(h)=toc()

tic();

[k,l,e]=companion2(A);

time2(h)=toc()

end

Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Διάσταση πινάκα | Μέγιστος βαθμός πινάκα | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της πρώτης συνοδεύουσας μορφής | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής |
| 2×2 | 50 βαθμού | 0,0226 | 0,0196 |
| 3×3 | 50 βαθμού | 0,0611 | 0,0588 |
| 4×4 | 50 βαθμού | 0,1423 | 0,133 |
| 5×5 | 50 βαθμού | 0,2472 | 0,2389 |
| 6×6 | 50 βαθμού | 0,4501 | 0,4778 |
| 7×7 | 50 βαθμού | 0,7793 | 0,8262 |
| 8×8 | 50 βαθμού | 1,2548 | 1,2002 |
| 9×9 | 50 βαθμού | 1,964 | 1,9631 |
| 10×10 | 50 βαθμού | 2,947 | 2,9077 |
| 11×11 | 50 βαθμού | 4,2988 | 4,3018 |
| 12×12 | 50 βαθμού | 5,4049 | 5,6946 |
| 13×13 | 50 βαθμού | 6,9797 | 7,3781 |
| 14×14 | 50 βαθμού | 8,7895 | 8,836 |
| 15×15 | 50 βαθμού | 10,7177 | 10,6673 |
| 16×16 | 50 βαθμού | 13,2964 | 13,3298 |
| 17×17 | 50 βαθμού | 16,68 | 16,1549 |
| 18×18 | 50 βαθμού | 19,4052 | 19,3252 |
| 19×19 | 50 βαθμού | 23,5417 | 23,7659 |
| 20×20 | 50 βαθμού | 26,6878 | 26,2922 |

Συμπεραίνουμε πως πάλι και εδώ η διαφορές είναι αμελητέες ανάμεσα στις δυο μορφές απλά μπορούμε να διαπιστώσουμε πως πλέον χρειάζεται πολύ περισσότερο χρόνο εύρεσης ιδιοτιμών όσο αυξάνουμε τις διάστασης του πίνακα σε σχέση με την αύξηση του μέγιστου βαθμού του πίνακα

**Εύρεση ιδιοτιμών με την χρήση της τελευταίας συνοδεύουσας μορφής**

Η συνάρτηση elementary παίρνει όρισμα τον αρχικό μας πινάκα και το κ που αντιστοιχεί στον πίνακα Ακ που θέλουμε να επιστρέψει.

function [p] = elementary(A,k)

[n1,n2,nm]=size(A);

deg=nm-1;% μας δίνει τον βαθμό

sz=deg\*n1;% μας δίνει τις διαστάσεις τον πινάκων που θα φτιαχτούν

p=eye(sz);

if (k==0)%κάνουμε έλεγχο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον κατάλληλο τύπο μετατροπής

p(1:n1,1:n2)=A(:,:,nm);

end

if (k==deg) %κάνουμε έλεγχο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον κατάλληλο τύπο μετατροπής

p(sz-n1+1:sz,sz-n1+1:sz)=-A(:,:,1);

end

if (k<deg && k>0) %κάνουμε έλεγχο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον κατάλληλο τύπο μετατροπής

p(n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1,n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1)=-A(:,:,nm-k);

p(n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1,n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+n1+n1)=eye(n1,n1);

p(n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+2\*n1,n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+n1+n1)=zeros(n1,n1);

p(n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+2\*n1,n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1)=eye(n1,n1);

end

if (-k<deg && -k>0)%κάνουμε αυτόν τον έλεγχο ώστε να βρίσκουμε όποτε θέλουμε τους αντίστροφους σύμφωνα με τον τύπο της θεωρίας

k=-k;

p(n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1,n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1)=zeros(n1,n1);

p(n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1,n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+n1+n1)=eye(n1,n1);

p(n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+2\*n1,n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+n1+n1)=A(:,:,nm-k);

p(n1\*(k-1)+1+n1:n1\*(k-1)+2\*n1,n1\*(k-1)+1:n1\*(k-1)+n1)=eye(n1,n1);

end

Η ακόλουθη συνάρτηση elementarypencil όπου υπολογίζει την γραμμικοποίηση R(s) του πορίσματος της σελίδας 51. Δέχεται σαν όρισμα εκτός από τον αρχικό πινάκα και δυο πίνακες διάστασης 1×n όπου θα τοποθετήσουμε τους δείκτες των πινάκων που θέλουμε να υπάρχουν στον πρωτοβάθμιο και τον σταθερό όρο της R(s)=sA0-AI3AnAI4 .Σημειώνουμε ότι οι αντίστροφοι πίνακες θα συμβολίζονται με μείον, δηλαδή ο δείκτης -4 θα αντιστοιχεί στον πίνακα .

function [ee,aa,eigs] = elementarypencil(A,l,r)

[n1,n2,nm]=size(A);

deg=nm-1;% μας δίνει τον βαθμό

sz=deg\*n1;% μας δίνει τις διαστάσεις τον πινάκων που θα φτιαχτούν

ee=eye(sz);

for i=1:length(l)%αυτό τον βρόχο τον χρειαζόμαστε για να μας φτιάξει το πρώτο γινόμενο του πορίσματος

ee=ee\*elementary(A,l(i));

end

aa=eye(sz);

for i=1:length(r) %αυτό τον βρόχο τον χρειαζόμαστε για να μας φτιάξει το δεύτερο γινόμενο του πορίσματος

aa=aa\*elementary(A,r(i));

end

eigs=eig(aa,ee);%βρίσκει τις ιδιοτιμες

Α=[1 0;0 7]

Α(:,:,2)=[0 1;0 1]

Α(:,:,3)=[1 0;0 0]

Α(:,:,4)=[0 1;1 0]

[ee,aa,eigs] = elementarypencil(A,[0 -1],[2 3])

ee =

0 0 0 1 0 0

0 0 1 0 0 0

1 0 1 0 0 0

0 1 0 0 0 0

0 0 0 0 1 0

0 0 0 0 0 1

aa =

1 0 0 0 0 0

0 1 0 0 0 0

0 0 0 -1 -1 0

0 0 0 -1 0 -7

0 0 1 0 0 0

0 0 0 1 0 0

eigs =

1.7183

-1.5294

-0.0945 + 1.6293i

-0.0945 - 1.6293i

0.0000 + 1.0000i

0.0000 - 1.0000i

Τώρα θα μελετήσουμε την τελευταία συνοδεύουσα μορφή σε σχέση με τις άλλες δυο ως προς τον χρόνο που χρειάζονται για να βρουν τις ιδιοτιμές κρατώντας σταθερή την διάσταση του πινάκα και μεταβάλλοντας τον μέγιστο βαθμό.

%d h diastash tou pinaka

d=10

clear('A')

clear('time1')

clear('time2')

clear('time3')

% To deg dhlonei oti tha melethsoyme pinakes me bathmo apo 1 mexri deg

deg=41

h=0;

for j=2:deg

A=rand(d,d);

for i=2:j

A(:,:,i)=rand(d,d);

end

h=h+1;

tic();

[x,y,ee]=companion1(A);

time1(h)=toc()

tic();

[k,l,e]=companion2(A);

time2(h)=toc()

tic();

[x,y,ee]=elementarypencil(A,-[0:2:(deg-1)],[1:2:(deg-1)]);

time3(h)=toc()

end

Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Διάσταση πινάκα | Μέγιστος βαθμός πινάκα | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της πρώτης συνοδεύουσας μορφής | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της τελευταίας συνοδεύουσας μορφής |
| 10×10 | 1 βαθμού | 0,0006 | 0,0009 | 0,001 |
| 10×10 | 2 βαθμού | 0,0007 | 0,0006 | 0,0014 |
| 10×10 | 3 βαθμού | 0,0056 | 0,0027 | 0,0071 |
| 10×10 | 4 βαθμού | 0,0028 | 0,0042 | 0,0068 |
| 10×10 | 5 βαθμού | 0,0043 | 0,0041 | 0,0095 |
| 10×10 | 6 βαθμού | 0,0069 | 0,0067 | 0,00137 |
| 10×10 | 7 βαθμού | 0,0113 | 0,0116 | 0,0305 |
| 10×10 | 8 βαθμού | 0,0124 | 0,0194 | 0,0362 |
| 10×10 | 9 βαθμού | 0,0212 | 0,0189 | 0,0362 |
| 10×10 | 10 βαθμού | 0,0291 | 0,0265 | 0,052 |
| 10×10 | 11 βαθμού | 0,0311 | 0,0331 | 0,0778 |
| 10×10 | 12 βαθμού | 0,0451 | 0,0452 | 0,0871 |
| 10×10 | 13 βαθμού | 0,0589 | 0,0595 | 0,1199 |
| 10×10 | 14 βαθμού | 0,0659 | 0,0645 | 0,1366 |
| 10×10 | 15 βαθμού | 0,075 | 0,0744 | 0,1673 |
| 10×10 | 16 βαθμού | 0,0981 | 0,089 | 0,212 |
| 10×10 | 17 βαθμού | 0,1101 | 0,1058 | 0,2448 |
| 10×10 | 18 βαθμού | 0,1373 | 0,1244 | 0,3057 |
| 10×10 | 19 βαθμού | 0,1432 | 0,1517 | 0,3629 |
| 10×10 | 20 βαθμού | 0,1696 | 0,1588 | 0,3968 |
| 10×10 | 21 βαθμού | 0,2317 | 0,2603 | 0,4728 |
| 10×10 | 22 βαθμού | 0,2319 | 0,2193 | 0,5191 |
| 10×10 | 23 βαθμού | 0,252 | 0,2428 | 0,5942 |
| 10×10 | 24 βαθμού | 0,2945 | 0,3094 | 0,6639 |
| 10×10 | 25 βαθμού | 0,3502 | 0,3246 | 0,7798 |
| 10×10 | 26 βαθμού | 0,4486 | 0,4642 | 0,981 |
| 10×10 | 27 βαθμού | 0,4774 | 0,4638 | 1,1007 |
| 10×10 | 28 βαθμού | 0,5129 | 0,4711 | 1,0781 |
| 10×10 | 29 βαθμού | 0,6468 | 0,6366 | 1,3146 |
| 10×10 | 30 βαθμού | 0,6292 | 0,699 | 1,3012 |
| 10×10 | 31 βαθμού | 0,745 | 0,6865 | 1,5691 |
| 10×10 | 32 βαθμού | 0,9845 | 0,903 | 1,8177 |
| 10×10 | 33 βαθμού | 0,9877 | 0,9288 | 1,9737 |
| 10×10 | 34 βαθμού | 1,0366 | 0,977 | 2,0779 |
| 10×10 | 35 βαθμού | 1,01026 | 1,0741 | 2,1606 |
| 10×10 | 36 βαθμού | 1,1326 | 1,131 | 2,4079 |
| 10×10 | 37 βαθμού | 1,359 | 1,3466 | 2,7189 |
| 10×10 | 38 βαθμού | 1,4898 | 1,4511 | 2,9591 |
| 10×10 | 39 βαθμού | 1,8431 | 1,7986 | 3,3959 |
| 10×10 | 40 βαθμού | 1,6326 | 1,611 | 3,4043 |

Συμπεραίνουμε πως η τελευταία συνοδεύουσα μορφή για την εύρεση των ιδιοτιμών χρειάζεται πολύ περισσότερο χρόνο σε σχέση με την πρώτη και την δεύτερη συνοδεύουσα μορφή και αυτό οφείλετε στο ότι οι πρώτες δυο συνοδεύουσες μορφές δημιουργούν την γραμμικοποίηση απευθείας, ενώ στην τελευταία δημιουργούμε τον πινάκα ύστερα από μια σειρά γινομένων των πινάκων Ακ.

Τώρα θα αλλάξω τον αλγόριθμο ώστε να κρατήσουμε σταθερό τον βαθμό και θα αλλάζουμε τις διαστάσεις του πίνακα.

% d είναι h diastash tou pinaka opou tha meletisoyme apo 2x2 mexrei dxd

d=20

clear('A')

clear('time1')

clear('time2')

clear('time3')

% tha melethsoyme pinakes me bathmo deg

deg=11

h=0;

for j=2:d

A=rand(j,j);

for i=2:deg

A(:,:,i)=rand(j,j);

end

h=h+1;

tic();

[x,y,ee]=companion1(A);

time1(h)=toc()

tic();

[k,l,e]=companion2(A);

time2(h)=toc()

tic();

[x,y,ee]=elementarypencil(A,-[0:2:(deg-1)],[1:2:(deg-1)]);

time3(h)=toc()

end

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Διάσταση πινάκα | Μέγιστος βαθμός πινάκα | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της πρώτης συνοδεύουσας μορφής | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής | Χρόνος εύρεσης ιδιοτιμων με την χρίση της τελευταίας συνοδεύουσας μορφής |
| 2×2 | 10 βαθμού | 0,0009 | 0,0006 | 0,001 |
| 3×3 | 10 βαθμού | 0,0013 | 0,0015 | 0,0017 |
| 4×4 | 10 βαθμού | 0,0028 | 0,0039 | 0,0034 |
| 5×5 | 10 βαθμού | 0,0041 | 0,0041 | 0,006 |
| 6×6 | 10 βαθμού | 0,006 | 0,0061 | 0,0089 |
| 7×7 | 10 βαθμού | 0,0098 | 0,0103 | 0,0123 |
| 8×8 | 10 βαθμού | 0,0128 | 0,0126 | 0,0167 |
| 9×9 | 10 βαθμού | 0,0181 | 0,0163 | 0,0239 |
| 10×10 | 10 βαθμού | 0,0246 | 0,023 | 0,0293 |
| 11×11 | 10 βαθμού | 0,0289 | 0,029 | 0,0369 |
| 12×12 | 10 βαθμού | 0,037 | 0,0366 | 0,05 |
| 13×13 | 10 βαθμού | 0,0434 | 0,0464 | 0,06 |
| 14×14 | 10 βαθμού | 0,0541 | 0,0539 | 0,0721 |
| 15×15 | 10 βαθμού | 0,0655 | 0,0648 | 0,0836 |
| 16×16 | 10 βαθμού | 0,0756 | 0,0826 | 0,1026 |
| 17×17 | 10 βαθμού | 0,0901 | 0,0906 | 0,1202 |
| 18×18 | 10 βαθμού | 0,1047 | 0,1079 | 0,1426 |
| 19×19 | 10 βαθμού | 0,1208 | 0,1216 | 0,1732 |
| 20×20 | 10 βαθμού | 0,1478 | 0,1402 | 0,1926 |

Συμπεραίνουμε πως η τελευταία συνοδεύουσα μορφή για την εύρεση των ιδιοτιμών χρειάζεται περισσότερο χρόνο σε σχέση με την πρώτη και την δεύτερη συνοδεύουσα μορφή, κάτι που οφείλεται στους πολλαπλασιασμούς που γίνονται για την δημιουργία της.

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Η πτυχιακή εργασία είχε σαν σκοπό την ανάλυση των τρόπον εύρεσης ιδιοτιμών ενός τετράγωνου πινάκα, την εύρεση ιδιοτιμών για το γενικευμένο πρόβλημα ενός ζευγαριού πινάκων και την εύρεση ιδιοτιμών ενός πολυωνυμικού πίνακα. Επίσης υλοποιήσαμε στο matlab της ρουτίνες για την εύρεση των πολυωνυμικών πινάκων και με τις τρεις μορφές γραμμικοποίησης και τις χρονομετρήσαμε και τις συγκρίναμε μεταξύ τους και βγάλαμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα στο πως ανταποκρίνονται όταν μεταβάλουμε την διάσταση των πινάκων κρατώντας σταθερό τον μέγιστο βαθμό του πολυωνύμου και αντίστροφα.

***Βιβλιογραφία***

[1]Α. Δερμανης, Γραμμική Άλγεβρα Και Θεωρία Πινάκων , Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1998

[2]Π.-Χ.Γ.Βασιλειου και Γ.Τσακλιδης, Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1998

[3]G. Stephenson, Θεωρία πινάκων, Εκδόσεις Fountas

[4]Γ.Στεφανίδης και Ν.Σαμαράς, Υπολογιστικές μέθοδοι με matlab, Εκδόσεις Ζυγός

[5]Λ. Πιτσούλης, Αριθμητική Ανάλυση, Σημειώσεις ΑΠΘ 2007

[6]Σ. Βολογιαννιδη, Αλγευρο-Πολυωνυμικές Υπολογιστικές Μέθοδοι Στη Θεωρία Έλεγχου, Διδακτορική Διατριβή, ΑΠΘ 2005

[7]Μ. Γουσιδου και Μ. Κουτιτα, Ανώτερα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Αριθμητικές Μέθοδοι, Εκδόσεις Χριστοδουλίδη

[8]Ρουτίνα powerit, Διαθέσιμο στην διεύθυνση: <http://www.scribd.com/doc/2066731/Matlab-Tutorial4> [πρόσβαση 17-9-2009]