ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Φ υ σ ι κ ή

Μηχανική

Κωνσταντίνος Κλεΐδης

Δρ. Φυσικής

Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολογίας

Χρήστος Βοζίκης

Δρ. Φυσικής

Επιστημονικός Συνεργάτης

Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών

Σέρρες 2011

Ο επιστήμονας δεν μελετά την φύση επειδή αυτό είναι χρήσιμο.

Την μελετά γιατί αυτό τον ευχαριστεί.

Και τον ευχαριστεί γιατί η φύση είναι όμορφη.

Εάν η φύση δεν ήταν όμορφη, τότε δεν θα άξιζε τον κόπο να την γνωρίσουμε.

Και αν δεν άξιζε τον κόπο να την γνωρίσουμε, τότε δεν θα άξιζε τον κόπο να ζούμε!

Henri Poincaré

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 **Το Μαθηματικό Υπόβαθρο** 3
1.1 Εισαγωγικά 3
1.2 Παράγωγοι 3
1.2.1 Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων 4
1.2.2 Κανόνες Παραγώγισης 4
1.3 Ολοκληρώματα 6
1.3.1 Αόριστα Ολοκληρώματα 6
1.3.2 Ορισμένα Ολοκληρώματα 9
1.4 Λογάριθμοι 10
1.5 Τριγωνομετρία 11
1.6 Διανύσματα 12
1.6.1 Πράξεις Διανυσμάτων 13
1.6.2 Ανάλυση διανύσματος σε δύο συνιστώσες 17

Κεφάλαιο 2 **Φυσικά Μεγέθη** 19
2.1 Εισαγωγικά 19
2.2 Τα κυριότερα φυσικά μεγέθη 19
2.2.1 Το σύστημα αναφοράς 19
2.2.2 Το υλικό σημείο 20
2.2.3 Ο χρόνος 20
2.2.4 Η θέση 20
2.2.5 Η ταχύτητα 23
2.2.6 Η επιτάχυνση 25
2.3 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων 25
2.4 Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων 27

Κεφάλαιο 3 **Μηχανική Υλικού Σημείου** 35
3.1 Εισαγωγικά 35
3.2 Είδη Δυνάμεων 37
3.2.1 Δύναμη βαρύτητας 37
3.2.2 Δύναμη τριβής 40
3.2.3 Αντίσταση του αέρα 42
3.3 Ισορροπία 43
3.4 Στατική Ισορροπία 45
3.5 Δυναμική Ισορροπία 49
3.6 Κίνηση υπό την επίδραση δύναμης 54
3.6.1 Δύναμη σταθερή 54
3.6.2 Ομαλή κυκλική κίνηση 61
3.6.3 Δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου 70
3.6.4 Δύναμη ως συνάρτηση της θέσης 73
3.6.5 Δύναμη ως συνάρτηση της ταχύτητας 83

3.7 Ορμή − Ώθηση 86
3.8 Έργο − Ενέργεια 88
3.8.1 Διατηρητικές (Συντηρητικές) και μη διατηρητικές δυνάμεις. 93
3.8.2 Δυναμική Ενέργεια 93
3.8.3 Διατήρηση της Ενέργειας απομονωμένου συστήματος. 94
3.8.4 Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων υπολογισμού έργου και ενέργειας 99
3.9 Ισχύς 103

Κεφάλαιο 1

Το Μαθηματικό Υπόβαθρο

Τα μαθηματικά είναι η «γλώσσα» της Φυσικής.

1.1 Εισαγωγικά

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει, με τρόπο συνοπτικό, κάποιες από τις πολύ βασικές έννοιες των μαθηματικών. Υπ' αυτή την έννοια, αποτελεί για τον αναγνώστη του βιβλίου ένα σημείο αναφοράς και ως τέτοιο πρέπει να αντιμετωπιστεί.

Φυσικά, δεν αντικαθιστά οποιοδήποτε βιβλίο μαθηματικών, ούτε περιέχει κάτι που πρέπει να το αποστηθίσετε. Περιέχει μόνο μαθηματικές πληροφορίες τις οποίες θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε κατά την μελέτη των υπολοίπων κεφαλαίων. Η εντύπωση μας είναι πως, κατά την ανάγνωση του βιβλίου, θα χρειαστεί να επιστρέψετε πολλές φορές σ' αυτό το κεφάλαιο, για να ξαναδείτε και να θυμηθείτε τους διάφορους μαθηματικούς κανόνες και τα αντίστοιχα μεγέθη.

Τα περισσότερα μεγέθη μεταβάλλονται είτε με την θέση (x) ή την απόσταση (r), είτε με τον χρόνο (t). Είναι, δηλαδή, αυτό που λέμε, συναρτήσεις του x ή του t. Στο κεφάλαιο αυτό όταν αναφερόμαστε σε συναρτήσεις θα θεωρούμε ότι είναι συναρτήσεις του χρόνου t. Επειδή όμως οι κανόνες για τις συναρτήσεις είναι γενικοί, ότι ισχύει για τις συναρτήσεις του t, θα ισχύει και για τις συναρτήσεις του x, όπως και για τις συναρτήσεις οποιασδήποτε άλλης μεταβλητής (π.χ. $f(u)$).

Τα πλέον χρήσιμα στοιχεία των μαθηματικών στη Φυσική, είναι οι Παράγωγοι, τα Ολοκληρώματα και τα Διανύσματα. Κάποια στοιχεία από την Γεωμετρία, την Τριγωνομετρία και τους Λογαρίθμους είναι επίσης απαραίτητα.

1.2 Παράγωγοι

Η παράγωγος ενός μεγέθους που είναι συνάρτηση του χρόνου, είναι ο ρυθμός που μεταβάλλεται το μέγεθος αυτό, δηλαδή πόσο γρήγορα αυξάνεται ή μειώνεται το μέγεθος αυτό, καθώς αυξάνεται ο χρόνος.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(u)$ μιας μεταβλητής u, συμβολίζεται ως $\frac{df}{du}$, που σημαίνει “την απειροελάχιστη μεταβολή της f κάτω από μια απειροελάχιστη μεταβολή του u”.

Για λόγους ευκολίας, (οικονομία στο γράψιμο), πολλές φορές η παράγωγός μιας συνάρτησης f γράφεται με τον γνωστό “τόνο”, δηλαδή ως $f'(t)$. Ειδικά στην Φυσική, αν η συνάρτηση f είναι συνάρτηση του χρόνου t, τότε αντί του τόνου, πολλές φορές, γράφουμε μια τελεία πάνω από την συνάρτηση $\frac{d\upsilon}{dt} = \dot{\upsilon}(t)$.

Όπως είπαμε πιο πάνω, η παράγωγος ενός μεγέθους μας δίνει πόσο γρήγορα αυξάνεται ή μειώνεται το μέγεθος. Έτσι, αν η παράγωγος είναι

- θετική, $\frac{df}{dt} > 0$, το μέγεθος f αυξάνεται
- αρνητική, $\frac{df}{dt} < 0$, το μέγεθος f μειώνεται
- μηδέν, $\frac{df}{dt} = 0$, το μέγεθος f παραμένει σταθερό.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η παράγωγος μιας σταθερής ποσότητας (π.χ. ενός αριθμού) είναι μηδέν, $c' = 0$.

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, το μόνο που χρειάζεται είναι να γνωρίζουμε τις παραγώγους μερικών στοιχειωδών συναρτήσεων και τους κανόνες παραγώγισης.

1.2.1 Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

1. $\left(t^m\right)' = m\,t^{m-1}$ όπου m : αριθμός
2. $\left(e^t\right)' = e^t$
3. $\left(\ln t\right)' = \frac{1}{t} = t^{-1}$
4. $\left(\cos t\right)' = -\sin t$
5. $\left(\sin t\right)' = \cos t$

<u>Σημείωση</u>: Το $\sin(t)$ και το $\cos(t)$ είναι ο διεθνής τρόπος γραφής του ημ(t) και του συν(t), ενώ το e^t πολλές φορές γράφεται και ως $\exp(t)$.

1.2.2 Κανόνες Παραγώγισης

Αν $f_1(t)$ και $f_2(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου και c_1, c_2 είναι σταθεροί αριθμοί τότε ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης.

- Παράγωγος αθροίσματος ή διαφοράς

$$\left[c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)\right]' = c_1 f_1'(t) \pm c_2 f_2'(t) \tag{1.1}$$

- Παράγωγος γινομένου

$$[c_1 f_1(t)]' = c_1 f_1'(t) \tag{1.2}$$

$$[f_1(t) f_2(t)]' = f_1'(t) f_2(t) + f_1(t) f_2'(t) \tag{1.3}$$

- Παράγωγος Πηλίκου

$$\left[\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\right]' = \frac{f_1'(t) f_2(t) - f_1(t) f_2'(t)}{f_2^{\,2}(t)} \tag{1.4}$$

- Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f(u)$ της μεταβλητής u, όπου όμως το u είναι συνάρτηση του t, δηλαδή $u = u(t)$. Με άλλα λόγια έχουμε μια συνάρτηση $f(u(t))$. Τότε η παράγωγος της συνάρτησης f ως προς t, είναι ίση με την παράγωγο της f ως προς u, επί την παράγωγο της u ως προς t.

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\frac{du}{dt} \tag{1.5}$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(t) = t^4 + 2t^3 - 2t + 14$

$$\begin{aligned}(t^4 + 2t^3 - 2t + 14)' &= (t^4)' + (2t^3)' - (2t)' + (14)' = \\ &= 4t^3 + 2(3t^2) - 2(1) + 0 = \\ &= 4t^3 + 6t^2 - 2\end{aligned}$$

2) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(t) = t^2 e^t$

$$(t^2 e^t)' = (t^2)' e^t + t^2 (e^t)' = 2t\, e^t + t^2 e^t$$

3) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(t) = \tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

$$(\tan t)' = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)' = \frac{(\sin t)' \cos t - \sin t (\cos t)'}{\cos^2 t} = \frac{(\cos t)\cos t - \sin t(-\sin t)'}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ 1 + \tan^2 t \end{cases}$$

4) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(t) = \ln(t^2 + t)$

Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα της σύνθετης παραγώγισης. Αν θεωρήσουμε ότι $u = t^2 + t$ τότε η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί ως $f(u) = \ln u$. Έτσι

$$\frac{df}{du} = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dt} = 2t + 1 \text{ και } \frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}(2t+1) = \frac{1}{t^2+t}(2t+1) = \frac{2t+1}{t^2+t}$$

Ένας άλλος τρόπος γραφής της ίδιας πράξης είναι

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\left[\ln(t^2+t)\right]}{d(t^2+t)}\frac{d(t^2+t)}{dt} = \frac{1}{t^2+t}(2t+1) = \frac{2t+1}{t^2+t}$$

1.3 Ολοκληρώματα

Η ολοκλήρωση είναι μια πράξη αντίθετη της παραγώγισης. Δηλαδή:

> Από το γνωστό ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους (παράγωγος της συνάρτησης), ολοκληρώνοντας, μπορώ να προσδιορίσω αυτό το μέγεθος.

Υπάρχουν δύο ειδών ολοκληρώματα.

1.3.1 Αόριστα Ολοκληρώματα

Το αποτέλεσμα ενός αόριστου ολοκληρώματος είναι μία νέα <u>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.</u>

$$\int f(t)dt = F(t) + c$$

Αυθαίρετη Σταθερά! Υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες (δηλαδή τι ισχύει για το μέγεθος $F(t)$ όταν $t = 0$)

Ολοκληρωτέα Ποσότητα

Διαφορικό Ολοκλήρωσης

Αποτέλεσμα = Συνάρτηση

Με βάση τον ορισμό :
Η $f(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της $F(t)$. Δηλαδή η $f(t)$ είναι η παράγωγος της $F(t)$! Οπότε

$$F(t)+c=\int f(t)\,dt=\int F'(t)\,dt=\int \frac{dF}{dt}dt=\int df \Rightarrow$$

$$\int df = F(t)+c$$

και ειδικότερα:

$$\int dt = t+c$$

Ολοκληρώματα Στοιχειωδών Συναρτήσεων

1. $\int t^m dt = \dfrac{t^{m+1}}{m+1}+c$ $\quad m$: αριθμός $\neq 1$
2. $\int \frac{1}{t}dt = \int t^{-1}dt = \ln|t|+c$
3. $\int e^t dt = e^t + c$
4. $\int \sin t\; dt = -\cos t + c$
5. $\int \cos t\; dt = \sin t + c$

Κανόνες Ολοκλήρωσης

Αν $f_1(t)$ και $f_2(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου και c_1, c_2 είναι σταθεροί αριθμοί τότε :

1. $\int c_1 f_1(t)\,dt = c_1 \int f_1(t)\,dt$

2. $\int [f_1(t) \pm f_2(t)]\,dt = \int f_1(t)\,dt \ \pm \int f_2(t)\,dt$
   Από την επίλυση των δύο ολοκληρωμάτων στο δεξί μέλος θα προκύψει μία μόνο αυθαίρετη σταθερή.

3. $\int f_1(t)\,f_2'(t)\,dt = f_1(t)\,f_2(t) - \int f_1'(t)\,f_2(t)\,dt \ + c$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\left(2t^3+\frac{3}{t}+e^t\right)dt$

$$\int\left(2t^3+\frac{3}{t}+e^t\right)dt=2\int t^3dt+3\int\frac{1}{t}dt+\int e^tdt=2\frac{t^4}{4}+3\ln|t|+e^t+c=$$
$$=\frac{t^4}{2}+3\ln|t|+e^t+c$$

2) Δίνεται το μέγεθος $K(t)=\int\left(3t^3+2t+1\right)dt$. Να βρεθεί η τιμή του $K(t)$ για $t=2$, αν γνωρίζουμε ότι, για $t=0$, $K=8$.

α) Πρώτα υπολογίζω το αόριστο ολοκλήρωμα

$$K(t)=\int\left(3t^3+2t+1\right)dt=3\int t^3dt+2\int t\,dt+\int dt=3\frac{t^4}{4}+2\frac{t^2}{2}+t+c=$$
$$=\frac{3}{4}t^4+t^2+t+c$$

β) Υπολογίζω την αυθαίρετη σταθερά c από τις αρχικές συνθήκες (για $t=0$, $K=8$).

$$K=\frac{3}{4}t^4+t^2+t+c\Rightarrow 8=\frac{3}{4}0^4+0^2+0+c\Rightarrow c=8$$

Έτσι, η πλήρης έκφραση του K είναι:

$$K(t)=\frac{3}{4}t^4+t^2+t+8$$

γ) Βάζω όπου t το 2 για να βρω την ζητούμενη τιμή το K

$$K(2)=\frac{3}{4}2^4+2^2+2+8=\frac{3}{4}16+4+2+8=12+4+2+8=26$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\left(\frac{1}{t^3}+\sqrt{t}\right)dt$

Γενικά, οι πράξεις με δυνάμεις είναι πολύ πιο εύκολες, παρά με κλάσματα και ρίζες. Έτσι χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες $\frac{1}{t^n}=t^{-n}$ και $\sqrt{t}=t^{1/2}$ το ολοκλήρωμα γράφεται.

$$\int\left(\frac{1}{t^3}+\sqrt{t}\right)dt=\int\left(t^{-3}+t^{1/2}\right)dt=\int t^{-3}dt+\int t^{1/2}dt=\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{3/2}}{3/2}+c=$$

$$=-\frac{2}{t^2}+\frac{2}{3}t^{3/2}+c$$

1.3.2 Ορισμένα Ολοκληρώματα

Το αποτέλεσμα ενός ορισμένου ολοκληρώματος είναι ΑΡΙΘΜΟΣ!

$$\int_a^b f(t)\,dt=\left[F(t)\right]_a^b=F(b)-F(a) \tag{1.6}$$

όπου $F(t)$ είναι η λύση του αόριστου ολοκληρώματος, δηλαδή $F(t)=\int f(t)\,dt$.

- ☆ Οι αριθμοί a και b κάτω και πάνω από το σύμβολο του ολοκληρώματος ονομάζονται <u>όρια</u> της ολοκλήρωσης
- ☆ Στα ορισμένα ολοκληρώματα <u>δεν</u> έχουμε αυθαίρετη σταθερά.
- ☆ Το σύμβολο $\left[F(t)\right]_a^b$ υποδηλώνει την πράξη $F(\text{για } t=b)-F(\text{για } t=a)$

Όλα αυτά θα γίνουν πιο κατανοητά με το παρακάτω παράδειγμα:

Να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^4\left(t^3+2t+3\right)dt$

Πρώτα λύνω το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int\left(t^3+2t+3\right)dt=\int t^3dt+2\int t\,dt+3\int dt=\frac{t^4}{4}+2\frac{t^2}{2}+3t+c=\frac{t^4}{4}+t^2+3t+c$$

Το c είναι περιττό, γιατί όπως θα δούμε παρακάτω αλληλοαναιρείται.

Έχουμε, λοιπόν, για το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^4\left(t^3+2t+3\right)dt=\left[\frac{t^4}{4}+t^2+3t+c\right]_1^4=\left[\frac{4^4}{4}+4^2+3\cdot4+c\right]-\left[\frac{1^4}{4}+1^2+3\cdot1+c\right]=$$

$$=64+16+12+c-\frac{1}{4}-1-3-c=88-\frac{1}{4}=\frac{352}{4}-\frac{1}{4}=\frac{351}{4}$$

Προσοχή!

Αν «τύχει» και κάποιο από τα δύο όρια της ολοκλήρωσης δεν είναι αριθμός, αλλά μια συνάρτηση μιας κάποιας μεταβλητής, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει συνάρτηση

Παράδειγμα το ολοκλήρωμα $\int_1^u t^3 dt$

Λύνω πρώτα το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα $\int t^3 dt = \frac{t^4}{4}$

Άρα $\int_1^u t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_1^u = \frac{u^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{1}{4}\left(u^4 - 1\right)$

1.4 Λογάριθμοι

Ο λογάριθμος είναι μια ιδιαίτερη χρήσιμη συνάρτηση και συναντάται σε πάρα πολλά προβλήματα Φυσικής.

Ως λογάριθμο με βάση το x (που συμβολίζεται ως $\log_x$), ενός αριθμού u ορίζουμε την συνάρτηση που μας δίνει την δύναμη y που πρέπει να υψώσουμε το x για να πάρουμε τον αριθμό u. Δηλαδή, αν $u = x^y$ τότε $\log_x u = y$

Έτσι έχουμε $\log_x x^y = y$ και $x^{\log_x u} = u$.

Αν η βάση του λογαρίθμου είναι το 10 (δεκαδικός λογάριθμος) τότε τον συμβολίζουμε απλά ως $\log$. Παραλείπουμε, δηλαδή, το 10 από την βάση.

Ο φυσικός ή Νεπέριος λογάριθμος έχει βάση τον αριθμό $e = 2{,}71828182845905...$ και συμβολίζεται με $\ln$ (logarithme naturel). Στην Φυσική συνήθως συναντάμε τους φυσικούς λογαρίθμους.

Ένα σημείο που πρέπει να προσέχουμε στους λογαρίθμους είναι ότι <u>δεν</u> ορίζεται ο λογάριθμος αριθμού που είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν.

Οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων είναι (οι παρακάτω ιδιότητες αναφέρονται στους φυσικούς λογαρίθμους, αλλά ισχύουν για λογαρίθμους με οποιαδήποτε βάση):

- Λογάριθμος γινομένου

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

- Λογάριθμος πηλίκου

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

- Λογάριθμος δύναμης

$$\ln\left(a^b\right) = b \ln a$$

- Αλλαγή βάσης λογαρίθμου

$$\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x} = \frac{\log y}{\log x} = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

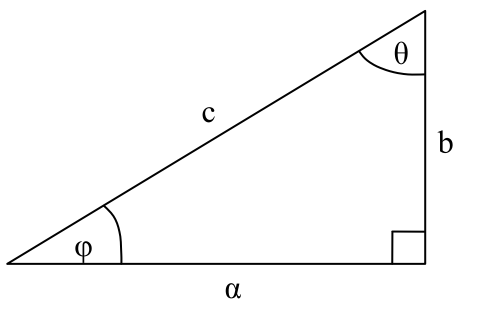
- Ειδικές τιμές για τους λογαρίθμους (για οποιαδήποτε βάση a)

$$\lim_{x \to 0}\left(\log_a x\right) = -\infty, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

1.5 Τριγωνομετρία

Στην Φυσική είναι ιδιαίτερα χρήσιμες μερικές (πολύ βασικές) τριγωνομετρικές σχέσεις.

Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο όπως αυτό του σχήματος 1.1



Σχήμα 1.1 *Ορθογώνιο τρίγωνο ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων*

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

Ημίτονο :

$$\sin\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{b}{c}$$

Συνημίτονο :

$$\cos\varphi = \frac{\text{προσκείμενη κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{a}{c}$$

Εφαπτομένη :

$$\tan\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετος}}{\text{προσκείμενη κάθετος}} = \frac{b}{a} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Από το σχήμα είναι φανερό ότι, αν $\varphi + \theta = 90^\circ$, τότε $\sin\varphi = \cos\theta$ και φυσικά $\cos\varphi = \sin\theta$.

Μερικές από τις πιο βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι οι:

- Θεμελιώδης τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad .$$

Η ταυτότητα αυτή δεν είναι τίποτα άλλο από το Πυθαγόρειο Θεώρημα «μεταφρασμένο» στην τριγωνομετρία. Πράγματι, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

- Ημίτονο αθροίσματος – διαφοράς γωνιών

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

- Συνημίτονο αθροίσματος – διαφοράς γωνιών

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Αν και συνήθως για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων χρησιμοποιούμε υπολογιστή, καλό είναι να γνωρίζουμε «απ' έξω» τις τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων για κάποιες «συνηθισμένες» γωνίες. Μια καλή και εύκολη να την θυμόμαστε μέθοδος είναι η εξής:

Για τον υπολογισμό του ημιτόνου έχουμε:

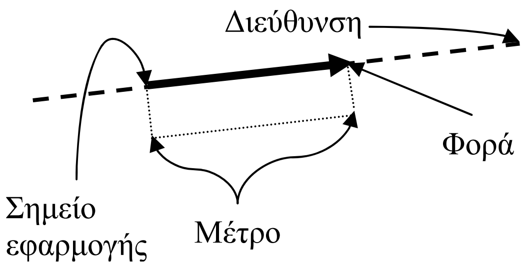
Γωνία φ	Τις αριθμώ	Παίρνω την ρίζα	Διαιρώ δια δύο	Τιμή του $\sin\varphi$
0°	0	$\sqrt{0}$	$\sqrt{0}/2$	0
30°	1	$\sqrt{1}$	$\sqrt{1}/2$	$1/2$
45°	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
90°	4	$\sqrt{4}$	$\sqrt{4}/2$	1

1.6 Διανύσματα

Πολλές φορές στην Φυσική, για να περιγράψουμε πλήρως κάποιο μέγεθος, δεν αρκεί μόνο η γνώση της τιμής του. Τα μεγέθη αυτά περιγράφονται από

<u>διανύσματα</u>, τα οποία είναι μαθηματικές οντότητες που έχουν ΤΕΣΣΕΡΑ χαρακτηριστικά!

Για παράδειγμα, για να προσδιορίσουμε την κίνηση ενός σώματος Α, δεν αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την τιμή της ταχύτητας του. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά (Σχήμα 1.2):



Σχήμα 1.2 *Τα χαρακτηριστικά ενός διανυσματικού μεγέθους.*

i. Τον άξονα, δηλαδή την ευθεία πάνω στην οποία κινείται. ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ

ii. Προς τα που κινείται πάνω σ’ αυτή την ευθεία. ΦΟΡΑ

iii. Σε ποιο σημείο αναφερόμαστε. ΣΗΜΕΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

iv. Την τιμή του φυσικού μεγέθους. ΜΕΤΡΟ

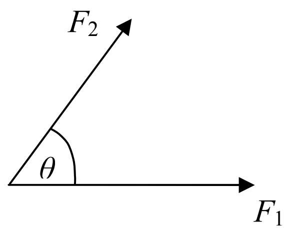
Όλα αυτά συνοψίζονται στο σύμβολο (διάνυσμα) $\vec{\upsilon}_A$, ενώ το μέτρο του εν λόγω μεγέθους συμβολίζεται ως $|\vec{\upsilon}_A|$ ή πιο συχνά υ_A.

1.6.1 Πράξεις Διανυσμάτων

Αν σε ένα πρόβλημα εμπλέκονται δύο ή περισσότερα διανύσματα τότε οι πράξεις που μπορούμε να κάνουμε είναι

<u>Α) Πρόσθεση διανυσμάτων</u>

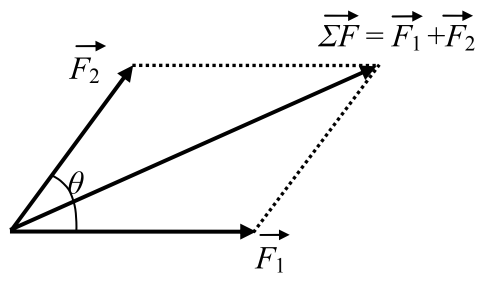
Έστω δύο διανύσματα $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία θ, (Σχήμα 1.3)



Σχήμα 1.3 *Δυο διανύσματα που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία.*

Αν από το πέρας του $\vec{F}_1$ φέρουμε παράλληλη προς το $\vec{F}_2$ και αντίστοιχα, από το πέρας του $\vec{F}_2$ φέρουμε παράλληλη προς το $\vec{F}_1$, τότε σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο όπως αυτό του Σχήματος 1.4.

Η κύρια διαγώνιος του παραλληλογράμμου αποτελεί το



Σχήμα 1.4 *Πρόσθεση διανυσμάτων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.*

άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, δηλαδή $\overrightarrow{\Sigma F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Το F ονομάζεται και συνισταμένη των δύο διανυσμάτων, $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Αντίστοιχα τα διανύσματα $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{\Sigma F}$.

Το μέτρο του $\overrightarrow{\Sigma F}$ δίνεται από την σχέση:

$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} \tag{1.7}$$

όπου, F_1 και F_2 τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα.

Ειδικές περιπτώσεις.

i. Αν τα διανύσματα είναι ομόρροπα (δηλαδή είναι παράλληλα και έχουν την ίδια φορά).

   Τότε, $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$.

   Άρα, $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2$ και η φορά του $\overrightarrow{\Sigma F}$ συμπίπτει με την φορά των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

ii. Αν τα διανύσματα είναι αντίρροπα (δηλαδή είναι παράλληλα και έχουν την αντίθετη φορά).

   Τότε, $\theta = \pi \ \ (180^\circ) \Rightarrow \cos\theta = -1$.

   Άρα, $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = |F_1 - F_2|$

   Το μέτρο μπαίνει σε απόλυτη τιμή γιατί πρέπει πάντα να είναι θετικό.

   Η φορά του $\overrightarrow{\Sigma F}$ συμπίπτει με την φορά του διανύσματος $\vec{F}_1$ ή $\vec{F}_2$ που έχει το μεγαλύτερο μέτρο.

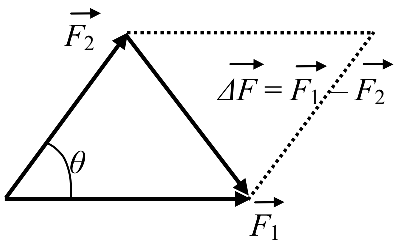
iii. Αν τα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα

   Τότε, $\theta = \dfrac{\pi}{2} \ \ (90^\circ) \Rightarrow \cos\theta = 0$.

   Άρα, $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

Β) Αφαίρεση διανυσμάτων

Προκύπτει και πάλι μέσω του κανόνα του παραλληλογράμμου. Μόνο που στην περίπτωση αυτή η διαφορά $\overrightarrow{\Delta F}$ των δύο διανυσμάτων συμπίπτει με την δευτερεύουσα διαγώνιο του παραλληλογράμμου (Σχήμα 1.5)



Σχήμα 1.5 *Αφαίρεση διανυσμάτων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.*

Η φορά του διανύσματος της διαφοράς $\overrightarrow{\Delta F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ είναι από το πέρας του δεύτερου διανύσματος στην αφαίρεση (του $\vec{F}_2$) προς το πέρας του πρώτου διανύσματος (του $\vec{F}_1$).

Στην περίπτωση που θέλαμε την διαφορά $\overrightarrow{\Delta F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$ τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta F}$ θα συνέπιπτε πάλι με την κύρια διαγώνιο αλλά η φορά του θα ήταν η αντίθετη, δηλαδή από το πέρας του $\vec{F}_1$ προς το πέρας του $\vec{F}_2$.

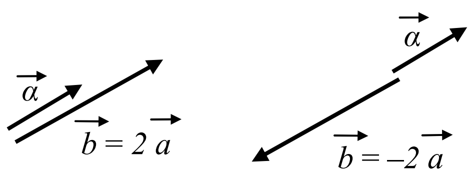
Το μέτρο του $\overrightarrow{\Delta F}$ και στις δύο περιπτώσεις θα ήταν:

$$\Delta F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta} \tag{1.8}$$

Παρατηρήστε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι σχεδόν ίδια με την εξίσωση του αθροίσματος (σχέση 1.7). Η μόνη διαφορά είναι το μείον στον τρίτο όρο.

Γ) Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού λ με ένα διάνυσμα $\vec{a}$ μας δίνει ένα νέο διάνυσμα $\vec{b}$, με μέτρο $b = |\lambda| a$ (το μέτρο είναι ΠΑΝΤΑ θετικό). Το διάνυσμα $\vec{b}$ είναι παράλληλο με το $\vec{a}$ και:



Σχήμα 1.6 *Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα.*

i. Αν $\lambda > 0$ είναι ομόρροπο

ii. Αν $\lambda < 0$ είναι αντίρροπο

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1. 6

Δ) Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

Ο πολλαπλασιασμός δύο διανυσμάτων μεταξύ τους είναι τελείως διαφορετικός από την αντίστοιχη πράξη μεταξύ αριθμών. Κατ' αρχήν, στα διανύσματα υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη γινομένου, το εσωτερικό γινόμενο και το εξωτερικό γινόμενο. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τα δύο αυτά γινόμενα αναλυτικά.

Δ1) Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ συμβολίζεται με τελεία ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) και το αποτέλεσμα της πράξης είναι ΑΡΙΘΜΟΣ.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία θ είναι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta \tag{1.9}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Διανύσματα ομόρροπα : $\theta = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους.

Ειδική περίπτωση:

$$(\vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = aa = a^2$$

Το τετράγωνο ενός διανύσματος είναι ίσο με το τετράγωνο του μέτρου του.

ii. Διανύσματα αντίρροπα : $\theta = \pi \quad (180°)$

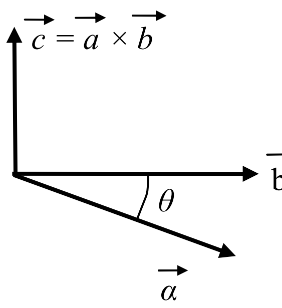
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$$

iii. Διανύσματα κάθετα : $\theta = \dfrac{\pi}{2} \quad (90°)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο εξής πόρισμα : Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι δύο διανύσματα κάθετα, είναι το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν.

Δ1) Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων



Σχήμα 1.7 *Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.*

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ συμβολίζεται ως $\vec{a}\times\vec{b}$ και το αποτέλεσμα της πράξης είναι ένα ΔΙΑΝΥΣΜΑ που είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ δίνεται από την σχέση

$$c = ab\sin\theta \tag{1.10}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά, είτε ομόρροπα, δηλαδή $\theta = 0$, είτε αντίρροπα, δηλαδή $\theta = \pi$

   Τότε $\sin\theta = 0$ και $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = 0$

   Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο εξής πόρισμα : Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι δύο διανύσματα παράλληλα, είναι το εξωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν.

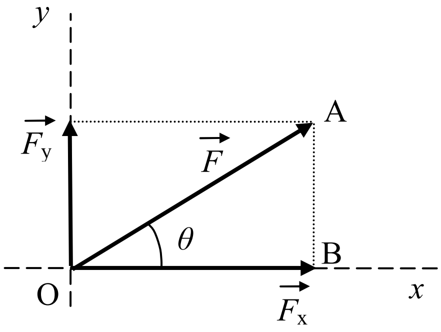
ii. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι κάθετα, δηλαδή $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

   Τότε $\sin\theta = 1$ και $c = ab$, δηλαδή το εξωτερικό γινόμενο παίρνει την μέγιστη τιμή.

1.6.2 Ανάλυση διανύσματος σε δύο συνιστώσες

Για να αναλύσω ένα διάνυσμα σε δύο συνιστώσες, αρχικά φέρνω δύο άξονες κάθετους μεταξύ τους (ορθογώνιο σύστημα). Επιλέγω τους άξονες έτσι ώστε να με διευκολύνουν στην επίλυση του προβλήματος μου. Έτσι, για παράδειγμα, αν θέλω να μελετήσω την κίνηση ενός αντικειμένου, επιλέγω τον ένα άξονα να είναι παράλληλος με την κίνηση του αντικειμένου και τον άλλο, φυσικά, κάθετο στην κίνηση.

Έστω, λοιπόν, ότι θέλω να αναλύσω το διάνυσμα $\vec{F}$ του Σχήματος 1.8 σε δύο συνιστώσες πάνω στους άξονες x και y. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ και με την βοήθεια της τριγωνομετρίας, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες F_x και F_y



Σχήμα 1.8 *Ανάλυση διανύσματος σε δύο συνιστώσες.*

όταν μας είναι γνωστά το μέτρο F του διανύσματος $\vec{F}$ και η γωνία θ που σχηματίζει η $\vec{F}$ με τον άξονα x, από τις σχέσεις.

$$F_x = F\cos\theta$$

$$F_y = F\sin\theta$$

Στην περίπτωση που γνωρίζουμε τις F_x και F_y και θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο F και την διεύθυνση θ της $\vec{F}$

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

Η συνάρτηση arctan είναι το τόξο εφαπτομένης (τοξεφ) που είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης και που μας δίνει την γωνία της οποίας η τιμή της εφαπτομένης είναι ίση με το όρισμα της arctan.

Κεφάλαιο 2

Φυσικά Μεγέθη

2.1 Εισαγωγικά

Όπως στην γλώσσα μας τα ουσιαστικά τα επίθετα και τα ρήματα συνδέονται μεταξύ τους με κάποιους γραμματικούς κανόνες για να μπορούμε να συνεννοηθούμε, έτσι και στην Φυσική υπάρχουν κάποιες βασικές έννοιες – μεγέθη, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με μαθηματικούς κανόνες. Κανόνες τους οποίους συναντήσαμε στο πρώτο Κεφάλαιο.

2.2 Τα κυριότερα φυσικά μεγέθη

Τα κυριότερα μεγέθη που συναντούμε στην μελέτη των φυσικών φαινομένων είναι:

2.2.1 Το σύστημα αναφοράς

Για να μελετήσουμε ένα οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο πρέπει πρώτα να επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων. Το σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από ένα, δύο ή τρεις άξονες, ανάλογα αν το φαινόμενο μας εξελίσσεται σε μία, δύο ή τρεις διαστάσεις και φυσικά μονάδες μέτρησης για τον κάθε άξονα. Το σύστημα συντεταγμένων, ή αλλιώς σύστημα αναφοράς είναι απαραίτητο για να μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις και να συσχετίσουμε τα διάφορα μεγέθη μεταξύ τους. Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων αποτελεί το σημείο αναφοράς, το σημείο δηλαδή της αρχής όλων των μετρήσεων.

Οι άξονες του συστήματος δεν είναι κατ’ ανάγκη πάντα ευθείες κάθετες μεταξύ τους, αν και αυτό το σύστημα (καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) είναι το πιο συνηθισμένο. Η επιλογή του συστήματος εξαρτάται από το πρόβλημα που μελετάμε. Έτσι όταν, για παράδειγμα, μελετάμε την πορεία ενός πλοίου ή ενός αεροπλάνου που ξεκινά από την Αυστραλία για την Ευρώπη είναι πολύ προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε σαν σύστημα συντεταγμένων το γεωγραφικό μήκος και πλάτος (δηλαδή γωνίες) παρά ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Αν το σύστημα συντεταγμένων είναι ακίνητο ή αν κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα (προς οποιαδήποτε διεύθυνση) τότε το σύστημα αυτό ονομάζεται **αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων**.

2.2.2 Το υλικό σημείο

Η πλέον βασική, απλοποιητική, υπόθεση. Ένα σώμα που έχει μάζα αλλά που δεν έχει διαστάσεις! Το αποτέλεσμα είναι ότι εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση. Μπορεί δηλαδή να μεταφερθεί από μία θέση σε μια άλλη αλλά δεν υπόκειται σε περιστροφές ή σε παραμορφώσεις, σε αντίθεση με οποιοδήποτε **εκτεταμένο**, ή όπως αλλιώς το ονομάζουμε, **στερεό**, σώμα (π.χ. μία ράβδο). Πολλές φορές, το υλικό σημείο αναφέρεται και ως **σημειακή μάζα**.

Πρακτικά, κάθε σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο, αρκεί οι διαστάσεις του να είναι πολύ μικρότερες από την τυπική κλίμακα του προβλήματος που εξετάζουμε. Για παράδειγμα η Γη μας, με διάμετρο κάτι λιγότερο από 13.000 km, θα μπορούσε κάλλιστα να θεωρηθεί ως υλικό σημείο εάν μελετούσαμε την κίνηση της γύρω από τον Ήλιο, αφού η διάμετρος της τροχιάς της γύρω από τον Ήλιο είναι περίπου 300.000.000 km. Στην περίπτωση αυτή η διάμετρος της Γης είναι το

$$\frac{13.000}{300.000.000} = 0,0000433 = 0,00433\%$$

της τυπικής κλίμακας του προβλήματος που καλούμαστε να μελετήσουμε.

2.2.3 Ο χρόνος

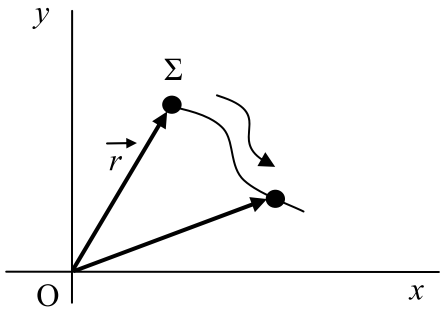
Είναι η βασικότερη μεταβλητή της Φυσικής, καθώς τα περισσότερα προβλήματα είναι συναρτήσεις του χρόνου. Αυτό που την καθιστά μοναδική είναι το γεγονός ότι έχει την ιδιότητα μόνο να <u>αυξάνει</u> . Συμβολίζεται με το γράμμα t (time) και στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) μετριέται σε s (second = δευτερόλεπτα).

2.2.4 Η θέση

Είναι μια συνάρτηση του χρόνου, η οποία υποδεικνύει την απόσταση από το κέντρο Ο του συστήματος συντεταγμένων στην οποία βρίσκεται το υλικό σημείο κάθε χρονική στιγμή. Είναι, στην ουσία ένα διάνυσμα $\vec{r}(t)$, που ονομάζεται **διάνυσμα θέσης**, με αρχή την αρχή Ο του συστήματος συντεταγμένων και πέρας το υλικό σημείο Σ (Σχήμα 2.1) και ακολουθεί την κίνηση του υλικού σημείου.

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, ένα διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες πάνω στους άξονες συντεταγμένων. Έτσι και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$

αναλύεται σε συνιστώσες πάνω στους άξονες. Αν για παράδειγμα έχουμε κίνηση του υλικού σημείου σε δύο διαστάσεις, όπως στο Σχήμα 2.1, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ του Σ μπορεί να γραφεί ως



Σχήμα 2.1 *Διάνυσμα θέσης υλικού σημείου Σ.*

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y \tag{2.1}$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ συναρτήσεις του χρόνου που μας δίνουν πως μεταβάλλεται η κάθε συντεταγμένη με την πάροδο του χρόνου και $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ τα μοναδιαία διανύσματα που ορίσαμε πάνω στους άξονες x και y αντίστοιχα. Η θέση λοιπόν του υλικού σημείου Σ προσδιορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$.

Αν η κίνηση γίνεται σε μια διάσταση, έστω στην ευθεία x, τότε μας χρειάζεται μόνο η συνάρτηση $x(t)$. Αντίστοιχα αν η κίνηση είναι στις τρεις διαστάσεις τότε η κίνηση του υλικού σημείου προσδιορίζεται πλήρως από τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$.

Στο διεθνές σύστημα μονάδων, η μονάδα θέσης είναι το μέτρο (m).

Προσοχή: Η θέση δεν πρέπει να συγχέεται με την απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων Α και Β ορίζεται ως:

- Σε μία διάσταση

$$d = \left| x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} \right| \tag{2.2}$$

- Σε δύο διαστάσεις

$$d = \sqrt{(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})^2 + (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}})^2} \tag{2.3}$$

- Σε τρεις διαστάσεις

$$d = \sqrt{(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})^2 + (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}})^2 + (z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}})^2} \tag{2.4}$$

και είναι <u>πάντα</u> θετική

Παράδειγμα:

Η θέση του Β είναι $x_{\mathrm{B}} = -2$ m, δηλαδή αριστερά του Ο.
Η θέση του Α είναι $x_{\mathrm{A}} = 1$ m, δηλαδή δεξιά του Ο.

Όμως η απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β είναι

$$d = \left| x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} \right| = \left| 1 - (-2) \right| = \left| 3 \right| = 3 \text{ m}$$

Παράδειγμα 2.1

Η θέση ενός υλικού σημείου πάνω στον άξονα x περιγράφεται από την παρακάτω συνάρτηση του χρόνου. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται και **εξίσωση κίνησης**.

$$x(t) = 2t^2 - 6t - 20$$

όπου το x μετριέται σε m και το t σε s.

α) Να προσδιοριστεί η θέση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή $t = 10$ s.

β) Ποια η φυσική σημασία του παράγοντα –20 στην εξίσωση της κίνησης;

<u>Λύση</u>

α) Για $t = 10$ s η συνάρτηση της θέσης $x(t)$ γράφεται

$$x(t = 10) = 2 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 - 20 = 120 \text{ m}$$

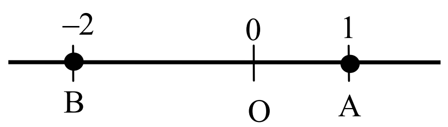
Άρα το υλικό σημείο βρίσκεται δεξιά του Ο και σε απόσταση 120 m από αυτό.

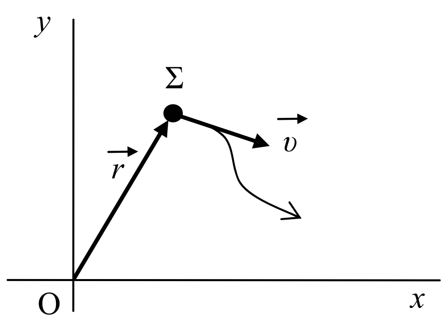
β) Για $t = 0$ s η συνάρτηση της θέσης $x(t)$ γράφεται

$$x(t = 0) = 2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 20 = -20 \text{ m}$$

Δηλαδή ο όρος –20 αποτελεί την αρχική απομάκρυνση από το σημείο Ο. Έτσι την χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο βρίσκεται 20 m αριστερά του σημείου Ο.

□





Σχήμα 2.2 *Διάνυσμα της ταχύτητας του υλικού σημείου Σ.*

2.2.5 Η ταχύτητα

Η ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$) αποτελεί τον ρυθμό μεταβολής της θέσης. Είναι δηλαδή η παράγωγος της θέσης $\vec{r}(t)$ ως προς τον χρόνο.

$$\vec{\upsilon}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \tag{2.5}$$

Φυσικά, όπως βλέπουμε και στην παραπάνω σχέση, η ταχύτητα είναι διάνυσμα. Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι σε κάθε σημείο εφαπτόμενο της τροχιάς που εκτελεί το υλικό σημείο (Σχήμα 2.2)

Στην περίπτωση που η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση, η ταχύτητα δίνεται απλά από την σχέση

$$\upsilon(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \tag{2.6}$$

Αν όμως η κίνηση γίνεται σε δύο διαστάσεις τότε από τις εξισώσεις 2.1 και 2.5 έχουμε

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y = \upsilon_x\vec{e}_x + \upsilon_y\vec{e}_y \tag{2.7}$$

Η ταχύτητα δηλαδή αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

την ταχύτητα ως προς τον άξονα x

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \tag{2.8}$$

και την ταχύτητα ως προς τον άξονα y

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} \tag{2.9}$$

Το μέτρο υ της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ στην περίπτωση των δύο διαστάσεων θα είναι

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2}} \tag{2.10}$$

Αντίστοιχα, για τις τρεις διαστάσεις θα έχουμε τρεις συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} \qquad \text{και} \qquad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \tag{2.11}$$

Μονάδα μέτρησης της ταχύτητας στο διεθνές σύστημα μονάδων είναι το m/s. Στην καθημερινή μας όμως ζωή η πιο συνηθισμένη μονάδα μέτρησης της ταχύτητας είναι τα χιλιόμετρα ανά ώρα, km/h. Μπορούμε εύκολα να μετατρέψουμε τα km/h σε m/s αρκεί να θυμηθούμε ότι 1 km έχει 1000 m και 1 h έχει 3600 s. Έτσι

$$1\,\frac{km}{h} = 1\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{1}{3,6}\,\frac{m}{s}$$

Για να μετατρέψουμε, δηλαδή, τα km/h σε m/s, αρκεί να τα διαιρέσουμε με το 3,6.

Εφόσον η ταχύτητα είναι η παράγωγος της θέσης, άρα η θέση θα είναι το ολοκλήρωμα της ταχύτητας.

$$\vec{r}(t) = \int \vec{\upsilon}(t)dt \tag{2.12}$$

Στην περίπτωση που η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση, στον άξονα x η παραπάνω σχέση γράφεται απλά

$$x(t) = \int \upsilon(t)dt \tag{2.13}$$

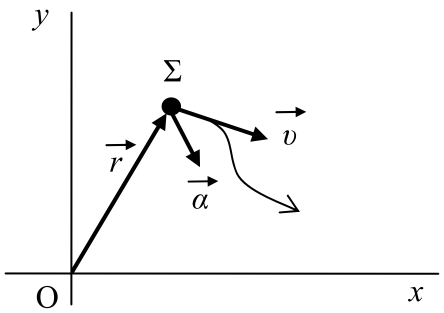
Αν η κίνηση γίνεται σε περισσότερες διαστάσεις, τότε η συνισταμένη της θέσης σε κάθε διάσταση είναι το ολοκλήρωμα της αντίστοιχης ταχύτητας.

$$x(t) = \int \upsilon_x(t)dt \qquad y(t) = \int \upsilon_y(t)dt \qquad z(t) = \int \upsilon_z(t)dt \tag{2.14}$$

Φυσικά, λόγω του ότι η κάθε εξίσωση της θέσης προέρχεται από ολοκλήρωμα, θα περιέχει και μια αυθαίρετη σταθερή, η οποία θα προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες.

2.2.6 Η επιτάχυνση

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$. Είναι δηλαδή η παραγωγός της ταχύτητας $\vec{\upsilon}(t)$ ως προς τον χρόνο.



Σχήμα 2.3 *Διάνυσμα της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Σ.*

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{\upsilon}}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \tag{2.15}$$

Επιπλέον, καθώς $\vec{\upsilon}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ προκύπτει

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{2.16}$$

Είναι δηλαδή η δεύτερη παράγωγος της θέσης.

Όπως και για την ταχύτητα, σε περίπτωση που έχουμε κίνηση σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις το διάνυσμα της επιτάχυνσης αναλύεται σε συνιστώσες για τον κάθε άξονα.

$$\vec{a}(t) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \tag{2.17}$$

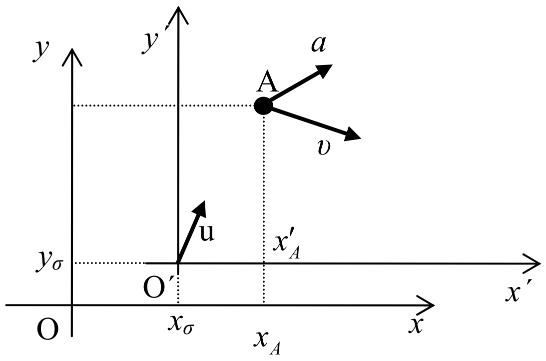
όπου

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{2.18}$$

Μονάδα μέτρησης της επιτάχυνσης είναι στο SI το m/s^2.

2.3 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Σε πολλά προβλήματα της Φυσικής η επιλογή του κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων είναι από τα πρώτα βασικά θέματα που μπορούν να μας οδηγήσουν σε μια εύκολη επίλυση του προβλήματος.



Σχήμα 2.4 *Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων.*

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy (Σχήμα 2.3) και ένα σώμα βρίσκεται στην θέση Α, έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και επιτάχυνση $\vec{a}$.

Έστω ότι έχουμε και ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων O΄x΄y΄ το οποίο έχει άξονες παράλληλους με το Oxy και κινείται σε σχέση με αυτό με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$.

Την χρονική στιγμή t το κέντρο O΄ του συστήματος O΄x΄y΄ έχει συντεταγμένες ως προς το Oxy (x_σ, y_σ). Ζητάμε να βρούμε την θέση , την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος στο νέο σύστημα συντεταγμένων O΄x΄y΄

Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 2.4, οι συντεταγμένες του σημείου Α ως προς το σύστημα O΄x΄y΄ είναι

$$x'_A = x_A - x_\sigma$$

$$y'_A = y_A - y_\sigma$$

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 2.2.5 η ταχύτητα ενός σώματος είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του (δηλαδή η παράγωγος της θέσης του ως προς τον χρόνο). Άρα:

$$\upsilon'_x = \frac{dx'_A}{dt} = \frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_\sigma}{dt} \quad \Rightarrow \upsilon'_x = \upsilon_x - u_x$$

$$\upsilon'_y = \frac{dy'_A}{dt} = \frac{dy_A}{dt} - \frac{dy_\sigma}{dt} \quad \Rightarrow \upsilon'_y = \upsilon_y - u_y$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η ταχύτητα του σώματος στο νέο (κινούμενο) σύστημα συντεταγμένων είναι ίση με την ταχύτητα του σώματος στο παλαιό σύστημα μείον την ταχύτητα που κινείται το νέο σύστημα σε σχέση με το παλαιό

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$$

Αντίστοιχα, η επιτάχυνση στο νέο σύστημα θα είναι, σύμφωνα με την παράγραφο 2.2.6, η παράγωγος της ταχύτητας του σώματος ως προς τον χρόνο. Δηλαδή:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Εφόσον το νέο σύστημα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$, τότε η παράγωγος της $\vec{u}$ ως προς τον χρόνο είναι μηδέν και η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η επιτάχυνση δεν αλλάζει αν αλλάζουμε από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο επίσης αδρανειακό σύστημα.

Το παραπάνω συμπέρασμα αποτελεί την βασική αρχή της Θεωρίας της Σχετικότητας σύμφωνα με την οποία οι νόμοι της Φυσικής δεν αλλάζουν αν από ένα αδρανειακό σύστημα πάμε σε ένα άλλο, επίσης αδρανειακό σύστημα.

Άμεσο συμπέρασμα είναι ότι αν ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε πάντοτε να βρούμε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα στο οποίο το σώμα να είναι ακίνητο!

2.4 Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

Με βάση τα παραπάνω, εάν γνωρίζουμε τη συνάρτηση της θέσης ενός υλικού σημείου (εξισώσεις κίνησης), τότε, με διαδοχικές παραγωγίσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε τόσο την ταχύτητα του, όσο και την επιτάχυνσή του.

Αν $x(t)$ είναι γνωστή συνάρτηση

Τότε

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt}$$

και

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Αντιστρόφως, εάν γνωρίζουμε την επιτάχυνση ενός υλικού σημείου, τότε, με διαδοχικές ολοκληρώσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε τόσο την ταχύτητα, όσο και την θέση του.

Αν $a(t)$ είναι γνωστή συνάρτηση

Τότε

$$\upsilon(t) = \int a(t)\, dt$$

και

$$x(t) = \int \upsilon(t)\, dt$$

Φυσικά, όπως προαναφέραμε, για να βρούμε την ακριβή σχέση για το $\upsilon(t)$ και το $x(t)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές σε κάθε ολοκλήρωμα. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να γνωρίζουμε την θέση και την ταχύτητα του υλικού σημείου για κάποια χρονική στιγμή, συνήθως για $t = 0$.

Παράδειγμα 2.2

Η εξίσωση κίνησης ενός υλικού σημείου, που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 6t + 20$$

όπου τα μεγέθη x και t μετρούνται σε m και s αντίστοιχα.

α) Ποια η φυσική σημασία του παράγοντα +20

β) Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου

i. Συναρτήσει του χρόνου
ii. Κατά την χρονική στιγμή $t = 2$ s

γ) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία η φορά της κίνησης του υλικού σημείου αντιστρέφεται. Πόσο απέχει τότε το κινητό από την αρχή των αξόνων;

Λύση

α) Την χρονική στιγμή $t = 0$ η (αρχική) θέση του υλικού σημείου είναι

$$x(0) = -\frac{1}{3}0^3 + \frac{5}{2}0^2 + 6 \cdot 0 + 20 = 20 \text{ m}$$

Δηλαδή 20 m δεξιά του Ο.

β) Απ' την στιγμή που είναι γνωστή η συνάρτηση της θέσης $x(t)$, η ταχύτητα του υλικού σημείου μπορεί να υπολογιστεί με μια απλή παραγώγηση:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}3t^2 + \frac{5}{2}2t + 6 \Rightarrow$$

$$\upsilon(t) = -t^2 + 5t + 6$$

για $t = 2$

$$\upsilon(2) = -2^2 + 5 \cdot 2 + 6 = -4 + 10 + 6 = 12$$

Άρα, την χρονική στιγμή $t = 2$ s, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι 12 m/s

Αντίστοιχα η επιτάχυνση θα προκύψει από την παράγωγο της ταχύτητας

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = -2t + 5$$

για $t = 2$

$$a(2) = -2 \cdot 2 + 5 = -4 + 5 = 1$$

Άρα, την χρονική στιγμή $t = 2$ s, η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι 1 m/s^2

γ) Για να αναστραφεί η φορά της κίνησης, θα πρέπει πρώτα το υλικό σημείο <u>να σταματήσει</u>. Έτσι, κατά την χρονική στιγμή που η φορά της κίνησης αντιστρέφεται θα ισχύει :

$$\upsilon = 0$$

από την οποία συνεπάγεται:

$$\upsilon = 0 \Rightarrow -t^2 + 5t + 6 = 0$$

Επιλύοντας την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχουμε

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)6}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} = \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 6 \end{cases}$$

Η λύση $t = -1$ <u>απορρίπτεται</u> διότι δεν νοείται αρνητικός χρόνος.

Άρα η μόνη σωστή λύση του προβλήματος είναι η $t = 6$ s. Δηλαδή, η χρονική στιγμή κατά την οποία η φορά της κίνησης αντιστρέφεται είναι η

Την χρονική στιγμή $t = 6$ s το υλικό σημείο θα βρίσκεται στην θέση

$$x(6) = -\frac{1}{3}6^3 + \frac{5}{2}6^2 + 6 \cdot 6 + 20 = -72 + 90 + 36 + 20 = 74 \text{ m}$$

Δηλαδή, στα δεξιά του Ο και σε απόσταση 74 m από αυτό.

□

Παράδειγμα 2.3

Η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου, που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται από την σχέση:

$$a(t) = 2t$$

όπου τα μεγέθη a και t μετρούνται σε m και s αντίστοιχα. Αν το υλικό σημείο την χρονική στιγμή $t = 0$ βρισκόταν ακίνητο στην θέση $x = 5$ m, να προσδιοριστεί η θέση του μετά από παρέλευση 3 s.

Λύση

Από την συνάρτηση της επιτάχυνσης, που μας είναι γνωστή, μπορούμε, με ολοκλήρωση, να υπολογίσουμε την ταχύτητα του υλικού σημείου, ως συνάρτηση του χρόνου. Έτσι θα έχουμε:

$$\upsilon(t) = \int a(t)dt = \int 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2} + c_1 \Rightarrow$$

$$\upsilon(t) = t^2 + c_1$$

Η άγνωστη σταθερή c_1 θα προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες. Σύμφωνα με το πρόβλημα, το υλικό σημείο, κατά την χρονική στιγμή $t = 0$, είναι ακίνητο, δηλαδή $\upsilon = 0$. Οπότε έχουμε:

$$\upsilon(t) = t^2 + c_1 \Rightarrow 0 = 0^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

και κατά συνέπεια :

$$\upsilon(t) = t^2$$

Αντίστοιχα, από την γνωστή πια συνάρτηση της ταχύτητας, θα υπολογίσουμε, με ολοκλήρωση, την συνάρτηση της θέσης του υλικού σημείου

$$x(t) = \int \upsilon(t)dt = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + c_2$$

Η άγνωστη σταθερή c_2 θα προσδιοριστεί και πάλι από τις αρχικές συνθήκες. Με βάση την εκφώνηση του προβλήματος, όταν $t = 0$, $x = 5$, οπότε:

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + c_2 \Rightarrow 5 = \frac{0^3}{3} + c_2 \Rightarrow c_2 = 5$$

Έτσι:

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + 5$$

Η θέση, λοιπόν, του υλικού σημείου μετά την παρέλευση των 3 s, θα είναι

$$x(t = 3) = \frac{3^3}{3} + 5 = \frac{27}{3} + 5 = 9 + 5 = 14 \text{ m}$$

□

Παράδειγμα 2.4

Η ταχύτητα ενός υλικού σημείου δίνεται από την σχέση

$$\upsilon(t) = 2t$$

Αν για $t = 0$ το σώμα είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων, να βρεθεί η θέση και η επιτάχυνσή του κατά την χρονική στιγμή $t = 10$ s. Όλα τα μεγέθη μετρούνται στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI).

Λύση

Αφού η ταχύτητα είναι η παράγωγος της θέσης, η θέση μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας την ταχύτητα. Έτσι

$$x(t) = \int \upsilon(t) dt = \int 2t\, dt = t^2 + c$$

Από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος γνωρίζουμε ότι για $t = 0$, $x = 0$ (αρχή των αξόνων). Αρά η σταθερή c είναι ίση με

$$x(t) = t^2 + c \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

και η εξίσωση της θέσης γίνεται μετά την αντικατάσταση της τιμής του c:

$$x(t) = t^2$$

Για $t = 10$ s η παραπάνω εξίσωση μας δίνει ότι το υλικό σημείο θα είναι στην θέση

$$x = 10^2 = 100 \text{ m}$$

Απ' την άλλη μεριά, ως γνωστόν, η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας. Έτσι, έχοντας γνωστή την σχέση της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου, μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση με μια απλή παραγώγιση.

$$a(t) = \dot{\upsilon}(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = 2 \ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}$$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή. Έχει δηλαδή την ίδια τιμή σε κάθε χρονική στιγμή. Άρα και για $t = 10$ s η επιτάχυνση θα είναι $a(t = 10) = 2 \ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}$

□

Όπως έχουμε ήδη πει, η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι διανυσματικά μεγέθη. Στην περίπτωση όμως της μονοδιάστατης (ευθύγραμμης) κίνησης, όπως στις προηγούμενες ασκήσεις, αυτό δεν έχει και μεγάλη σημασία. Η διεύθυνση των διανυσμάτων αυτών συμπίπτει πάντοτε με τον άξονα των x, ενώ η φορά τους γίνεται εμφανής με το πρόσημο των συναρτήσεων $x(t)$, $\upsilon(t)$ και $a(t)$. Αν το πρόσημο είναι θετικό τότε η φορά των διανυσμάτων είναι προς τα δεξιά, ενώ αν είναι αρνητικό η φορά είναι προς τα αριστερά.

Παράδειγμα 2.5

Η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου που κινείται στο επίπεδο x–y δίνεται από την σχέση

$$\vec{a}(t) = 2\vec{e}_x + 6t\,\vec{e}_y$$

Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή $t = 2$ s, αν γνωρίζουμε ότι το υλικό σημείο την χρονική στιγμή $t = 0$ ήταν ακίνητο στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Οι εξισώσεις της επιτάχυνσης (συνιστώσες) σε κάθε μία από τις δύο διαστάσεις, δηλαδή κατά την διεύθυνση του άξονα x και κατά την διεύθυνση του άξονα y, είναι

$$a_x(t) = 2 \qquad \text{και} \qquad a_y(t) = 6t$$

Οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας μπορούν να βρεθούν με ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων

Οι σταθερές c_1 και c_2 θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες. Γνωρίζουμε ότι όταν $t = 0$ το υλικό σημείο ήταν ακίνητο, δηλαδή $\upsilon_x(t = 0) = 0$ και $\upsilon_y(t = 0) = 0$. Έτσι λοιπόν για τις σταθερές c_1 και c_2 έχουμε:

$$\upsilon_x(0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\upsilon_y(0) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών καταλήγουμε ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon_x(t) = 2t \qquad \text{και} \qquad \upsilon_y(t) = 3t^2$$

Το διάνυσμα, λοιπόν, της ταχύτητας θα είναι

$$\vec{\upsilon}(t) = 2t\,\vec{e}_x + 3t^2\,\vec{e}_y$$

ενώ το μέτρο της

$$\upsilon(t) = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$$

και η γωνία φ που σχηματίζει κάθε χρονική στιγμή το διάνυσμα της ταχύτητας με τον άξονα των x

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right) = \arctan\left(\frac{3t^2}{2t}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}t\right)$$

Για την θέση έχουμε αντίστοιχα:

$$x(t) = \int \upsilon_x(t)dt = \int 2t\,dt = t^2 + c_3$$

$$y(t) = \int \upsilon_y(t)dt = \int 3t^2\,dt = t^3 + c_4$$

Οι σταθερές c_3 και c_4 θα υπολογιστούν επίσης από τις αρχικές συνθήκες. Γνωρίζουμε ότι όταν $t = 0$ το υλικό σημείο ήταν στην αρχή των αξόνων, δηλαδή $x(t = 0) = 0$ και $y(t = 0) = 0$. Έτσι λοιπόν για τις σταθερές c_3 και c_4 έχουμε:

$$x(t = 0) = 0 \Rightarrow 0^2 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$y(t = 0) = 0 \Rightarrow t^3 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

και οι εξισώσεις του $x(t)$ και $y(t)$ γράφονται

$$x(t) = t^2 \qquad , \qquad y(t) = t^3$$

Έτσι, λοιπόν, καταλήγουμε ότι το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου δίνεται από την σχέση:

$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{e}_x + t^3\,\vec{e}_y$$

του οποίου το μέτρο είναι

$$r = \sqrt{\left(t^2\right)^2 + \left(t^3\right)^2} = \sqrt{t^4 + t^6} = t^2\sqrt{1 + t^2}$$

και η γωνία με τον άξονα των x

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{t^3}{t^2}\right) = \arctan(t)$$

Η θέση λοιπόν του υλικού σημείου την χρονική στιγμή $t = 2$ s είναι

$$x(t = 2) = 2^2 = 4 \qquad , \qquad y(t = 2) = 2^3 = 8$$

δηλαδή το σημείου (4, 8).

□

Κεφάλαιο 3

Μηχανική Υλικού Σημείου

3.1 Εισαγωγικά

Σχέση αιτίου – αποτελέσματος : Μία κοσμική σύμβαση!

«Για οτιδήποτε συμβαίνει στην φύση (αποτέλεσμα), υπάρχει ΠΑΝΤΑ και το αντίστοιχο αίτιο!»

Αίτιο ⟶ Αποτέλεσμα

Η παραπάνω κοσμική σύμβαση βρίσκει την πιο αντιπροσωπευτική εφαρμογή της στην επιστήμη της Φυσικής

Δύναμη ⟶ Κίνηση

«Η επίδραση μη μηδενικής εξωτερικής δύναμης έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της κινητικής κατάστασης (δηλαδή την αλλαγή της ταχύτητας) ενός υλικού σημείου.»

Η μαθηματική έκφραση της παραπάνω πρότασης είναι

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \tag{3.1}$$

Η εξίσωση (3.1), η οποία συνδέει το αίτιο (δύναμη) με το αποτέλεσμα (επιτάχυνση) αποτελεί τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής και ισχύει κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες.

Ας δούμε λίγο τα μεγέθη που απαρτίζουν την εξίσωση (3.1)

1) Η δύναμη $\vec{F}$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση και φορά αυτή της επιτάχυνσης, σημείο εφαρμογής το υλικό σημείο και μέτρο ανάλογο του μέτρου της επιτάχυνσης,

$$F = m\,a \tag{3.2}$$

.

Μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το N (Newton) που ισούται με 1 $\mathrm{kg}\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}$. Στην περίπτωση που στο υλικό σημείο εξασκούνται περισσότερες από μία δυνάμεις τότε στην θέση του $\vec{F}$ στην εξίσωση (3.1) πρέπει να μπει το διανυσματικό άθροισμα όλων αυτών των επιμέρους δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων.

Αν το διάνυσμα της δύναμης, και κατά συνέπεια και η επιτάχυνση, είναι παράλληλο και με ίδια φορά με το διάνυσμα της ταχύτητας, τότε το υλικό σημείο <u>επιταχύνεται</u> (το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται).

Αν το διάνυσμα της δύναμης είναι παράλληλο αλλά με αντίθετη φορά με το διάνυσμα της ταχύτητας, τότε το υλικό σημείο <u>επιβραδύνεται</u> (το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται).

Αν το διάνυσμα της δύναμης είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας τότε το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται, αλλά αλλάζει η διεύθυνση του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το υλικό σημείο να <u>στρίβει</u>.

Έτσι, στην γενική περίπτωση, που τα διανύσματα της δύναμης και της επιτάχυνσης σχηματίζουν κάποια γωνία μεταξύ τους, τότε μπορούμε να αναλύσουμε το διάνυσμα της δύναμης σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη με την ταχύτητα και μία κάθετη. Η παράλληλη συνιστώσα της δύναμης θα επιταχύνει ή θα επιβραδύνει, ανάλογα με την φορά της, το υλικό σημείο, ενώ η κάθετη συνιστώσα θα το στρίψει.

Αν, τέλος, στο υλικό σημείο δεν εξασκείται καμία δύναμη, ή η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, τότε και η επιτάχυνση είναι μηδέν και το υλικό σημείο <u>ισορροπεί</u>.

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{\upsilon} = \text{σταθερή (και μέτρο και διεύθυνση)} \tag{3.3}$$

Με βάση την εξίσωση (3.3) διακρίνουμε δύο είδη ισορροπίας

- $\upsilon = \text{σταθερή} \neq 0$ $\rightsquigarrow$ <u>Δυναμική ισορροπία</u>
Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα δηλαδή ευθύγραμμα και ομαλά.
- $\upsilon = 0$ $\rightsquigarrow$ <u>Στατική ισορροπία</u>
Το σώμα παραμένει ακίνητο.

2) Η μάζα *m*

Είναι μονόμετρο μέγεθος (όχι διανυσματικό) και αποτελεί το μέτρο της αντίστασης του υλικού σημείο στην αλλαγή της κινητικής του κατάστασης.

Πράγματι από την εξίσωση (3.2) προκύπτει ότι:

$$a = \frac{1}{m} F \tag{3.4}$$

Δηλαδή, αν διατηρήσουμε την δύναμη σταθερή, τότε, όσο μεγαλώνει η μάζα τόσο ελαττώνεται η επιτάχυνση.

Μονάδα μέτρησης της μάζας m στο SI είναι το kg (kilogram, χιλιόγραμμο ή, όπως πιο συχνά ονομάζεται, κιλό).

Το μέγεθος m ονομάζεται "μάζα αδρανείας" και σε καθημερινές, ανθρώπινες καταστάσεις συμπίπτει (με ακρίβεια τουλάχιστον 9 δεκαδικών ψηφίων) με την "μάζα βαρύτητας" ενός σώματος, δηλαδή με το συνολικό ποσό της ύλης που περικλείεται στον όγκο του σώματος. Για τον λόγο αυτό, σε ότι ακολουθεί, δεν θα γίνεται διάκριση ανάμεσα στα δύο αυτά είδη "μάζας".

3.2 Είδη Δυνάμεων

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη των καταστάσεων ισορροπίας και κίνησης των υλικών σημείων καλό είναι να γνωρίσουμε ορισμένες από τις πιο συνηθισμένες δυνάμεις που συναντούμε στη φύση.

3.2.1 Δύναμη βαρύτητας

Ανάμεσα σε δύο σώματα, με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, αναπτύσσεται μία ελκτική δύναμη που είναι ανάλογή με το γινόμενο των δύο μαζών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους r. Η δύναμη αυτή έχει την διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τις δύο μάζες.

Η μαθηματική έκφραση της παραπάνω δύναμης, που ασκείται από την μάζα m_1 στην μάζα m_2, είναι:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 \, m_2}{r^2} \hat{r} \tag{3.5}$$

και αποτελεί τον νόμο της Παγκόσμιας Έλξης του Νεύτωνα (Newton). Το G στην παραπάνω σχέση ονομάζεται «Σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης» και είναι ίση με

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N\,m^2}{kg^2} \text{ ή ισοδύναμα με } G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2}$$

Το $\hat{r}$ είναι η διανυσματική μονάδα κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τις δύο σημειακές μάζες και έχει φορά από την μάζα m_1 προς την μάζα m_2. Αν $\vec{r}$ το διάνυσμα με αρχή την μάζα m_1 και πέρας την μάζα m_2, τότε η διανυσματική μονάδα $\hat{r}$ είναι ίση με:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{3.6}$$

Αντικαθιστώντας το $\hat{r}$ στη σχέση (3.5) έχουμε την ισοδύναμη έκφραση του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης.

$$\vec{F} = -G\frac{m_1\, m_2}{r^3}\vec{r} \tag{3.7}$$

Προφανώς, ίση, αλλά αντίθετης φοράς δύναμη, θα ασκείται και από την μάζα m_2 προς την μάζα m_1.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω νόμου είναι ότι σε οποιαδήποτε σώμα μάζας m πάνω στην Γη, ασκείται από την μάζα M της Γης ελκτική δύναμη. Η δύναμη αυτή ονομάζεται «βάρος» του σώματος και συμβολίζεται συνήθως με B ή w.

Στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή σε απόσταση R από το κέντρο της, το βάρος ενός σώματος μάζας m έχει μέτρο

$$B = G\frac{M\, m}{R^2} \tag{3.8}$$

διεύθυνση την κατακόρυφο και φορά προς το κέντρο της Γης.

Αν αντικαταστήσουμε τις σταθερές G, M και R με την σταθερή g

$$g = G\frac{M}{R^2} \tag{3.9}$$

παίρνουμε την γνωστή σχέση για το βάρος ενός σώματος

$$B = m\, g \tag{3.10}$$

Η σταθερή g ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας και όπως βλέπουμε από την σχέση (3.9) εξαρτάται από την μάζα της Γης καθώς και από την απόσταση από το κέντρο.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι ότι ένα σώμα έχει μεγαλύτερο βάρος στην επιφάνεια της Γης απ' ότι έχει σε μεγάλο ύψος. Επίσης ένα σώμα που έχει κάποιο βάρος στην επιφάνεια της Γης, θα έχει διαφορετικό βάρος στην επιφάνεια κάποιου άλλου πλανήτη, γιατί και η μάζα του πλανήτη θα είναι διαφορετική και η ακτίνα του πλανήτη επίσης.

Η τιμή του g εξαρτάται επίσης και από τον τόπο που βρισκόμαστε πάνω στη Γη. Αυτό οφείλεται στο ότι η Γη δεν είναι τελείως σφαιρική. Έτσι στο γεωγραφικό πλάτος που βρίσκεται η Ελλάδα η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι περίπου

$$g = 9{,}81\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2} \tag{3.11}$$

Η τιμή αυξάνεται όσο πηγαίνουμε προς τους πόλους και ελαττώνεται προς τον ισημερινό. Στα περισσότερα προβλήματα, για λόγους ευκολίας στους υπολογισμούς, ως τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας παίρνουμε $g = 10\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε το ΛΑΘΟΣ που γίνεται στην καθημερινή μας ζωή, να συγχέουμε την έννοια του βάρους με αυτή της μάζας. Το βάρος είναι δύναμη και μετριέται σε N ενώ η μάζα μετριέται σε kg. Λέμε πολύ συχνά ότι το βάρος μας είναι για παράδειγμα 75 kg. Αυτό είναι λάθος! Το σωστό είναι να πούμε ότι η μάζα μας είναι 75 kg, ενώ το βάρος μας είναι 750 N!

Παράδειγμα 3.1

Η μάζα του πλανήτη Δία είναι 318 φορές μεγαλύτερη από την μάζα της Γης, ενώ η ακτίνα του είναι 11 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της Γης. Να βρεθεί το βάρος ενός αστροναύτη στον Δία όταν στην Γη ζυγίζει 700 N.

Λύση

Το βάρος του αστροναύτη στον Δία είναι, σύμφωνα με τον νόμο της Παγκόσμιας Έλξης:

$$B_{\Delta} = G\frac{m_A\, M_{\Delta}}{R_{\Delta}{}^2}$$

όπου m_A η μάζα του ανθρώπου, M_{Δ} η μάζα του Δία και R_{Δ} η ακτίνα του.

Αντίστοιχα το βάρος του αστροναύτη στην Γη θα είναι

$$B_{\Gamma} = G\frac{m_A\, M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}{}^2}$$

όπου M_{Γ} η μάζα της Γης και R_{Γ} η ακτίνα της.

Διαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{B_\Delta}{B_\Gamma} = \frac{G\dfrac{m_A M_\Delta}{R_\Delta^{\,2}}}{G\dfrac{m_A M_\Gamma}{R_\Gamma^{\,2}}} = \frac{\dfrac{M_\Delta}{R_\Delta^{\,2}}}{\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^{\,2}}} = \frac{M_\Delta}{M_\Gamma}\frac{R_\Gamma^{\,2}}{R_\Delta^{\,2}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές τις μάζας και τις ακτίνας του Δία όπως μας τις δίνει η εκφώνηση έχουμε:

$$\frac{B_\Delta}{B_\Gamma} = \frac{318\,M_\Gamma}{M_\Gamma}\frac{R_\Gamma^{\,2}}{(11\,R_\Gamma)^2} = \frac{318}{121}$$

Άρα το βάρος του αστροναύτη στον Δία θα είναι

$$B_\Delta = \frac{318}{121}B_\Gamma = \frac{318}{121}700\ N \quad \Rightarrow \quad B_\Delta \cong 1839{,}67\ N$$

□

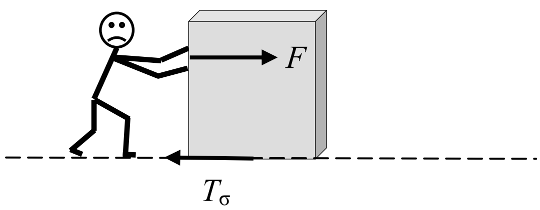
3.2.2 *Δύναμη τριβής*

Η δύναμη τριβής αναπτύσσεται ανάμεσα σε δύο επιφάνειες που βρίσκονται σε επαφή και αντιστέκεται στο η μία επιφάνεια να γλιστρήσει πάνω στην άλλη. Στην ουσία οφείλεται στις τοπικές ανωμαλίες που υπάρχουν στις δύο επιφάνειες. Έτσι η δύναμη τριβής ανάμεσα σε δύο επιφάνειες οι οποίες είναι στιλπνές (πολύ λείες) είναι πολύ μικρότερη από αυτή ανάμεσα σε δύο τραχιές (άγριες) επιφάνειες.

Η δύναμη τριβής είναι ανάλογη με την κάθετη δύναμη που ασκείται στο σώμα και το «πιέζει» πάνω στην επιφάνεια, επί έναν συντελεστή, που ονομάζεται «συντελεστής τριβής», και εξαρτάται από τις επιφάνειες των δύο υλικών, δηλαδή το είδος των υλικών που βρίσκονται σε επαφή, την στιλπνότητα και το εμβαδόν των δύο επιφανειών

Διακρίνουμε τρία είδη δυνάμεων τριβής.

α) Την στατική τριβή



Σχήμα 3.1 *Η στατική τριβή T_σ αντιτίθεται στην δύναμη F που θέλει να κινήσει το αντικείμενο.*

Η στατική τριβή αναπτύσσεται στην επιφάνεια επαφής δύο ακίνητων μεταξύ τους αντικειμένων και αντιτίθεται στην δύναμη που προσπαθεί να θέσει το ένα από τα δύο αντικείμενα σε κίνηση.

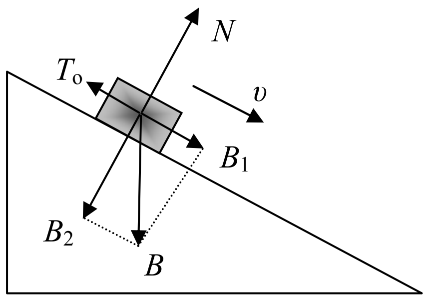
Η στατική τριβή είναι ίση με την δύναμη την παράλληλη στην επιφάνεια επαφής. Η τιμές που μπορεί να πάρει η στατική τριβή είναι από μηδέν μέχρι μια μέγιστη τιμή που είναι ίση με

$$T_\sigma = \mu_\sigma \, F_\kappa \tag{3.12}$$

όπου μ_σ ο συντελεστής στατικής τριβής, που όπως είπαμε εξαρτάται από την επιφάνεια επαφής και F_κ η κάθετη δύναμη στην επιφάνεια επαφής που «πιέζει» το σώμα πάνω στην επιφάνεια.

Αν η δύναμη κίνησης είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής τότε το σώμα αρχίζει να κινείται. Εφόσον το σώμα κινείται, δεν υπάρχει πια στατική τριβή, αλλά τριβή ολίσθησης.

β) Την τριβή ολίσθησης



Σχήμα 3.2 *Η τριβή ολίσθησης αντιδρά στην κίνηση του σώματος και έχει φορά αντίθετη με την ταχύτητα.*

Η τριβή ολίσθησης αναπτύσσεται στην επιφάνεια επαφής δύο σωμάτων που το ένα κινείται ολισθαίνοντας (γλιστράει) πάνω στο άλλο.

Η τριβή ολίσθησης έχει φορά αντίθετη με την ταχύτητα του αντικειμένου που ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια, ενώ η τιμή της δίνεται από την σχέση

$$T_o = \mu_o \, F_k \tag{3.13}$$

όπου μ_o ο συντελεστής στατικής τριβής, που εξαρτάται, όπως και ο συντελεστής στατικής τριβής, από την επιφάνεια επαφής και F_k η κάθετη δύναμη στην επιφάνεια επαφής που «πιέζει» το σώμα πάνω στην επιφάνεια.

Έτσι, στην περίπτωση του Σχήματος 3.2, όπου ένα σώμα ολισθαίνει με ταχύτητα υ πάνω στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου λόγω της δύναμης του βάρος του B, η δύναμη τριβής T_o είναι ίση με τον συντελεστή τριβής επί της κάθετη στην επιφάνεια ολίσθησης συνιστώσα του βάρους του. Δηλαδή η δύναμη τριβής θα είναι:

$$T_o = \mu_o \, B_2 \tag{3.14}$$

Η δύναμη N που εμφανίζεται στο Σχήμα 3.2 είναι η δύναμη αντίδρασης της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου στην κάθετη δύναμη B_2 που ασκείται από το σώμα στην επιφάνεια. Η δύναμη N είναι φυσικά ίση και αντίθετη με την B_2 έτσι ώστε το σώμα να μην «βυθίζεται» μέσα στο κεκλιμένο επίπεδο, ούτε να «απογειώνεται» από αυτό.

Η δύναμη τριβής ολίσθησης στην διανυσματική της μορφή μπορεί να γραφτεί ως

$$\vec{T}_o = -\mu_o \, F_k \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \tag{3.15}$$

όπου $\vec{\upsilon}$ το διάνυσμα της ταχύτητας και υ το μέτρο της. Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι η τριβή εξαρτάται μεν από την ταχύτητα αλλά μόνο από την διεύθυνση της και όχι από το μέτρο της. Το κλάσμα $\vec{\upsilon}/\upsilon$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση και φορά, την διεύθυνση και την φορά της ταχύτητας.

3.2.3 Αντίσταση του αέρα

Όταν ένα σώμα κινείται μέσα στον αέρα, τότε ο αέρας προβάλει μία αντίσταση στην κίνηση του σώματος. Η αντίσταση αυτή είναι τόσο πιο μεγάλη, όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα του σώματος.

Αν το σώμα κινείται με σχετικά μικρές ταχύτητες ($\upsilon \le 5\ \mathrm{m/s}$) όπως π.χ. στην περίπτωση της πτώσης ενός αλεξιπτωτιστή. Τότε η αντίσταση του αέρα δίνεται από την σχέση:

$$R = -b\upsilon \tag{3.16}$$

όπου η b είναι μια σταθερή που εξαρτάται από το μέγεθος της επιφάνειας του σώματος, την αεροδυναμικότητα του, την πυκνότητα (ή καλύτερα το ιξώδες) του αέρα κ.λ.π. Το αρνητικό πρόσημο, στην σχέση, δείχνει ότι η δύναμη είναι αντίθετη με την ταχύτητα του σώματος, αντιδρά δηλαδή στην κίνηση του.

Αν η ταχύτητα του σώματος είναι μεγαλύτερη, τότε η εν λόγω δύναμη τροποποιείται ως:

$$R = -b\upsilon^2 \tag{3.17}$$

Ενώ, όταν μιλάμε για υπερηχητικές ταχύτητες ($\upsilon > 343{,}2\ \mathrm{m/s}$ για αέρα θερμοκρασίας 20^o C) η αντίσταση του αέρα γίνεται

$$R = -b\upsilon^3 \tag{3.18}$$

Παρόμοια αντίσταση, με την αντίσταση του αέρα, έχουμε και όταν το σώμα κινείται εντός κάποιου υγρού (ή για να το πούμε καλύτερα, εντός κάποιου ρευστού). Έτσι όταν ένα σώμα κινείται μέσα στο νερό, το νερό προβάλει επίσης δύναμη αντίστασης στην κίνηση του σώματος.

3.3 Ισορροπία

Στην περίπτωση που σε ένα σώμα δεν ασκείται σε αυτό καμία εξωτερική δύναμη ή ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις αλλά η συνισταμένη τους είναι μηδέν, δηλαδή $\sum F = 0$ τότε η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν και η ταχύτητά του παραμένει σταθερή. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται **ισορροπία**.

Οι αντίστοιχες τιμές τις θέσης του σώματος για τις οποίες συμβαίνει κάτι τέτοιο λέγονται θέσεις ισορροπίας. Ο καθορισμός των θέσεων ισορροπίας ενός σώματος εξαρτάται από την συναρτησιακή έκφραση της δύναμης. Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις:

i) Η δύναμη να εξαρτάται από τον χρόνο *t*.

Παράδειγμα 3.2

Σώμα μάζας 1 kg κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F(t) = t^2 + t - 6$. Αν κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα ήταν ακίνητο στην αρχή των αξόνων, να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας.

Λύση

Η συνθήκη ισορροπίας προϋποθέτει $\sum F = 0$. Άρα:

$$F(t) = 0 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0$$

Η λύση της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ \\ t = 2 \end{cases}$$

Η πρώτη λύση, $t = -3$, απορρίπτεται γιατί δεν υπάρχει αρνητικός χρόνος. Άρα η μόνη δεκτή λύση είναι $t = 2$.

Άρα κατά την χρονική στιγμή $t = 2$ το σώμα ισορροπεί. Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε σε ποια θέση βρίσκεται αυτή την χρονική στιγμή. Με άλλα λόγια πρέπει να προσδιορίσουμε την συνάρτηση της θέσης $x(t)$ και να βρούμε την τιμή της για $t = 2$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$$F(t) = m\,a \Rightarrow t^2 + t - 6 = 1 \cdot a$$

Άρα η επιτάχυνση δίνεται από την σχέση

$$a(t) = t^2 + t - 6$$

Οπότε:

$$\upsilon(t) = \int a(t)dt = \int \left(t^2 + t - 6\right)dt = \int t^2 dt + \int t\,dt - 6\int dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t + c_1$$

Την σταθερά c_1 θα την προσδιορίσουμε από τις αρχικές συνθήκες. Γνωρίζουμε ότι για $t = 0$ το σώμα είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων, άρα $\upsilon = 0$. Οπότε

$$\upsilon(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t + c_1 \overset{t=0}{\Rightarrow} 0 = \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} - 6 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

Έτσι η ταχύτητα, ως συνάρτηση του χρόνου, είναι:

$$\upsilon(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t$$

Από την παραπάνω συνάρτηση της ταχύτητας υπολογίζουμε την συνάρτηση της θέσης.

$$x(t) = \int \upsilon(t)dt = \int \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t\right)dt = \frac{1}{3}\int t^3 dt + \frac{1}{2}\int t^2\,dt - 6\int t dt =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{t^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + c_1 = \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{6} - 3t^2 + c_2$$

Την σταθερά c_2 θα την προσδιορίσουμε επίσης από τις αρχικές συνθήκες. Γνωρίζουμε ότι για $t = 0$ το σώμα είναι στην αρχή των αξόνων, άρα $x = 0$. Οπότε

$$x(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{6} - 3t^2 + c_2 \overset{t=0}{\Rightarrow} 0 = \frac{0^4}{12} + \frac{0^3}{6} - 3 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

Άρα η συνάρτηση της θέσης, σε σχέση με τον χρόνο, είναι

$$x(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{6} - 3t^2$$

Και μιας και το σώμα ισορροπεί για $t = 2$, η θέση ισορροπίας θα είναι

$$x(2)=\frac{2^4}{12}+\frac{2^3}{6}-3\cdot 2^2=\frac{16}{12}+\frac{8}{6}-3\cdot 4=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}-12=-\frac{28}{3}$$

□

ii) Η δύναμη να εξαρτάται από την θέση x.

Στην περίπτωση αυτή τα πράγματα είναι ιδιαίτερα απλά, όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.3

Υλικό σημείο κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F(x)=4x-x^2$. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας.

Λύση

Η συνθήκη ισορροπίας προϋποθέτει $\sum F=0$. Άρα:

$$F(x)=0 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

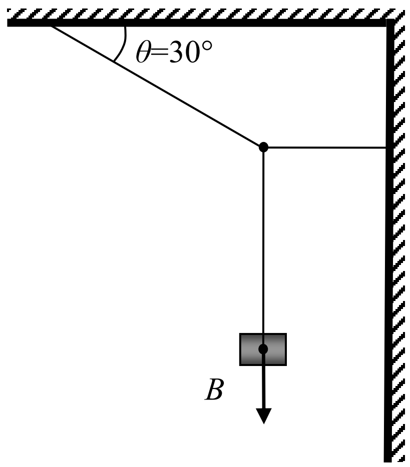
3.4 Στατική Ισορροπία

Στην περίπτωση που ένα σώμα είναι ακίνητο, $\upsilon=0$, και δεν ασκείται σε αυτό καμία εξωτερική δύναμη ή ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις αλλά η συνισταμένη τους είναι μηδέν τότε το σώμα παραμένει ακίνητο και λέμε ότι έχουμε στατική ισορροπία. Η περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική στην επιστήμη των Πολιτικών Δομικών Έργων, καθώς οι κατασκευές που καλούνται να οικοδομήσουν θα πρέπει να ισορροπούν και να παραμένουν ακίνητες κάτω από την επίδραση διαφόρων τάσεων.

Τα περισσότερα προβλήματα στην στατική επιλύονται πολύ εύκολα με επιλογή και χρήση κατάλληλων αξόνων και ανάλυση των δυνάμεων σε συνιστώσες πάνω στους άξονες αυτούς, λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων σε κάθε άξονα πρέπει να είναι μηδέν.

Θα προσεγγίσουμε την περίπτωση της στατικής ισορροπίας επιλύοντας ορισμένα ενδεικτικά παραδείγματα.

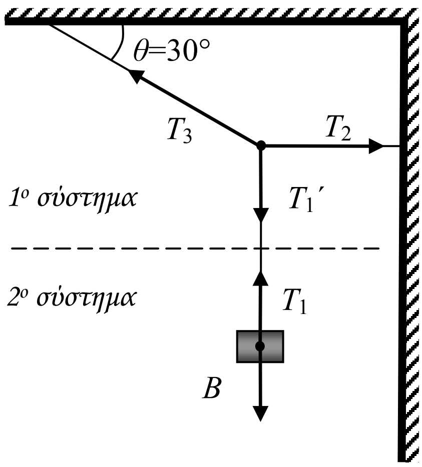
Παράδειγμα 3.4



Σχήμα 3.3 *Σώμα βάρους Β ισορροπεί με την βοήθεια των τριών νημάτων (άσκηση 3.4)*

Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει βάρος 100 N και ισορροπεί με την βοήθεια τριών νημάτων. Τα δύο νήματα είναι σταθερά συνδεδεμένα στον τοίχο και στη οροφή του δωματίου ενώ το τρίτο συνδέει τα δύο νήματα με το σώμα. Το νήμα της οροφής σχηματίζει με την οροφή γωνία 30° ενώ το νήμα του τοίχου είναι κάθετο στον τοίχο. Να βρεθούν οι τάσεις (δυνάμεις) των νημάτων.

Λύση



Σχήμα 3.4 *Ανάλυση του προβλήματος σε δύο συστήματα (άσκηση 3.3)*

Χωρίζουμε το πρόβλημα σε δύο επιμέρους συστήματα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα (Σχήμα 3.4). Ξεκινάμε με το δεύτερο σύστημα.

Αφού το σώμα ισορροπεί, έχουμε

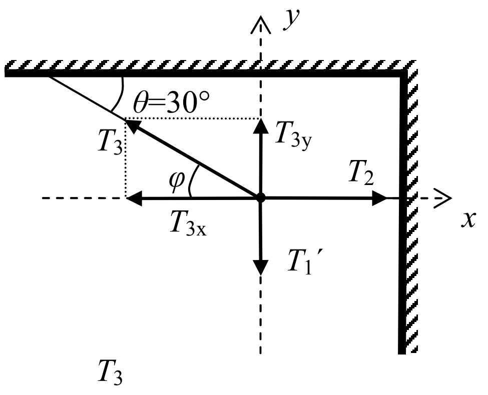
$$\sum F = 0 \Rightarrow B - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = B$$

Άρα $T_1 = 100$ N

Στο πρώτο σύστημα έχουμε την δύναμη T_1' ίση (και αντίθετη) με την δύναμη T_1 του δευτέρου συστήματος καθώς το νήμα είναι ακίνητο, ισορροπεί, δεν σπάει ούτε είναι ελαστικό. Έτσι έχουμε

$$T_1' = T_1 = B = 100 \text{ N}$$

Επιλέγω άξονες x-y έτσι ώστε να έχω όσο το δυνατόν περισσότερες δυνάμεις πάνω στους άξονες. Με τον τρόπο αυτό δεν θα χρειαστεί για τις δυνάμεις αυτές να τις αναλύσω σε συνιστώσες πάνω στους άξονες. Επιλέγω λοιπόν άξονες που να περιέχουν τις κάθετες μεταξύ τους δυνάμεις T_1' και T_2. Έτσι η μόνη δύναμη που έμεινε να αναλύσουμε σε συνιστώσες είναι η T_3.



Σχήμα 3.5 *Ανάλυση του προβλήματος σε δύο συστήματα (άσκηση 3.4)*

Για την T_3 έχουμε:

$$T_{3x} = T_3 \cos\varphi$$

$$T_{3y} = T_3 \sin\varphi$$

Αλλά η γωνία φ είναι ίση με την θ ως εντός εναλλάξ, οπότε:

$$T_{3x} = T_3 \cos 30°$$

$$T_{3y} = T_3 \sin 30°$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της ισορροπίας σε κάθε άξονα ξεχωριστά έχουμε:

Άξονας x : $\sum F_x = 0 \Rightarrow T_2 - T_{3x} = 0 \Rightarrow T_2 = T_{3x} \Rightarrow T_2 = T_3 \cos 30°$

Άξονας y : $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{3x} - T_1' = 0 \Rightarrow T_1' = T_{3x} \Rightarrow T_1' = T_3 \sin 30° \Rightarrow T_3 = \dfrac{T_1'}{\sin 30°} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{T_1'}{1/2} \Rightarrow T_3 = 2T_1'$$

Όμως, όπως έχουμε ήδη βρει, $T_1' = 100$ N. Άρα $T_3 = 200$ N

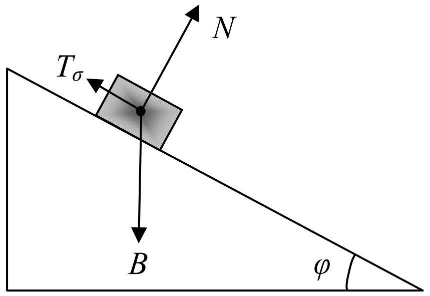
Έτσι τελικά έχουμε

$$T_2 = T_3 \cos 30° \Rightarrow T_2 = T_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_2 = 100\sqrt{3} \text{ N}.$$

Δηλαδή $T_2 \cong 173{,}2$ N

□

Παράδειγμα 3.5

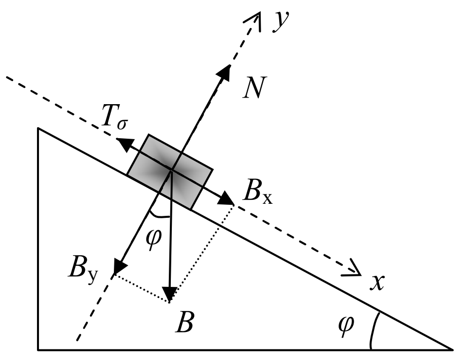


Σχήμα 3.6 *Οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο έτσι ώστε αυτό να ισορροπεί (Άσκηση 3.5).*

Σώμα μάζας m ισορροπεί οριακά πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας φ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα (Σχήμα 3.6). Με τον όρο «ισορροπεί οριακά» εννοούμε ότι αν η γωνία φ ήταν ελάχιστα πιο μεγάλη τότε το σώμα θα είχε αρχίσει να ολισθαίνει. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τον συντελεστή στατικής τριβής μ_σ με την γωνία φ. Η επιτάχυνση της βαρύτητας g θεωρείται γνωστή.

Λύση

Επιλέγω δύο κάθετους άξονες x-y τέτοιους ώστε να έχω όσο το δυνατόν περισσότερες δυνάμεις πάνω τους και αναλύω σε συνιστώσες όσες δυνάμεις δεν είναι.



Σχήμα 3.7 *Ανάλυση των δυνάμεων σε συνιστώσες πάνω στους άξονες (Άσκηση 3.5).*

Η γωνία μεταξύ των δυνάμεων B και B_y είναι ίση με την γωνία φ του κεκλιμένου επιπέδου (ως δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους ανά δύο κάθετες μεταξύ τους).

Έτσι η δύναμη B αναλύεται στις συνιστώσες:

$$B_x = B\sin\varphi = m\,g\sin\varphi$$

$$B_y = B\cos\varphi = m\,g\cos\varphi$$

Εφαρμόζοντας την συνθήκη ισορροπίας για κάθε ένα από τους άξονες έχουμε:

Άξονας x : $\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x - T_\sigma = 0 \Rightarrow B_x = T_\sigma \Rightarrow m\,g\sin\varphi = \mu_\sigma N$

Άξονας y : $\sum F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = m\,g\cos\varphi$

Αντικαθιστώντας το N από την δεύτερη στην πρώτη έχουμε:

$$m\,g\sin\varphi = \mu_\sigma\, m\,g\cos\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \mu_\sigma \cos\varphi \Rightarrow \mu_\sigma = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Άρα ο συντελεστής στατικής τριβής δίνεται από την σχέση

$$\mu_\sigma = \tan\varphi$$

□

3.5 Δυναμική Ισορροπία

Δυναμική ισορροπία έχουμε στην περίπτωση που η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν, $F = 0$ και το σώμα κινείται, $\upsilon \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή το σώμα συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Εκτελεί δηλαδή ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση.

Καθώς $\upsilon =$ σταθ. έχουμε:

$$x(t) = \int \upsilon\, dt = \upsilon \int dt = \upsilon t + c$$

Αν για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ($x = 0$) τότε από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι $c = 0$ και καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$x(t) = \upsilon t \tag{3.19}$$

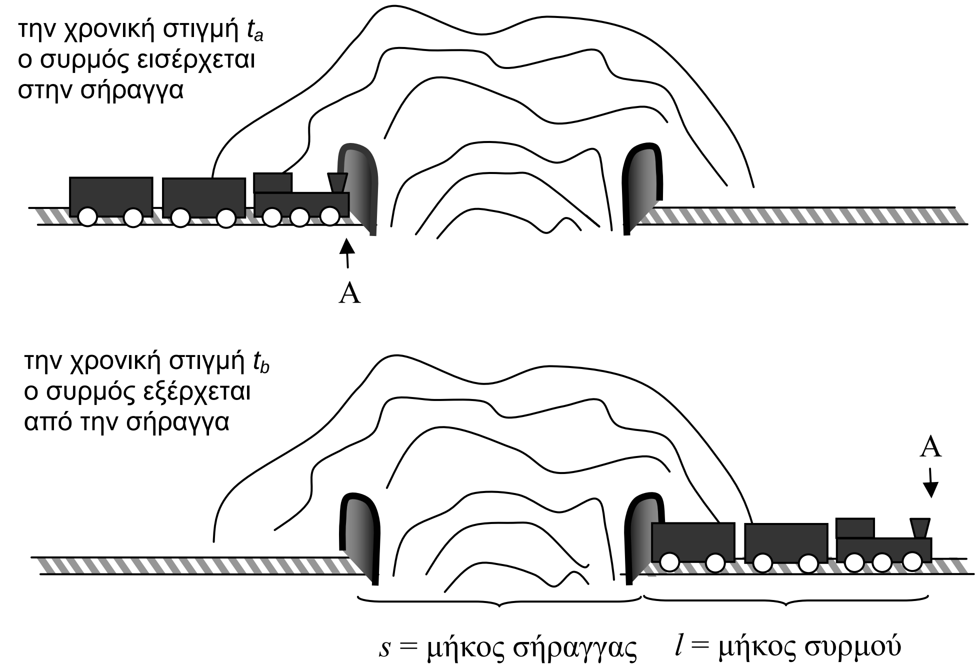
που μας δίνει την εξάρτηση της θέσης x από την ταχύτητα υ και τον χρόνο t στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης με αρχή την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 3.6

Ένα τραίνο, που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, διέρχεται από μία σήραγγα μήκους $s_1 = 320$ m σε χρόνο $\Delta t_1 = 19$ s και από μία δεύτερη σήραγγα, που βρίσκεται στην ίδια ευθεία και έχει μήκος $s_2 = 540$ m σε χρόνο $\Delta t_2 = 30$ s. Να βρεθεί η ταχύτητα του τραίνου και το μήκος του συρμού.

Λύση

Για να μελετήσουμε τέτοιου είδους προβλήματα εκτεταμένων σωμάτων, χρειαζόμαστε ένα σταθερό σημείο του οποίου την κίνηση θα παρακολουθήσουμε. Ως τέτοιο σημείο επιλέγουμε την αρχή του τραίνου (σημείο Α στο Σχήμα 3.8).



Σχήμα 3.8 *Συνολική απόσταση που διήνυσε η αρχή του συρμού από την στιγμή t_a που αυτός εισήλθε στην σήραγγα μέχρι την στιγμή t_b που εξήλθε πλήρως από αυτή (Παράδειγμα 3.6).*

Για να διέλθει όλο το τραίνο μέσα από την σήραγγα, από την στιγμή t_a που εισήλθε το σημείο Α της μηχανής μέχρι την χρονική στιγμή t_b που εξήλθε πλήρως το τελευταίο βαγόνι του συρμού, το σημείο Α της μηχανής διένυσε απόσταση ίση με

$$d = s + l$$

Η ταχύτητα λοιπόν του τραίνου είναι ίση με (μήκος που διανύθηκε, προς χρόνο που χρειάστηκε)

$$\upsilon = \frac{d}{t_b - t_a} = \frac{d}{\Delta t}$$

Εφόσον το τραίνο κινείται ευθύγραμμα και <u>ομαλά</u> η ταχύτητά του παραμένει σταθερή. Άρα η ταχύτητα που διήνυσε την πρώτη σήραγγα είναι ίση με την ταχύτητα που διήνυσε την δεύτερη.

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \Rightarrow \frac{d_1}{\Delta t_1} = \frac{d_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{s_1 + l}{\Delta t_1} = \frac{s_2 + l}{\Delta t_2} \Rightarrow$$

$$\Delta t_1 (s_2 + l) = \Delta t_2 (s_1 + l) \Rightarrow s_2 \Delta t_1 + l\,\Delta t_1 = s_1 \Delta t_2 + l\,\Delta t_2 \Rightarrow$$

$$s_2 \Delta t_1 - s_1 \Delta t_2 = l\,\Delta t_2 - l\,\Delta t_2 \Rightarrow l(\Delta t_2 - \Delta t_1) = s_2 \Delta t_1 - s_1 \Delta t_2 \Rightarrow$$

$$l = \frac{s_2 \Delta t_1 - s_1 \Delta t_2}{\Delta t_2 - \Delta t_1}$$

Άρα το μήκος του συρμού είναι

$$l = \frac{s_2 \Delta t_1 - s_1 \Delta t_2}{\Delta t_2 - \Delta t_1} = \frac{540 \cdot 19 - 320 \cdot 30}{30 - 19} = \frac{660}{11} = 60 \text{ m}$$

Γνωρίζοντας το μήκος του συρμού, δεν έχω παρά να τον αντικαταστήσω στην σχέση που δίνει την ταχύτητα για μία από της δύο σήραγγες. Έτσι για την πρώτη σήραγγα θα έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{s_1 + l}{\Delta t_1} = \frac{320 + 60}{19} = \frac{380}{19} = 20 \text{ m/s}$$

Φυσικά το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε αν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο για την δεύτερη σήραγγα.

$$\upsilon_2 = \frac{s_2 + l}{\Delta t_2} = \frac{540 + 60}{30} = \frac{600}{30} = 20 \text{ m/s}$$

□

<u>Σημείωση</u>: Αν η άσκηση ζητούσε το αποτέλεσμα σε km/h *;*

Γνωρίζουμε ότι

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{km}$$

και

$$1 \text{ h} = 3600 \ s \Rightarrow 1 \ s = \frac{1}{3600} h$$

Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε τα μέτρα και τα δευτερόλεπτα με τα ίσα τους σε χιλιόμετρα και ώρες. Δηλαδή

$$\upsilon = 20 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 20 \frac{3600}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Παράδειγμα 3.7

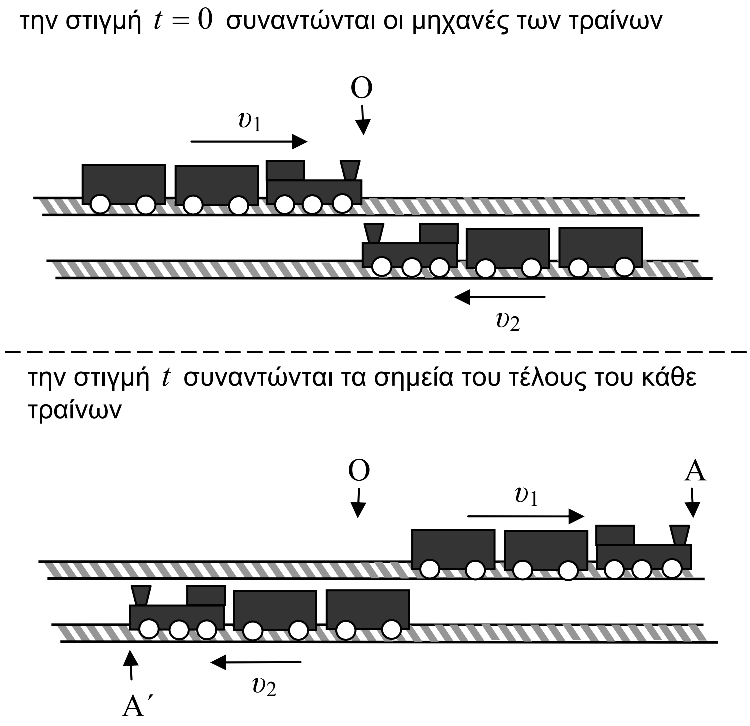
Δύο σιδηροδρομικοί συρμοί που έχουν μήκη $s_1 = 200\ \mathrm{m}$ και $s_2 = 100\ \mathrm{m}$ αντίστοιχα, αντιπαρέρχονται ο ένας τον άλλο. Αν έχουν ταχύτητες $\upsilon_1 = 108\ \mathrm{km/h}$ $\upsilon_2 = 72\ \mathrm{km/h}$ αντίστοιχα, να βρείτε επί πόσο χρόνο θα αντιπαρέρχονται.

Λύση

Και σε αυτή την περίπτωση πρέπει σε κάθε τραίνο να επιλέξω ένα αντιπροσωπευτικό σημείο αναφοράς. Επιλέγω τα σημεία της αρχής του κάθε συρμού (Σχήμα 3.9).

Την χρονική στιγμή $t = 0$ οι αρχές των δύο τραίνων συναντώνται στο σημείο Ο (Σχήμα 3.9, πάνω). Τα τραίνα αντιπαρέρχονται για χρόνο t μέχρι την στιγμή που το τέλος του ενός συρμού θα περάσει δίπλα από το τέλος του άλλου (Σχήμα 3.9, κάτω). Την στιγμή αυτή η αρχή του πρώτου τραίνου είναι στο σημείο Α και του δεύτερου τραίνου στο σημείο Α΄.

Το πρώτο τραίνο λοιπόν διήνυσε, σε χρόνο t, απόσταση d_1 ίση με το διάστημα ΟΑ, ενώ το δεύτερο τραίνο διήνυσε απόσταση ίση με το διάστημα ΟΑ΄.



Σχήμα 3.9 *Αρχική και τελική θέση των δύο τραίνων (Παράδειγμα 3.7).*

Επειδή τα τραίνα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση θα έχουμε για τις αποστάσεις d_1 και d_2

$$d_1 = \upsilon_1 t$$

και

$$d_2 = \upsilon_2 t$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της δύο σχέσεις βρίσκουμε

$$d_1 + d_2 = (\upsilon_1 + \upsilon_2)t$$

ο χρόνος t λοιπόν θα δίνεται από την σχέση

$$t = \frac{d_1 + d_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$$

Αλλά, όπως βλέπουμε και από στο Σχήμα 3.9, οι απόσταση $d_1 + d_2$ είναι η απόσταση ΟΑ +ΟΑ΄, δηλαδή το άθροισμα των μηκών των δύο τραίνων $s_1 + s_2$. Άρα ο χρόνος t μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$t = \frac{s_1 + s_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{200\ \mathrm{m} + 100\ \mathrm{m}}{108\ \mathrm{km/h} + 72\ \mathrm{km/h}} = \frac{300\ \mathrm{m}}{180\ \mathrm{km/h}}$$

Για να προχωρήσουμε και να κάνουμε την διαίρεση πρέπει ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ οι μονάδες να είναι ίδιες. Έτσι πρέπει πρώτα να κάνουμε την αλλαγή των μονάδων

$$t = \frac{300\ \mathrm{m}}{180\ \mathrm{km/h}} = \frac{300\ \mathrm{m}}{180\ \dfrac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}}} = \frac{300\ \mathrm{m}}{50\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \quad \Rightarrow \quad t = 6\ \mathrm{s}$$

Βέβαια, θα μπορούσαμε να λύσουμε το ίδιο πρόβλημα, χρησιμοποιώντας μια λίγο διαφορετική προσέγγιση. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή Ο το σημείου του τέλους του τελευταίου βαγονιού του δεύτερου τραίνου. Το σύστημα αυτό κινείται με ταχύτητα ίση με αυτή του δεύτερου τραίνου, ως προς τις γραμμές. Όπως είναι φανερό, στο σύστημα αυτό το δεύτερο τραίνο παραμένει ακίνητο, ενώ το πρώτο τραίνο κινείται με ταχύτητα (βλέπε και παράγραφο 2.3)

$$\upsilon = \upsilon_1 - (-\upsilon_2)$$

Η ταχύτητα $(-\upsilon_2)$ του συστήματος συντεταγμένων πάρθηκε αρνητική γιατί το σύστημα κινείται προς το αρνητικό μέρος του άξονα των x (προς τα αριστερά).

Έτσι λοιπόν, στο σύστημα αυτό το πρώτο τραίνο κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα

$$\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$$

Το τέλος του τελευταίου βαγονιού του πρώτου τραίνου, την χρονική στιγμή $t = 0$, βρίσκεται στην θέση $-s$

$$s = s_1 + s_2$$

Τα αρνητικό πρόσημό είναι λόγω του ότι η απόσταση είναι αριστερά του σημείου Ο.

Μετά από χρόνο t, το τέλος του τελευταίου βαγονιού του πρώτου τραίνου θα βρίσκεται στο σημείο Ο (το τέλος του τελευταίου βαγονιού του δεύτερου τραίνου). Θα έχει λοιπόν διανύσει σε χρόνο t, με ταχύτητα υ, απόσταση ίση με s. Άρα ο χρόνος t θα είναι ίσος με:

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{s_1 + s_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{300\ \mathrm{m}}{180\ \mathrm{km/h}} = \frac{300\ \mathrm{m}}{180\ \dfrac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}}} = \frac{300\ \mathrm{m}}{50\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \quad \Rightarrow \quad t = 6\ \mathrm{s}$$

□

3.6 Κίνηση υπό την επίδραση δύναμης

Στην περίπτωση που η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι διάφορη του μηδενός, τότε η επίλυση του προβλήματος εξαρτάται από την συναρτησιακή έκφραση της δύναμης.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις (εκτός της περίπτωσης η δύναμη να είναι μηδέν).

1. Η δύναμη να είναι σταθερή
2. Η δύναμη να εξαρτάται από τον χρόνο
3. Η δύναμη να εξαρτάται από την θέση
4. Η δύναμη να εξαρτάται από την ταχύτητα

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

3.6.1 Δύναμη σταθερή

Θα εξετάσουμε πρώτα την (εύκολη) περίπτωση κατά την οποία η δύναμη είναι σταθερή, δηλαδή

$$\sum F = F = \text{σταθ.}$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι το βάρος ενός σώματος κοντά στην επιφάνεια της Γης.

$$F = B = m\,g$$

καθώς και η δύναμη τριβής.

Σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα

$$F = m\,a$$

Εφόσον, λοιπόν η δύναμη F είναι σταθερή και φυσικά δεν αλλάζει η μάζα m του σώματος, άρα και η επιτάχυνση a θα είναι σταθερή και το σώμα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Έχουμε λοιπόν για την ταχύτητα του σώματος

$$\upsilon = \int a\,dt = a\int dt = a\,t + c_1$$

Άρα το σώμα θα κινείται με ταχύτητα που δίνεται από την σχέση

$$\upsilon(t) = a\,t + c_1 \tag{3.20}$$

Ο υπολογισμός της σταθεράς c_1 γίνεται από τις αρχικές συνθήκες. Για να υπολογίσουμε, δηλαδή, πόσο είναι η σταθερή θα πρέπει να γνωρίζουμε την ταχύτητα που έχει το σώμα κάποια χρονική στιγμή. Συνήθως, στα περισσότερα προβλήματα, μας δίνεται η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t = 0$, αλλά αυτό δεν είναι πάντα ο κανόνας. Θα μπορούσαμε να βρούμε την τιμή της c_1 αν γνωρίζαμε την ταχύτητα μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Από την παραπάνω εξίσωση (3.20) είναι φανερό ότι η τιμή της c_1 είναι η αρχική ταχύτητα του σώματος υ_0, δηλαδή η ταχύτητα που έχει την χρονική στιγμή $t = 0$. Έτσι η εξίσωση (3.20) γράφεται συνήθως

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + a\,t \tag{3.21}$$

Με όμοιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί η εξίσωση της θέσης. Έτσι έχουμε

$$x = \int \upsilon\,dt = \int (\upsilon_0 + a\,t)dt = \int \upsilon_0 dt + \int a\,t\,dt = \upsilon_0 \int dt + a\int t\,dt = \upsilon_0 t + a\frac{t^2}{2} + c_2$$

Η σταθερά c_2 υπολογίζεται επίσης από τις αρχικές συνθήκες και όπως βλέπουμε από την παραπάνω σχέση είναι η θέση x_0 που είχε το σώμα την χρονική στιγμή $t = 0$. Έτσι, η παραπάνω εξίσωση γράφεται συνήθως

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}a\,t^2 \tag{3.22}$$

Παράδειγμα 3.8

Σώμα Α εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $10\,m/s$. Στο σώμα επιδρά μόνο η δύναμη της βαρύτητας της Γης, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται μηδενική. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και η χρονική στιγμή που θα επιστρέψει στο έδαφος. Να σχεδιαστούν επίσης οι γραφικές παραστάσεις της θέσης και της ταχύτητας σαν συνάρτηση του χρόνου. Θεωρείστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,m/s^2$.

Λύση

Εφόσον η επιτάχυνση του σώματος είναι σταθερή και ίση με $a = -g$, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα πάνω. Αν συμβολίσουμε με $h(t)$ το ύψος που βρίσκεται το σώμα σε κάθε χρονική στιγμή, τότε σύμφωνα με τις σχέσεις (3.21) και (3.22) θα έχουμε

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - g\,t \tag{3.23}$$

και

$$h(t) = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g\,t^2 \tag{3.24}$$

Ας δούμε λίγο την φυσική του προβλήματος. Το σώμα ξεκινά από το έδαφος, προς τα πάνω, με μία αρχική ταχύτητα. Λόγω της δύναμης της βαρύτητας, που είναι προς τα κάτω, το σώμα επιβραδύνεται με επιτάχυνση $a = -g$. Έτσι η ταχύτητά του μειώνεται μέχρι κάποια χρονική στιγμή t_a που γίνεται μηδέν. Στο σημείο αυτό το σώμα σταματά να ανεβαίνει, έχει φτάσει δηλαδή στο μέγιστο ύψος $h_{\max}$. Στην συνέχεια, επειδή η βαρύτητα συνεχίζει να το τραβά πίσω στο έδαφος, το σώμα αρχίζει να πέφτει, εκτελώντας επιταχυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα μηδέν. Το μέγιστο ύψος $h_{\max}$ λοιπόν, μπορούμε να το υπολογίσουμε βρίσκοντας τον χρόνο που χρειάζεται για να μηδενιστεί η ταχύτητα από την σχέση (3.23) και στην συνέχεια να αντικαταστήσουμε τον χρόνο αυτό στην σχέση (3.24) για να βρούμε το ύψος.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν δούμε το πρόβλημα από καθαρά μαθηματική σκοπιά. Τι ψάχνουμε; Ψάχνουμε να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης του $h(t)$. Αλλά σε ποιο σημείο η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο; Στο σημείο που η παράγωγος της θέσης, dh/dt, μηδενίζεται. Αλλά η παράγωγος της θέσης είναι η ταχύτητα. Άρα πρέπει πρώτα να βρούμε ποτέ μηδενίζεται η ταχύτητα και στην συνέχεια να βρούμε την τιμή της $h(t)$ την στιγμή αυτή.

Έχουμε λοιπόν από την σχέση (3.23)

$$0 = \upsilon_0 - g\,t_a \Rightarrow t_a = \frac{\upsilon_0}{g}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.24)

$$h_{\max} = \upsilon_0 t_a - \frac{1}{2} g\,t_a{}^2 \Rightarrow h_{\max} = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\upsilon_0}{g} \right)^2$$

και καταλήγουμε ότι

$$h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\upsilon_0{}^2}{g} \tag{3.25}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής ταχύτητας, $\upsilon_0 = 10\,m/s$ και της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\,m/s^2$ βρίσκουμε ότι το μέγιστο ύψος είναι $h_{\max} = 5\ m$.

Πόσο χρόνο όμως χρειάζεται το σώμα για να κατέβει από το ύψος $h_{\max}$ στο έδαφος; Η «φυσική λογική» λέει ότι χρειάζεται τόσο χρόνο, όσο χρόνο χρειάστηκε να ανέβει στο ύψος αυτό, δηλαδή $t_k = t_a = \dfrac{\upsilon_0}{g}$. Είναι όμως σωστό αυτό;

Ας εξετάσουμε λοιπόν ξεχωριστά το κατέβασμα. Το σώμα ξεκινά από το ύψος $h_{\max}$ με μηδενική αρχική ταχύτητα και με επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας. Άρα θα καλύψει απόσταση $h_{\max}$ μέχρι το έδαφος σε χρόνο που δίνεται λύνοντας την σχέση

$$h_{\max} = \frac{1}{2} g t_k^{\,2} \Rightarrow t_k^{\,2} = \frac{2h_{\max}}{g} \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}}$$

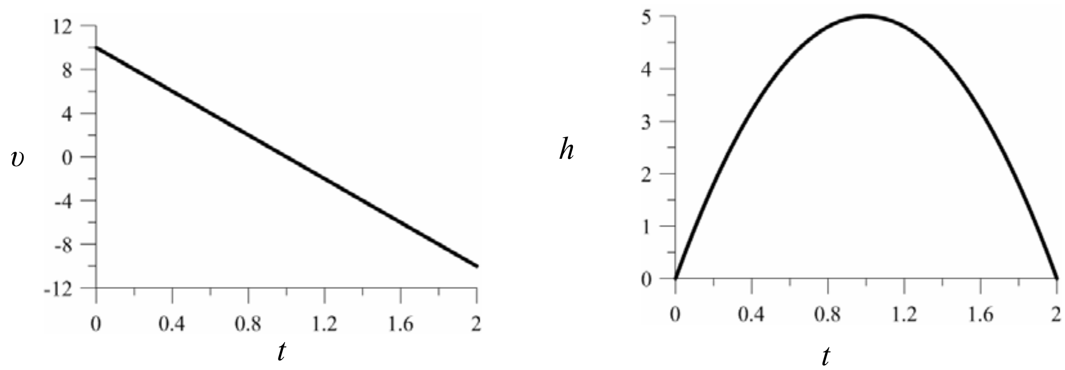
Αντικαθιστώντας την $h_{\max}$ από την (3.25) έχουμε για τον χρόνο καθόδου

$$t_k = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}} \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2\frac{1}{2}\frac{\upsilon_0^{\,2}}{g}}{g}} \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{\upsilon_0^{\,2}}{g^2}} \Rightarrow t_k = \frac{\upsilon_0}{g}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι ο χρόνος καθόδου είναι ίσος με τον χρόνο ανόδου. Άρα ο συνολικός χρόνος από την στιγμή που το σώμα εκτοξεύεται προς τα πάνω, μέχρι την στιγμή που επιστρέφει στο έδαφος είναι

$$t_{o\lambda} = \frac{2\upsilon_0}{g} = \frac{2\cdot 10\ ^{m}/_{s}}{10\ ^{m}/_{s^2}} = 2\ s$$

Τέλος στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.10) παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας υ και της θέσης h σαν συνάρτηση του χρόνου t. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του σώματος συνεχώς ελαττώνεται και μάλιστα με σταθερό ρυθμό (γι΄ αυτό και η γραφική είναι ευθεία). Την χρονική στιγμή $t = 1\,s$ η ταχύτητα μηδενίζεται



Σχήμα 3.10 *Γραφική παράσταση της ταχύτητας και της θέσης (ύψος) του σώματος. (Παράδειγμα 3.8)*

και στην συνέχεια γίνεται αρνητική. Το σώμα δηλαδή αρχίζει και πέφτει πίσω στο έδαφος.

□

Παράδειγμα 3.9

Σώμα, που ξεκινά από την ηρεμία, κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $a_1 = 4\ m/s^2$ επί χρόνο $t_1 = 6\ s$. Στα επόμενα $t_2 = 4\ s$ κινείται με σταθερή επιτάχυνση a_2 και στα τελευταία $t_3 = 6\ s$ με σταθερή επιβράδυνση $a_3 = 6\ m/s^2$ μέχρις ότου σταματήσει. Να βρεθούν α) η επιτάχυνση a_2 και β) το συνολικό διάστημα της κίνησης.

Λύση

Χωρίζω την συνολική κίνηση του σώματος σε τρεις επιμέρους, διαδοχικές, κινήσεις.

i. Κατά το χρονικό διάστημα $t_1 = 6\ s$:
Το σώμα εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Οι εξισώσεις της ταχύτητας και της απόστασης που διανύθηκε στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$\upsilon_1 = a_1 t_1 \qquad \text{και} \qquad x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^{\,2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές της επιτάχυνσης και του χρόνου βρίσκουμε ότι μετά από χρόνο $t_1 = 6\ s$ το σώμα θα έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 24\ m/s$ και θα έχει διανύσει απόσταση $x_1 = 72\ m$

ii. Κατά το χρονικό διάστημα $t_2 = 4\ s$:
Το σώμα εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_1. Οι εξισώσεις της ταχύτητας και της απόστασης που διανύθηκε στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + a_2 t_2 \qquad \text{και} \qquad x_2 = \upsilon_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^{\,2}$$

Παρατηρούμε, στην πρώτη σχέση, ότι για να υπολογίσω το a_2 που μου ζητά η άσκηση θα πρέπει να γνωρίζω το υ_2, το οποίο μέχρι στιγμής μου είναι άγνωστο. Ας προχωρήσουμε, λοιπόν, στο τρίτο χρονικό διάστημα.

iii. Κατά το χρονικό διάστημα $t_3 = 6\ s$:
Το σώμα εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_2. Οι εξισώσεις της ταχύτητας και της απόστασης που διανύθηκε στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$\upsilon_3 = \upsilon_2 - a_3\, t_3 \qquad \text{και} \qquad x_3 = \upsilon_2\, t_3 - \frac{1}{2} a_3\, t_3^{\,2}$$

Αφού στο τέλος του διαστήματος αυτού, όπως μας λέει η άσκηση, το σώμα θα σταματήσει, συνεπάγεται πως $\upsilon_3 = 0$. Έτσι έχουμε

$$\upsilon_2 - a_3\, t_3 = 0 \Rightarrow \upsilon_2 = a_3\, t_3 \Rightarrow \upsilon_2 = 36\ {}^{m}\!/_{s}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση της ταχύτητας του δεύτερου χρονικού διαστήματος έχουμε

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + a_2\, t_2 \Rightarrow a_2\, t_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1 \Rightarrow a_2 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2} \Rightarrow a_2 = 3\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

Με γνωστά τα υ_2 και a_2 υπολογίζουμε της αποστάσεις που διανύθηκαν στο δεύτερο και τρίτο χρονικό διάστημα.

$$x_2 = \upsilon_1\, t_2 + \frac{1}{2} a_2\, t_2^{\,2} = 24 \cdot 4 + \frac{1}{2} 3 \cdot 4^2 = 120\ m$$

$$x_3 = \upsilon_2\, t_3 - \frac{1}{2} a_3\, t_3^{\,2} = 36 \cdot 6 - \frac{1}{2} 6 \cdot 6^2 = 108\ m$$

Το συνολικό διάστημα της κίνησης θα είναι προφανώς το άθροισμα των τριών επιμέρους διανυσμάτων.

$$x_{o\lambda} = x_1 + x_2 + x_3 = 300\ m$$

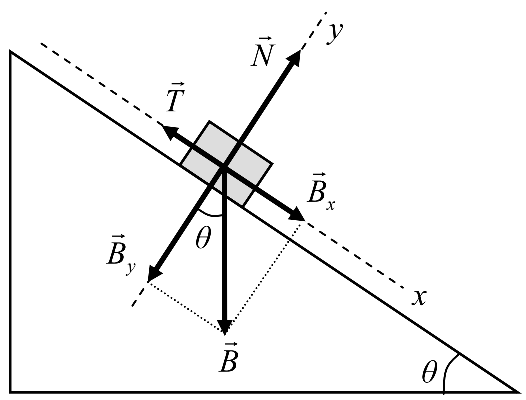
□

Παράδειγμα 3.10

Σώμα ολισθαίνει χωρίς αρχική ταχύτητα από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου μήκους s που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_o, να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος. Η επιτάχυνση της βαρύτητας g θεωρείται γνωστή

Λύση

Αρχικά σχεδιάζουμε το σχήμα (Σχήμα 3.11) και βάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα. Οι δυνάμεις αυτές είναι το βάρος του σώματος $\vec{B}$, η δύναμη της τριβής $\vec{T}$ με φορά αντίθετη με αυτή της κίνησης του σώματος και η δύναμη αντίδρασης $\vec{N}$ του κεκλιμένου επιπέδου που είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο και εμποδίζει το σώμα να "βυθιστεί" εντός του κεκλιμένου επιπέδου.



Σχήμα 3.11 *Δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα καθώς ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. (Παράδειγμα 3.10)*

Στην συνέχεια φέρνουμε δύο άξονες. Τον άξονα των x παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο και κατά συνέπεια παράλληλο με την κίνηση και τον άξονα y κάθετο στον x (άρα και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο και στην διεύθυνση της κίνησης).

Όσες δυνάμεις δεν είναι πάνω στους άξονες τις αναλύουμε σε συνιστώσες, με προβολή τους πάνω στους άξονες. Η μόνη δύναμη που δεν είναι πάνω στους άξονες είναι το βάρος $\vec{B}$ που το αναλύουμε σε δύο συνιστώσες $\vec{B}_x$ και $\vec{B}_y$ πάνω στους άξονες x και y αντίστοιχα. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η γωνία που σχηματίζει το βάρος $\vec{B}$ με τον άξονα y είναι ίση με την γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου γιατί είναι δύο οξείες γωνίες που έχουν μεταξύ τους τις πλευρές τους κάθετες. Άρα οι δύο συνιστώσες του βάρους θα έχουν μέτρο

$$B_x = B\sin\theta = m\,g\,\sin\theta \quad \text{και} \quad B_y = B\cos\theta = m\,g\,\cos\theta$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε άξονα ξεχωριστά.

<u>Κατά τον άξονα x :</u>

Το σώμα κινείται με επιτάχυνση. Άρα

$$\sum F_x = m\,a \Rightarrow B_x - T = m\,a \Rightarrow m\,g\,\sin\theta - \mu_o N = m\,a \qquad (1)$$

<u>Κατά τον άξονα y :</u>

Το σώμα ΔΕΝ κινείται! Ούτε "απογειώνεται", ούτε "βουλιάζει" στο κεκλιμένο επίπεδο. Άρα:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = m\,g\,\cos\theta \qquad (2)$$

Με την βοήθεια της (2) από την (1) έχουμε:

$$m\,a = m\,g\,\sin\theta - \mu_o\,m\,g\,\cos\theta \Rightarrow a = g\left(\sin\theta - \mu_o\cos\theta\right)$$

□

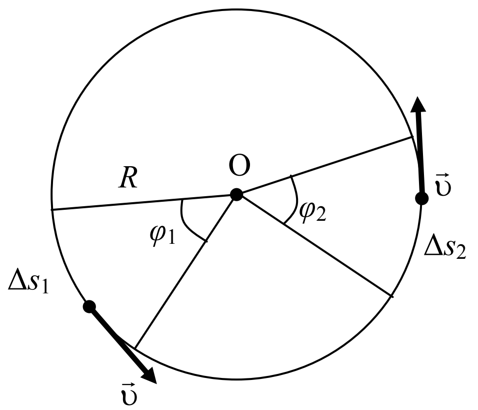
Αν προχωρήσουμε την άσκηση λίγο ακόμη βλέπουμε ότι με γνωστή πια την επιτάχυνση μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον χρόνο που χρειάζεται να κατέλθει μέχρι τη βάση του κεκλιμένου επίπεδου:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

καθώς και την ταχύτητα που θα έχει όταν φτάσει στην βάση:

$$\upsilon = a t \Rightarrow \upsilon = a\sqrt{\frac{2s}{a}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2 a s} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2 s g(\sin\theta - \mu_o \cos\theta)}$$

3.6.2 Ομαλή κυκλική κίνηση



Σχήμα 3.12 *Ομαλή κυκλική κίνηση.*

Ομαλή κυκλική κίνηση είναι η κίνηση κατά την οποία το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά και σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα. Δηλαδή, αν ο χρόνος που χρειάζεται να διανύσει το τόξο Δs_1 (Σχήμα 3.12) είναι ίσος με τον χρόνο που χρειάζεται να διανύσει το τόξο Δs_2, τότε $\Delta s_1 = \Delta s_2$.

Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ με την οποία κινείται το σώμα πάνω στην κυκλική τροχιά έχει **σταθερό μέτρο**, υ = σταθ. Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται **γραμμική ταχύτητα** του σώματος. Το μέτρο της, όπως είπαμε παραμένει σταθερό, αλλά η διεύθυνση και η φορά της αλλάζουν συνεχώς καθώς το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ παραμένει πάντα εφαπτόμενο στην τροχιά.

Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα για να κάνει μια πλήρη περιστροφή (έναν ολόκληρο κύκλο) ονομάζεται **περίοδος της κίνησης** και συμβολίζεται με *T*. Το φαινόμενο της κυκλικής κίνησης επαναλαμβάνεται κάθε χρονικό διάστημα ίσο με *T*, γι' αυτό και ονομάζεται περιοδικό φαινόμενο.

Χρησιμοποιώντας τον γενικό ορισμό της ταχύτητας, μπορούμε να υπολογίσουμε το <u>σταθερό</u> μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ως :

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3.26}$$

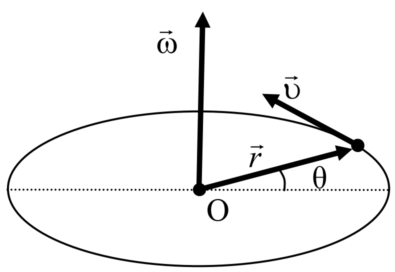
Από την παραπάνω σχέση έχουμε για μια πλήρη περιστροφή, δηλαδή Δs = περιφέρεια κύκλου και Δt = περίοδος:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.27}$$

Συνήθως, με τον όρο <u>ομαλή</u> περιγράφουμε μια κίνηση που ένα από τα βασικά της μεγέθη παραμένει σταθερό. Για παράδειγμα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του σώματος παραμένει κατά μέτρο διεύθυνση και φορά σταθερή. Αντίστοιχα στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η επιτάχυνση $\vec{a}$ παραμένει κατά μέτρο διεύθυνση και φορά σταθερή. Στην ομαλή κυκλική κίνηση , το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό, όχι όμως και η διεύθυνση και φορά της. Άρα δεν είναι αυτή το σταθερό μέγεθος που χαρακτηρίζει την κίνηση.

Στην κυκλική κίνηση, βασικό μέγεθος είναι η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, η σχετίζεται με την γραμμική ταχύτητα με την σχέση:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{3.28}$$



Σχήμα 3.13 *Η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα στην κυκλική κίνηση.*

Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ λοιπόν, είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς, δηλαδή κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και της ακτίνας $\vec{r}$. Η φορά της $\vec{\omega}$ προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, δηλαδή έχει την φορά του αντίχειρα όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα του χεριού κλείνουν προς την φορά της κίνησης του σώματος (της ταχύτητας).

Σε πολλά βιβλία ο κανόνας του δεξιού χεριού αναφέρεται και ως **κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία** (βίδας). Δηλαδή η φορά του διανύσματος $\vec{\omega}$ είναι η φορά που θα κινηθεί μια βίδα αν την στρέψουμε (βιδώσουμε) κατά την φορά της ταχύτητας.

Το μέτρο ω του διανύσματος $\vec{\omega}$ ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{3.29}$$

Στη ομαλή κυκλική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ παραμένει σταθερή (ως προς μέτρο, διεύθυνση και φορά). Άρα

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Γνωρίζοντας ότι σε χρόνο ίσο με μία περίοδο ($\Delta t = T$) το σώμα εκτελεί μια πλήρη περιστροφή ($\Delta\theta = 2\pi$) βρίσκουμε ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ισούται με:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.30}$$

Η σχέση που συνδέει το μέτρο την γωνιακής ταχύτητας ω με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας υ μπορεί να υπολογιστεί, εύκολα, με τρεις τρόπους

(ι) Από το εξωτερικό γινόμενο (σχέση 3.28)

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και άρα κάθετη στην ακτίνα $\vec{r}$. Η γωνία φ λοιπόν που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα είναι $\varphi = \pi/2$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \upsilon = \omega R \sin(\varphi) \Rightarrow \upsilon = \omega R \sin\left(\pi/2\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon = \omega R \tag{3.31}$$

(ιι) Από τους ορισμούς των μεγεθών υ και ω (σχέσεις 3.26 και 3.29)

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος ενός τόξου ισούται με την γωνία (σε ακτίνια) επί την ακτίνα ($s = \theta\, R$) και ότι η ακτίνα παραμένει σταθερή έχουμε:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R = \omega R$$

(ιιι) Από τις σχέσεις (3.27) και (3.30)

$$\left.\begin{aligned} \upsilon &= \frac{2\pi R}{T} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega} = R \Rightarrow \upsilon = \omega R\,.$$

Ένα άλλο πολύ σημαντικό μέγεθος της κυκλικής κίνησης είναι η **συχνότητα** περιστροφής. Αυτή ορίζεται ως ο αριθμός των περιστροφών που κάνει το σώμα στην μονάδα του χρόνου. Δηλαδή, αν το σώμα έκανε N περιστροφές σε χρόνο ίσο με t τότε η συχνότητα είναι

$$f = \frac{N}{t} \tag{3.32}$$

Η μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το Hz (Hertz) και ισούται με 1 Hz = $1/\text{sec}$.

Στην περίπτωση που N=1, ο χρόνος που χρειάζεται για μία περιστροφή είναι μία περίοδος, δηλαδή $t = T$. Άρα η σχέση που συνδέει την συχνότητα με την περίοδο είναι:

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.33}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, οι σχέσεις της γραμμικής ταχύτητας (3.23) και της γωνιακής ταχύτητας (3.30) γράφονται

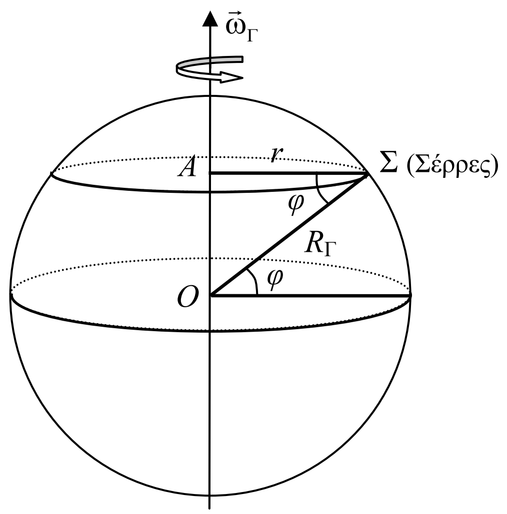
$$\upsilon = 2\pi R f \tag{3.34}$$

$$\omega = 2\pi f \tag{3.35}$$

Παράδειγμα 3.11

Να υπολογιστεί η γραμμική ταχύτητα των σημείων της επιφάνειας της Γης που βρίσκονται στο γεωγραφικό πλάτος των Σερρών (περίπου 41^o), αν η ακτίνα της Γης είναι 6.378 km.

Λύση



Σχήμα 3.14 *Υπολογισμός της γραμμικής ταχύτητας περιστροφής για την πόλη των Σερρών (Παράδειγμα 3.11)*

Γεωγραφικό πλάτος ενός τόπου, ονομάζουμε την γωνία φ που σχηματίζει ο τόπος αυτός με το επίπεδο του Ισημερινού της Γης (Σχήμα 3.14).

Καθώς η Γη περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_Γ γύρω από τον άξονά της, τα σημεία της επιφάνειας στην πόλη των Σερρών εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση πάνω στον μικρό κύκλο, ακτίνας r. Άρα :

$$\upsilon = \omega_\Gamma r$$

Η περίοδος περιστροφής της Γης είναι ως γνωστό 24 ώρες. Δηλαδή:

$$T = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{s}$$

και η συχνότητα περιστροφής :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{86400}\,\mathrm{Hz}$$

Συνεπώς η γωνιακή ταχύτητα της Γης είναι:

$$\omega_\Gamma = 2\pi f = \frac{2\pi}{86400}\,\mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

Ο υπολογισμός της ακτίνας r της κυκλικής τροχιάς μπορεί να γίνει από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΣ. Στο τρίγωνο αυτό η γωνία των R_Γ και r είναι ίση με το γεωγραφικό πλάτος φ (ως εντός εναλλάξ). Έτσι

$$r = R_\Gamma \cos\varphi$$

Έτσι καταλήγουμε ότι η γραμμική ταχύτητα είναι (μετατρέποντας και τις 41^{o} σε ακτίνια):

$$\upsilon = \omega_\Gamma\, r = 2\pi f r = \frac{2\pi R_\Gamma \cos\varphi}{T} = \frac{2\pi\cdot 6.378.000\cdot \cos\left(\frac{41}{180}\pi\right)}{86400}\,\mathrm{m}/\mathrm{s} \Rightarrow$$

$$\upsilon \cong 350\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$$

Επειδή στην καθημερινή μας ζωή μετράμε συνήθως την ταχύτητα σε km/h, ας μετατρέψουμε την παραπάνω ταχύτητα για να πάρουμε μια ιδέα πόσο γρήγορα κινούμαστε

$$\upsilon = 350\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 350\,\frac{\frac{1}{1000}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 350\,\frac{3600}{1000}\,\mathrm{km}/\mathrm{h} = 1260\,\mathrm{km}/\mathrm{h}$$

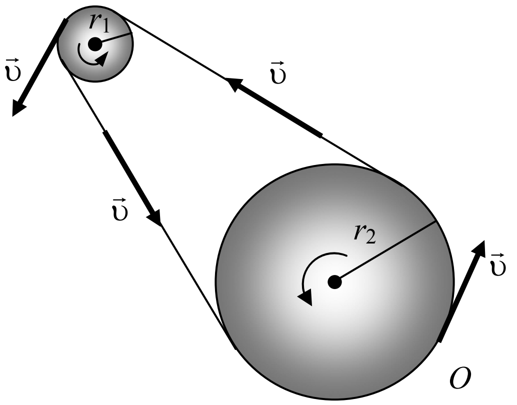
Και μετά, όταν πας με το αυτοκίνητο σου με 160 km/h σου δίνουν κλήση για υπερβολική ταχύτητα!!!

□

Παράδειγμα 3.12

Δύο τροχοί με ακτίνες $r_1 = 2$ cm και $r_2 = 20$ cm συνδέονται μεταξύ τους με ιμάντα. Αν ο πρώτος περιστρέφεται με συχνότητα f_1 = 120 στροφές/min, να βρεθεί η συχνότητα περιστροφής του δεύτερου τροχού.

Λύση



Σχήμα 3.15 *Περιστροφή δύο τροχών συνδεδεμένων με ιμάντα (Παράδειγμα 3.12)*

Καθώς οι δύο τροχοί συνδέονται με ιμάντα, τα σημεία της περιφέρειάς των έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα (που είναι ίδια με αυτή των σημείων του ιμάντα).

Έτσι για τον πρώτο τροχό έχουμε:

$$\upsilon = \omega_1\, r_1 = 2\pi\, f_1\, r_1$$

Αντίστοιχα για τον δεύτερο τροχό:

$$\upsilon = \omega_2\, r_2 = 2\pi\, f_2\, r_2$$

Από τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$2\pi\, f_1\, r_1 = 2\pi\, f_2\, r_2 \Rightarrow$$

$$f_1\, r_1 = f_2\, r_2 \Rightarrow f_2 = f_1 \frac{r_1}{r_2}$$

Άρα

$$f_2 = 120 \frac{\text{στροφές}}{\text{min}} \cdot \frac{2\ \text{cm}}{20\ \text{cm}} = 12 \frac{\text{στροφές}}{\text{min}}$$

ή καλύτερα

$$f_2 = 12 \frac{\text{στροφές}}{\text{min}} = 12 \frac{\text{στροφές}}{60\,\text{s}} = 0{,}2\ \text{Hz}$$

□

Τέλος, το ερώτημα που προκύπτει είναι το τι είναι αυτό που προκαλεί την μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ αλλά δεν προκαλεί μεταβολή στο μέτρο της.

Με βάση την σχέση αιτίου − αποτελέσματος, που συζητήσαμε στην αρχή του Κεφαλαίου, η απάντηση είναι απλή: Μια Δύναμη!

Όχι όμως μια οποιαδήποτε δύναμη. Για να έχουμε μεταβολή της διεύθυνσης και φοράς της ταχύτητας αλλά όχι και του μέτρου της η δύναμη θα πρέπει να είναι κάθετη στην ταχύτητα. Ισχύει δηλαδή ο παρακάτω κανόνας:

«Οι δυνάμεις που είναι κάθετες στην κίνηση (ταχύτητα) ενός σώματος ΔΕΝ μεταβάλλουν το μέτρο της ταχύτητας του».

Είναι σχετικά εύκολο να αποδείξουμε ότι αν σε ένα σώμα ασκείται δύναμη (και κατά συνέπεια επιτάχυνση) αλλά δεν μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας του, τότε η δύναμη είναι κάθετη στην ταχύτητα.

Έστω λοιπόν ένα σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ που το μέτρο της παραμένει σταθερό, δηλαδή $\frac{d\upsilon}{dt}=0$.

Αν αναλύσουμε την ταχύτητα του σώματος σε δύο συνιστώσες $\upsilon_x=\upsilon\cos\varphi$ και $\upsilon_y=\upsilon\sin\varphi$ πάνω σε άξονες x-y, όπου φ η γωνία που σχηματίζει η με τον άξονα των x, τότε η ταχύτητα γράφεται:

$$\vec{\upsilon}=\upsilon_x\vec{i}+\upsilon_y\vec{j}\Rightarrow\vec{\upsilon}=\upsilon\cos\varphi\,\vec{i}+\upsilon\sin\varphi\,\vec{j}\Rightarrow\vec{\upsilon}=\upsilon\left(\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}\right)\qquad(3.36)$$

όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x και y.
Η δύναμη που ασκείται στο σώμα προκαλεί επιτάχυνση, η οποία, ως γνωστό, είναι η παράγωγος, ως προς τον χρόνο, της ταχύτητας

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\upsilon}{dt}\left(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}\right)+\upsilon\left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{i}+\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{j}\right)$$

Εφόσον το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, $\frac{d\upsilon}{dt}=0$, τότε ο πρώτος όρος μηδενίζεται και η επιτάχυνση είναι

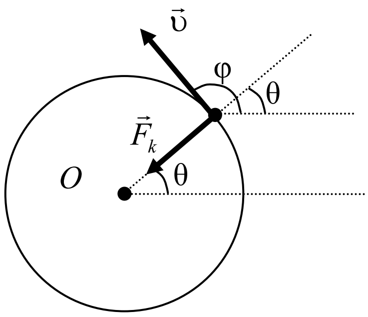
$$\vec{a}=\upsilon\frac{d\varphi}{dt}\left(-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}\right)\qquad(3.37)$$

Αν υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}&=\upsilon\left(\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}\right)\cdot\upsilon\frac{d\varphi}{dt}\left(-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}\right)=\\&=\upsilon^2\frac{d\varphi}{dt}\left(-\cos\varphi\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\right)=0\end{aligned}$$

Εφόσον το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$ είναι μηδέν, τα δύο διανύσματα είναι κάθετα. Άρα η επιτάχυνση και κατά συνέπεια η δύναμη, γιατί $\vec{F}=m\vec{a}$, είναι κάθετη στην ταχύτητα.

Επιστρέφοντας στην κυκλική κίνηση, έχουμε ότι η δύναμη που αλλάζει συνεχώς την διεύθυνση (και φορά) της ταχύτητας του σώματος αλλά όχι το μέτρο της θα πρέπει να είναι κάθετη στην ταχύτητα.



Σχήμα 3.16 *Δύναμη και γραμμική ταχύτητα στην κυκλική κίνηση.*

Η δύναμη αυτή ονομάζεται **κεντρομόλος** δύναμη, έχει σταθερό μέτρο και φορά πάντα προς το κέντρο της κυκλικής κίνησης.

Όπως μπορούμε να δούμε και από την σχέση (3.33) αντικαθιστώντας το $\varphi = \theta + \pi/2$ (βλέπε και σχήμα 3.15) και λαμβάνοντας υπόψη ότι :

$$\varphi = \theta + \pi/2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\sin\varphi = \sin\left(\theta + \pi/2\right) = \cos\theta$$

$$\cos\varphi = \cos\left(\theta + \pi/2\right) = -\sin\theta$$

καταλήγουμε ότι η κεντρομόλος δύναμη είναι ίση

$$\vec{F}_k = m\vec{a}_k = m\upsilon\omega\left(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}\right) \tag{3.38}$$

Δηλαδή έχει φορά πάντα προς το κέντρο, όρος $-\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$, και μέτρο σταθερό, ίσο με:

$$F_k = m\upsilon\omega = m\frac{\upsilon^2}{R} \tag{3.39}$$

Αντίστοιχα η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο

$$a_k = \upsilon\omega = \frac{\upsilon^2}{R} \tag{3.40}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η κεντρομόλος δύναμη ΔΕΝ είναι μια δύναμη της Φύσης, όπως είναι η βαρύτητα, η τριβή κ.λ.π. Αντιθέτως, όταν ένα σώμα αναγκάζεται να κινηθεί σε κυκλική τροχιά, κάποια από τις πραγματικές δυνάμεις της Φύσης παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κυκλική κίνηση των τεχνητών δορυφόρων που κινούνται γύρω από την Γη. Στην περίπτωση αυτή το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης παίζει η δύναμη της Παγκόσμιας Έλξης που ασκεί η Γή, λόγω της μάζας της, πάνω στους τεχνητούς δορυφόρους.

Αν λοιπόν ένας δορυφόρος μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης (δηλαδή σε απόσταση $r = R_\Gamma + h$, όπου R_Γ η ακτίνα της Γης) τότε η ελκτική δύναμη που ασκεί η Γη στον δορυφόρο είναι

$$F_G = G\frac{M_\Gamma\, m}{r^2}$$

Η δύναμη αυτή, όπως προείπαμε, παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου

$$F_k = m\frac{\upsilon^2}{r}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ταχύτητα του δορυφόρου.

$$F_G = F_k \Rightarrow G\frac{M_\Gamma\, m}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon^2 = G\frac{M_\Gamma}{r} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \qquad (3.41)$$

Επίσης θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και την περίοδο. Γνωρίζοντας ότι στην κυκλική κίνηση

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\upsilon}$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.41) έχουμε

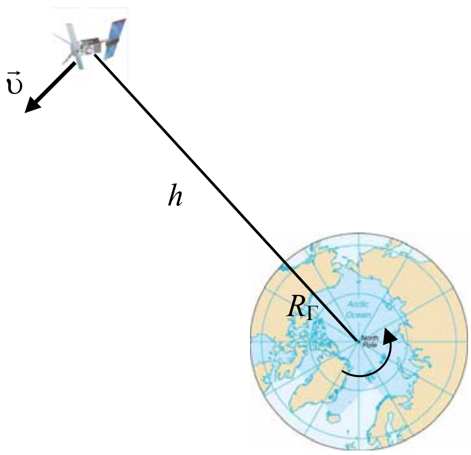
$$T = 2\pi\frac{R_\Gamma + h}{\sqrt{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\Gamma + h)^3}{G\, M_\Gamma}} \qquad (3.42)$$

Παράδειγμα 3.13

Να βρεθεί το ύψος, από την επιφάνεια της Γης, που πρέπει να βρίσκεται ένας τεχνητός δορυφόρος έτσι ώστε η τροχιά του να είναι γεωστατική. Δίνονται, μάζα Γης $M_\Gamma = 5{,}983\text{x}10^{24}\ \text{kg}$, ακτίνα Γης $R_\Gamma = 6.378\,\text{km}$, σταθερά Παγκόσμιας Έλξης $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2$.

Λύση

Γεωστατικός ονομάζεται ο δορυφόρος που ενώ περιφέρεται γύρο από την Γη, παραμένει πάντα στο ίδιο σημείο πάνω από έναν τόπο.



Σχήμα 3.17 *Περιφορά τεχνητού δορυφόρου γύρω από την Γη. (Παράδειγμα 3.13)*

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να κινείται στο επίπεδο του Ισημερινού και η περιφορά του να ακολουθεί την περιστροφή της Γης. Δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς του να είναι ίση με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης ($\omega = \omega_\Gamma$). Ή με άλλα λόγια, η περίοδος του είναι ίση με την περίοδο περιστροφής της Γης, δηλαδή $T = 24\,\mathrm{h} = 86.400\,\mathrm{s}$.

Η περίοδος ενός δορυφόρου δίνεται από την σχέση (3.38)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\Gamma + h)^3}{G\,M_\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{(R_\Gamma + h)^3}{G\,M_\Gamma} \Rightarrow (R_\Gamma + h)^3 = \frac{G\,M_\Gamma\,T^2}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$(R_\Gamma + h) = \sqrt[3]{\frac{G\,M_\Gamma\,T^2}{4\pi^2}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην προηγούμενη σχέση, προσέχοντας όλες οι μονάδες να είναι στο SI, βρίσκουμε $R_\Gamma + h = 4{,}2258 \cdot 10^7\,\mathrm{m} = 42.258\,\mathrm{km}$. Άρα το ύψος, από την επιφάνεια της Γης, που πρέπει να βρίσκεται ένας τεχνητός δορυφόρος έτσι ώστε η τροχιά του να είναι γεωστατική είναι $h = 35.880\,\mathrm{km}$

□

3.6.3 *Δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου*

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που η δύναμη δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται και μάλιστα η μεταβολή της είναι συνάρτηση του χρόνου.

$$F = f(t) \qquad (3.43)$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι η

$$F = A\sin(\Omega\, t) \qquad \text{όπου Α, Ω σταθερές} \qquad (3.44)$$

δηλαδή, η εξωτερική διέγερση τεχνικών κατασκευών από ένα σεισμικό κύμα, μακριά από την εστία του σεισμού!

Στην περίπτωση αυτή η επίλυση του προβλήματος γίνεται με ΑΠΕΥΘΕΙΑΣ ολοκλήρωση.

- Από τον θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής βρίσκω την επιτάχυνση

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

- Με ολοκλήρωση της επιτάχυνσης βρίσκω την ταχύτητα

$$\upsilon(t) = \int a(t) dt$$

  Η λύση του ολοκληρώματος θα περιέχει φυσικά και μια άγνωστη σταθερή την οποία μπορώ να υπολογίσω αν γνωρίζω (από την εκφώνηση του προβλήματος) την ταχύτητα του σώματος σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

- Με ολοκλήρωση της ταχύτητας βρίσκω την θέση

$$x(t) = \int \upsilon(t) dt$$

  Η λύση και αυτού του ολοκληρώματος θα περιέχει επίσης μια άγνωστη σταθερή την οποία μπορώ να υπολογίσω αν γνωρίζω (από την εκφώνηση του προβλήματος) την θέση του σώματος σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Για να έχω λοιπόν πλήρη λύση του προβλήματος, θα πρέπει να γνωρίζω την θέση και την ταχύτητα του σώματος σε κάποια χρονική στιγμή. Συνήθως η τιμές αυτές δίνονται για την χρονική στιγμή $t = 0$ και ονομάζονται **αρχικές συνθήκες** του προβλήματος.

Παράδειγμα 3.14

Υλικό σημείο μάζας $m = 2$ kg κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F(t) = k\,t$, όπου k σταθερή ίση με $k = 4\ \mathrm{N/s}$. Στην κίνηση αυτή αντιτίθεται μία σταθερή δύναμη τριβής ίση με $T = 2$ N. Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρισκόταν ακίνητο στην αρχή των αξόνων, να βρεθεί η θέση και η ταχύτητά του κατά την χρονική στιγμή $t = 10$ s.

Λύση

Πρώτα βρίσκουμε την έκφραση της συνιστάμενης δύναμης

$$\sum F = F(t) - T$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για να βρούμε την επιτάχυνση

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F}{m} \Rightarrow a = \frac{k}{m}t - \frac{T}{m}$$

Στην συνέχεια με ολοκλήρωση βρίσκουμε την εξίσωση της ταχύτητας

$$\upsilon = \int a\,dt \Rightarrow \upsilon = \int\left(\frac{k}{m}t - \frac{T}{m}\right)dt \Rightarrow \upsilon = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} - \frac{T}{m}t + c_1 \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{k}{2m}t^2 - \frac{T}{m}t + c_1$$

Η αυθαίρετη σταθερή c_1 υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες. Ξέρουμε ότι όταν $t = 0$ το σώμα ήταν ακίνητο, δηλαδή $\upsilon = 0$. Αντικαθιστώντας $\upsilon = 0$ και $t = 0$ στην παραπάνω εξίσωση της ταχύτητας βρίσκουμε

$$0 = \frac{k}{2m}0^2 - \frac{T}{m}0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

Έτσι η εξίσωση της ταχύτητας γράφεται:

$$\upsilon = \frac{k}{2m}t^2 - \frac{T}{m}t$$

Η εξίσωση της θέσης υπολογίζεται με ολοκλήρωση της ταχύτητας

$$x = \int \upsilon\,dt \Rightarrow x = \int\left(\frac{k}{2m}t^2 - \frac{T}{m}t\right)dt \Rightarrow x = \frac{k}{2m}\frac{t^3}{3} - \frac{T}{m}\frac{t^2}{2} + c_2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{k}{6m}t^3 - \frac{T}{2m}t^2 + c_2$$

Η αυθαίρετη σταθερή c_2 επίσης υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες. Ξέρουμε ότι όταν $t = 0$ το σώμα ήταν στην αρχή των αξόνων, δηλαδή $x = 0$. Αντικαθιστώντας $x = 0$ και $t = 0$ στην παραπάνω εξίσωση της θέσης βρίσκουμε:

$$0 = \frac{k}{6m}0^3 - \frac{T}{2m}0^2 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

Οπότε η εξίσωση της θέσης γράφεται

$$x = \frac{k}{6m}t^3 - \frac{T}{2m}t^2$$

Η άσκηση ζητάει να βρούμε την θέση και την ταχύτητα την χρονική στιγμή $t = 10$ s. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε λοιπόν είναι να αντικαταστήσουμε στις παραπάνω τελικές σχέσεις θέσης και ταχύτητας την τιμή του χρόνου που μας ενδιαφέρει και τις τιμές των σταθερών k και m.

$$x = \frac{k}{6m}t^3 - \frac{T}{2m}t^2 \Rightarrow x = \frac{4\ \mathrm{N}/\mathrm{s}}{6 \cdot 2\ \mathrm{kg}}(10\ \mathrm{s})^3 - \frac{2\,\mathrm{N}}{2 \cdot 2\ \mathrm{kg}}(10\ \mathrm{s})^2 \Rightarrow x = 283{,}33\ \mathrm{m}$$

$$\upsilon = \frac{k}{2m}t^2 - \frac{T}{m}t \Rightarrow \upsilon = \frac{4\ \mathrm{N}/\mathrm{s}}{2 \cdot 2\ \mathrm{kg}}(10\ \mathrm{s})^2 - \frac{2\ \mathrm{N}}{2\ \mathrm{kg}}(10\ \mathrm{s}) \Rightarrow \upsilon = 90\ \mathrm{m}/\mathrm{s}$$

□

3.6.4 Δύναμη ως συνάρτηση της θέσης

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης

$$F = f(x) \tag{3.45}$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιας δύναμης είναι:

i. Η δύναμη της ελαστικής παραμόρφωσης (νόμος Hook)

$$F = -k\,x \qquad k: \text{σταθερά} \tag{3.46}$$

ii. Η δύναμη της Παγκόσμιας Έλξης (νόμος Newton) σε μία διάσταση

$$F = -G\frac{m_1\,m_2}{x^2} \qquad G: \text{σταθερά} \tag{3.47}$$

iii. Η δύναμη της ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης (νόμος Coulomb) σε μία διάσταση

$$F = K_{\eta\lambda}\frac{q_1\,q_2}{x^2} \qquad K_{\eta\lambda}: \text{σταθερά} \tag{3.48}$$

Παρατηρήστε πόσο όμοιες συναρτησιακά είναι οι δύο τελευταίες!

Στην περίπτωση αυτή, που η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης, η επίλυση του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί με ειδική μεθοδολογία την οποία θα αναπτύξουμε παρακάτω:

- Από τον θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής βρίσκω την επιτάχυνση

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{1}{m} f(x)$$

- Η επιτάχυνση όμως είναι η παράγωγος, ως προς τον χρόνο της ταχύτητας

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

οπότε

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{m} f(x)$$

- Πολλαπλασιάζω και διαιρώ το αριστερό μέλος με dx

$$\frac{dx}{dx}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{m} f(x)$$

- Εναλλάσσω τους παρονομαστές στο αριστερό μέλος

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{1}{m} f(x)$$

Όπως ίσως έχετε αντιληφθεί, αυτός δεν είναι παρά ένας λίγο “μπακάλικος” τρόπος εφαρμογής του «κανόνα της αλυσίδας» (σύνθετη παραγώγιση) του διαφορικού λογισμού.

- Η ταχύτητα όμως είναι η παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}$$

οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{1}{m} f(x)$$

- Απομονώνω ότι έχει την ταχύτητα υ στο αριστερό μέρος και ότι έχει την θέση x στο δεξί.

$$\upsilon\, d\upsilon = \frac{1}{m} f(x) dx$$

- Ολοκληρώνω και τα δύο μέλη.

$$\int \upsilon \, d\upsilon = \frac{1}{m}\int f(x)dx$$

Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους είναι στοιχειώδες και μας δίνει

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{1}{m}\int f(x)dx \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \frac{2}{m}\int f(x)dx$$

Υπολογίζοντας και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους βρίσκουμε την ταχύτητα. Όπως είναι φανερό, η ταχύτητα θα δίνεται και αυτή ως συνάρτηση της θέσης.

- Κατόπιν από τον ορισμό της ταχύτητας

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}$$

υπολογίζω με αντίστοιχο τρόπο την συνάρτηση της θέσης.

Αφού βρω την συνάρτηση της θέσης $x(t)$, μπορώ, αν θέλω, να την αντικαταστήσω στις σχέσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης έτσι ώστε και αυτές να εκφραστούν σαν συναρτήσεις του χρόνου.

Παράδειγμα 3.15

Σώμα μάζας $m = 1$ kg κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F(x) = k/\sqrt{x}$, όπου k σταθερή ίση με $k = 1\,\mathrm{N\,m^{1/2}}$. Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρισκόταν ακίνητο στη θέση $x = 1$ m, να βρεθεί η ταχύτητά του όταν φτάσει στην θέση $x = 4$ m.

Λύση

Η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{k}{m\sqrt{x}}$$

Η επιτάχυνση μπορεί να εκφραστεί ως η παράγωγος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{k}{m\sqrt{x}}$$

Πολλαπλασιάζω και διαιρώ το αριστερό μέλος με dx

$$\frac{dx}{dx}\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{k}{m\sqrt{x}}$$

Αλλάζω τους παρανομαστές στο αριστερό μέλος

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{k}{m\sqrt{x}}$$

Αντικαθιστώ τον ρυθμό μεταβολής της θέσης, ${dx}/{dt}$, με την ταχύτητα υ

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{k}{m\sqrt{x}}$$

Απομονώνω ότι έχει την ταχύτητα υ στο αριστερό μέρος και ότι έχει την θέση x στο δεξί και ολοκληρώνω και τα δύο μέλη.

$$\upsilon d\upsilon=\frac{k}{m\sqrt{x}}dx\Rightarrow\int\upsilon d\upsilon=\frac{k}{m}\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Υπολογίζω τα δύο ολοκληρώματα

$$\int\upsilon d\upsilon=\frac{k}{m}\int\frac{dx}{\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{\upsilon^2}{2}+c_1=\frac{k}{m}\int x^{-1/2}dx\Rightarrow\frac{\upsilon^2}{2}+c_1=\frac{k}{m}2x^{1/2}+c_2\Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon^2}{2}=\frac{k}{m}2x^{1/2}+\left(c_2-c_1\right)\Rightarrow\frac{\upsilon^2}{2}=\frac{k}{m}2x^{1/2}+c\Rightarrow$$

$$\upsilon^2=\frac{4k}{m}x^{1/2}+c\Rightarrow\upsilon^2=\frac{4k}{m}\sqrt{x}+c$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η σταθερή c είναι μια άγνωστη σταθερή. Έτσι είτε την πολλαπλασιάσουμε, είτε την διαιρέσουμε ή προσθέσουμε σε αυτή έναν αριθμό, αυτή παραμένει να είναι μια άγνωστη σταθερή. Έτσι στη τελευταία εξίσωση είτε γράψουμε $2c$, είτε απλώς c είναι το ίδιο πράγμα, μια άγνωστη σταθερή.

Από τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε την τιμή της c αντικαθιστώντας $x=1$, $\upsilon=0$ (το σώμα ήταν ακίνητο) καθώς και τις τιμές των k και m

$$0^2=\frac{4\cdot1}{1}\sqrt{1}+c\Rightarrow c=-4\ \mathrm{m^2/s^2}$$

Επιστέφοντας στην εξίσωση της ταχύτητας βλέπουμε ότι

$$\upsilon^2 = \frac{4k}{m}\sqrt{x} + c \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{4k}{m}\sqrt{x} + c}$$

Από τα δύο πρόσημα επιλέγω το θετικό καθώς το σώμα κινείται προς τον θετικό άξονα των x και αυξάνει την απόστασή του (από το $x = 1\,\mathrm{m}$ πήγε στο $x = 4\,\mathrm{m}$). Άρα η ταχύτητα του είναι θετική

$$\upsilon = \sqrt{\frac{4k}{m}\sqrt{x} + c}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των k, m, c και την τιμή της θέσης $x = 4\,\mathrm{m}$ βρίσκουμε

$$\upsilon = \sqrt{\frac{4k}{m}\sqrt{x} + c} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{4\cdot 1}{1}\sqrt{4} - 4} \Rightarrow \upsilon = 2\ \mathrm{m/s}$$

□

Παράδειγμα 3.16

Σώμα μάζας $m = 2$ kg κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F(x) = k\,x$, όπου k σταθερή ίση με $k = 2\ \mathrm{N\,m^{-1}}$. Σε κάποια χρονική στιγμή t_0, $0 \le t_0 < 1$, το υλικό σημείο βρίσκεται στην θέση $x = 3$ m και έχει ταχύτητα $\upsilon = 3\ \mathrm{m/s}$, ενώ την χρονική στιγμή $t = 1$ s, το σώμα βρίσκεται στην θέση $x = e^2$ m. Να βρεθεί η θέση του κατά την χρονική στιγμή $t = \ln 10 - 1$ s.

Λύση

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε για την επιτάχυνση του σώματος

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{k}{m}x$$

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση του παραδείγματος θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι όταν λύνουμε μια άσκηση υπάρχουν δύο τρόποι επίλυσης της:

- Ο πρώτος τρόπος, ο οποίος είναι και επιστημονικά ορθότερος, είναι να κρατήσουμε σε όλες τις διαδοχικές πράξεις, τις αρχικές μεταβλητές χωρίς να αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τους τιμές, μέχρι να καταλήξουμε σε έναν τελικό τύπο. Αφού καταλήξουμε σε ένα τελικό τύπο, τότε και μόνο τότε να αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές για να βρούμε το τελικό αποτέλεσμα που μας ζητείται.

Ο τρόπος αυτός έχει το πλεονέκτημα ότι μαζί με τις μεταβλητές κρατάμε και τις μονάδες μέτρησης, έτσι ώστε να μπορούμε να ελέγξουμε αν το τελικό αποτέλεσμα είναι σωστό ή λάθος. Επίσης, τελικός τύπος που καταλήγουμε, είναι η γενική λύση του προβλήματος και δεν εξαρτάται από τις συγκεκριμένες τιμές που μας δόθηκαν. Φυσικά, έχει το μειονέκτημα ότι μας οδηγεί σε περισσότερες πράξεις και πιο πολύπλοκους τύπους.

- Ο δεύτερος τρόπος, όπως ίσως καταλάβατε, είναι να αντικαταστήσουμε από την αρχή τις τιμές των μεταβλητών που γνωρίζουμε και να κάνουμε τυχόν πράξεις ή απλοποιήσεις.

  Ο τρόπος αυτός έχει το πλεονέκτημα ότι οδηγεί σε πολύ απλούστερες εξισώσεις, οι οποίες όμως έχουν χάσει το νόημα ως προς τις μονάδες μέτρησης. Συγκεκριμένα ας πάρουμε την παραπάνω εξίσωση της επιτάχυνσης.

  Αντικαθιστώντας τις τιμές των k και m έχουμε

$$a = \frac{k}{m} x \Rightarrow a = \frac{2}{2} x \Rightarrow a = x$$

  Καταλήγουμε δηλαδή ότι η επιτάχυνση είναι ίση με την θέση! Αυτό είναι αδύνατο. Δεν μπορεί για παράδειγμα τα 2 m/s^2 να ισούνται με τα 2 m!

  Αυτό που εννοούμε με την παραπάνω εξίσωση είναι ότι η <u>αριθμητική</u> τιμή της επιτάχυνσης ισούται με την <u>αριθμητική</u> τιμή της θέσης.

  Επειδή λοιπόν, με την μέθοδο αυτή, χάνεται η σχέση μεταξύ των μονάδων μέτρησης, θα πρέπει, πριν την χρησιμοποιήσουμε, να σιγουρευτούμε ότι <u>όλες</u> οι μεταβλητές είναι στο ίδιο σύστημα μονάδων (συνήθως στο SI).
  Προφανές μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι η λύση που μας δίνει είναι λύση του συγκεκριμένου προβλήματος μόνο. Έτσι αν μας δοθεί το ίδιο πρόβλημα αλλά με άλλες αριθμητικές τιμές (π.χ. $m = 10$ kg) θα πρέπει να το ξαναλύσουμε από την αρχή.

Ας συνεχίσουμε λοιπόν, χρησιμοποιώντας, σαν παράδειγμα, αυτή την φορά, την δεύτερη μέθοδο. Η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι

$$a = x$$

Από την οποία έχουμε

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{dx}\frac{d\upsilon}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{dt}\frac{d\upsilon}{dx} = x \Rightarrow \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = x \Rightarrow$$

$$\upsilon d\upsilon = x dx \Rightarrow \int \upsilon d\upsilon = \int x dx \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1$$

Για $x=3$ έχουμε από την εκφώνηση του προβλήματος $\upsilon=3$ οπότε καταλήγουμε ότι $c_1=0$. Οπότε

$$\upsilon^2=x^2 \Rightarrow \begin{cases} \upsilon=x \\ \\ \upsilon=-x \end{cases}$$

Από τις δύο λύσεις επιλέγουμε την πρώτη γιατί από την εκφώνηση έχουμε όταν $x=3$, $\upsilon=3$ άρα $\upsilon=x$.

Αλλά η ταχύτητα είναι η παράγωγος της θέσης

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}=x \Rightarrow \frac{dx}{x}=dt \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int dt \Rightarrow \ln x=t+c_2 \Rightarrow$$

$$x=e^{t+c_2}$$

Από την δεύτερη αρχική συνθήκη έχουμε ότι όταν $t=1$, $x=e^2$. Οπότε έχουμε

$$e^2=e^{1+c_2} \Rightarrow 2=1+c_2 \Rightarrow c_2=1$$

Άρα η θέση x ως συνάρτηση του χρόνου t γράφεται

$$x=e^{t+1}$$

Προφανώς, αφού $\upsilon=x$, θα έχουμε και

$$\upsilon=e^{t+1}$$

Τελικά, για $t=\ln 10-1$, έχουμε

$$x=e^{\ln 10-1+1} \Rightarrow x=e^{\ln 10} \Rightarrow x=10 \text{ m.}$$

□

Σαν τελευταίο παράδειγμα, ας δούμε την κίνηση ενός σώματος που έλκεται (ή απωθείται) από ένα ελατήριο. Η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση και είναι γνωστή από τα βιβλία του Λυκείου. Στα βιβλία του Λυκείου όμως δεν λύνεται το πρόβλημα αναλυτικά, αλλά δίνεται μόνο το τελικό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 3.17

Σώμα μάζας m κρέμεται από ελατήριο σταθεράς k και ισορροπεί στην θέση $x=0$. Το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας στην θέση $x=A$ και την χρονική στιγμή $t=0$ αφήνεται, χωρίς αρχική ταχύτητα, ελεύθερο να κινηθεί υπό την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου. Η δύναμη του ελατηρίου, σύμφωνα με τον νόμο του Hook, δίνεται από την σχέση $F=-k\,x$. Να βρεθεί η εξίσωση της θέσης και της ταχύτητας του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου

Λύση

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε

$$F=ma \Rightarrow a=\frac{F}{m} \Rightarrow a=-\frac{k}{m}x$$

Η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας

$$a=-\frac{k}{m}x=\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{dx}{dx}\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{dx}{dt}\frac{d\upsilon}{dx}=-\frac{k}{m}x \Rightarrow$$

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}=-\frac{k}{m}x \Rightarrow \upsilon\,d\upsilon=-\frac{k}{m}x\,dx \Rightarrow \int \upsilon\,d\upsilon=-\frac{k}{m}\int x\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon^2}{2}=-\frac{k}{m}\frac{x^2}{2}+c_1$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι όταν $x=A$, $\upsilon=0$. Άρα

$$\frac{0^2}{2}=-\frac{k}{m}\frac{A^2}{2}+c_1 \Rightarrow c_1=\frac{k}{m}\frac{A^2}{2}$$

και η εξίσωση της ταχύτητας γράφεται

$$\frac{\upsilon^2}{2}=\frac{k}{m}\frac{A^2}{2}-\frac{k}{m}\frac{x^2}{2} \Rightarrow \upsilon^2=\frac{k}{m}A^2-\frac{k}{m}x^2 \Rightarrow \upsilon^2=\frac{k}{m}\left(A^2-x^2\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon^2=\frac{k}{m}A^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right) \Rightarrow \upsilon=\pm\sqrt{\frac{k}{m}A^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\upsilon=\pm A\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)}$$

Δυστυχώς δεν έχουμε κάτι που να μας λέει πιο από τα δύο πρόσημα της ταχύτητας να διαλέξω. Ας προσπαθήσουμε να κρατήσουμε και τα δύο και να πάμε παρακάτω!

Η ταχύτητα είναι η παράγωγος της θέσης. Άρα

$$\frac{dx}{dt} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)}} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}dt \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)}} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}\int dt$$

Το δεξιό ολοκλήρωμα είναι πολύ απλό, το αριστερό όμως θέλει λίγο κόπο για να υπολογιστεί!

Έχουμε λοιπόν για το αριστερό ολοκλήρωμα

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)}}$$

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα το $x = A\cos\varphi$, οπότε έχουμε $dx = -A\sin\varphi d\varphi$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int\frac{-A\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{A^2\cos^2\varphi}{A^2}\right)}} = -A\int\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\left(1-\cos^2\varphi\right)}} = -A\int\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi}} = -A\int d\varphi = -A(\varphi + c_2)$$

Πρέπει όμως να επιστρέψουμε το ολοκλήρωμα στην αρχική του μεταβλητή, το x.

$$x = A\cos\varphi \Rightarrow \frac{x}{A} = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{x}{A}$$

Έτσι το αριστερό ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = -A\left(\arccos\frac{x}{A} + c_2\right)$$

Το δεξιό ολοκλήρωμα μας δίνει

$$I = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}\int dt = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Άρα καταλήγουμε

$$-A\left(\arccos\frac{x}{A}+c_2\right)=\pm A\sqrt{\frac{k}{m}}t \Rightarrow \left(\arccos\frac{x}{A}+c_2\right)=\mp\sqrt{\frac{k}{m}}t \Rightarrow$$

$$\arccos\frac{x}{A}=\mp\sqrt{\frac{k}{m}}t+c_2 \Rightarrow \frac{x}{A}=\cos\left(\mp\sqrt{\frac{k}{m}}t+c_2\right)\Rightarrow$$

$$x=A\cos\left(\mp\sqrt{\frac{k}{m}}t+c_2\right)$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι όταν $t=0$, $x=A$. Άρα

$$A=A\cos\left(\mp\sqrt{\frac{k}{m}}0+c_2\right)\Rightarrow 1=\cos c_2 \Rightarrow c_2=0$$

και η εξίσωση της θέσης γράφεται

$$x=A\cos\left(\mp\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Για να δούμε λίγο και αυτό το πρόσημο $\mp$ που έχουμε μέσα στην παρένθεση. Γνωρίζουμε από την τριγωνομετρία ότι $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$. Άρα τελικά η εξίσωση της θέσης γράφεται

$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Όπως βλέπουμε από την εξίσωση, το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με μέγιστο πλάτος A και γωνιακή ταχύτητα $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Η σχέση της ταχύτητας μπορεί να βρεθεί είτε αντικαθιστώντας την σχέση της θέσης στην εξίσωση της ταχύτητας που βρήκαμε πιο πάνω (κάτι που απαιτεί πολλές πράξεις όμως) ή απλά παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την εξίσωση της θέσης.

$$\upsilon=-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

□

3.6.5 Δύναμη ως συνάρτηση της ταχύτητας

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που η δύναμη είναι συνάρτηση της ταχύτητας

$$F = f(\upsilon) \tag{3.49}$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι η δύναμη της αντίστασης του αέρα, R, (βλέπε παράγραφο 3.2.3) κατά την πτώση ενός σώματος λόγω του βάρους του.

Στην περίπτωση, λοιπόν, που η δύναμη είναι συνάρτηση της ταχύτητας, η επίλυση του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί την παρακάτω μεθοδολογία:

- Από τον θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής βρίσκω την επιτάχυνση

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{1}{m} f(\upsilon)$$

- Η επιτάχυνση όμως είναι η παράγωγος, ως προς τον χρόνο της ταχύτητας

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

οπότε

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{m} f(\upsilon) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{f(\upsilon)} = \frac{1}{m} dt$$

- Ολοκληρώνω και τα δύο μέλη

$$\int \frac{d\upsilon}{f(\upsilon)} = \frac{1}{m} \int dt$$

- Το δεξιό ολοκλήρωμα είναι στοιχειώδες. Οπότε έχουμε

$$\int \frac{d\upsilon}{f(\upsilon)} = \frac{1}{m} t + c_1$$

- Υπολογίζουμε το αριστερό ολοκλήρωμα και λύνουμε ως προς υ.

- Από τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε την σταθερή c_1 και αντικαθιστώντας έχουμε την σχέση της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου

$$\upsilon = \upsilon(t)$$

- Τέλος, ολοκληρώνοντας την ταχύτητα βρίσκουμε την εξίσωση της θέσης

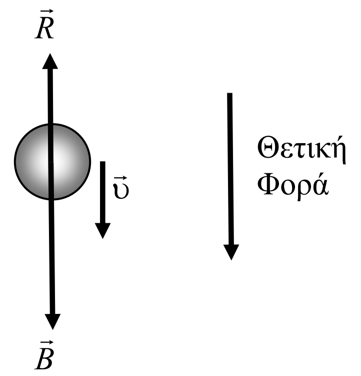
$$x = \int \upsilon\, dt$$

Σαν εφαρμογή της μεθόδου, για να γίνει και πιο κατανοητή, θα μελετήσουμε την πτώση ενός σώματος, στο πεδίο βαρύτητας της Γης, υπό την επίδραση της αντίστασης του αέρα.

Παράδειγμα 3.17

Σώμα μάζας m πέφτει από ύψος h υπό την επίδραση του βάρους του. Στην πτώση του αντιστέκεται δύναμη ανάλογη της ταχύτητάς του, $R = b\upsilon$ (αντίσταση του αέρα). Να προσδιοριστεί η ταχύτητα του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

<u>Λύση</u>



Σχήμα 3.18 *Πτώση σώματος υπό την επίδραση του βάρους του και της αντίστασης του αέρα (Παράδειγμα 3.17)*

Επειδή το σώμα πέφτει προς τα κάτω, για ευκολία, επιλέγω ως θετική φορά της κίνησης, την κίνηση προς τα κάτω.

Η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν στο σώμα είναι:

$$\sum F = B - R = mg - b\upsilon$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$$\sum F = ma \Rightarrow ma = mg - b\upsilon$$

Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας. Όσο πέφτει το σώμα, λόγω της επιτάχυνσης, αυξάνεται η ταχύτητά του. Αλλά όσο αυξάνεται η ταχύτητά του τόσο μειώνεται η επιτάχυνση. Έστω λοιπόν, ότι σε κάποια χρονική στιγμή (δεν μας ενδιαφέρει αυτή την στιγμή σε ποια) η ταχύτητά του έχει μεγαλώσει τόσο ώστε:

$$mg = b\upsilon$$

Τότε προφανώς $a = 0$ και η ταχύτητα του δεν αυξάνεται άλλο. Δηλαδή από εκείνη την στιγμή και μετά το σώμα πέφτει με σταθερή πια ταχύτητα.

Η εν λόγω σταθερή ταχύτητα ονομάζεται “οριακή ταχύτητα” και προσδιορίζεται από την παραπάνω σχέση

$$m\,g = b\upsilon_{\text{ορ}} \Rightarrow \upsilon_{\text{ορ}} = \frac{m\,g}{b}$$

Αντικαθιστώντας το $m\,g$ από την παραπάνω σχέση, στην σχέση του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής έχουμε

$$m\,a = m\,g - b\upsilon \Rightarrow m\,a = b\upsilon_{\text{ορ}} - b\upsilon \Rightarrow a = \frac{b}{m}\left(\upsilon_{\text{ορ}} - \upsilon\right) \Rightarrow$$

$$a = \upsilon_{\text{ορ}}\frac{b}{m}\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}\right)$$

Η επιτάχυνση είναι, ως γνωστό, η παράγωγος της ταχύτητας. Οπότε

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon_{\text{ορ}}\frac{b}{m}\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}\right) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}} = \upsilon_{\text{ορ}}\frac{b}{m}dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{d\upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}} = \upsilon_{\text{ορ}}\frac{b}{m}\int dt$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα μπορεί να λυθεί με την αντικατάσταση $u = 1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}$, οπότε

$du = -\frac{d\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}} \Rightarrow d\upsilon = -\upsilon_{\text{ορ}}du$. Έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{d\upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}} = \int \frac{-\upsilon_{\text{ορ}}du}{u} = -\upsilon_{\text{ορ}}\int \frac{du}{u} = -\upsilon_{\text{ορ}}\ln u + c = -\upsilon_{\text{ορ}}\ln\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}\right) + c$$

και έτσι έχουμε

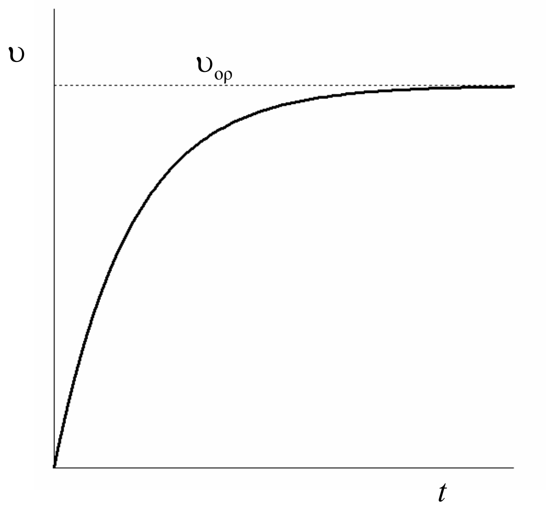
$$\int \frac{d\upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}} = \upsilon_{\text{ορ}}\frac{b}{m}\int dt \Rightarrow -\upsilon_{\text{ορ}}\ln\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}\right) = \upsilon_{\text{ορ}}\frac{b}{m}t + c \Rightarrow$$

$$\ln\left(1-\frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}\right)=-\frac{b}{m}t+c\Rightarrow 1-\frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}=e^{-\frac{b}{m}t+c}\Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{ορ}}}=1-e^{-\frac{b}{m}t+c}\Rightarrow \upsilon=\upsilon_{\text{ορ}}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t+c}\right)$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι όταν $t=0$, $\upsilon=0$. Έτσι από την παραπάνω εξίσωση της ταχύτητας έχουμε για την σταθερή c:

$$0=\upsilon_{\text{ορ}}\left(1-e^{-\frac{b}{m}0+c}\right)\Rightarrow 1-e^{c}=0\Rightarrow e^{c}=1\Rightarrow c=0$$



Σχήμα 3.19 *Η ταχύτητα του σώματος, ως συνάρτηση του χρόνου, κατά την πτώση υπό την επίδραση του βάρους του και της αντίστασης του αέρα (Παράδειγμα 3.17)*

Οπότε η εξίσωση της ταχύτητας πτώσης του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου είναι:

$$\upsilon=\upsilon_{\text{ορ}}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

Στο σχήμα 3.19 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα αυξάνεται αλλά ο ρυθμός αύξησης της (επιτάχυνση) μειώνεται συνεχώς. Η ταχύτητα καθώς περνάει ο χρόνος, τείνει ασυμπτωτικά στην οριακή ταχύτητα, την οποία όμως θεωρητικά θα φτάσει μετά από «άπειρο» χρόνο, δηλαδή ποτέ!

□

3.7 Ορμή − Ώθηση

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$$F=ma\Rightarrow F=m\frac{d\upsilon}{dt} \qquad (3.50)$$

Εάν η μάζα m του υλικού σημείου στο οποίο αναφερόμαστε είναι σταθερή (όπως συμβαίνει συνήθως), τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\Rightarrow F=\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}\Rightarrow F=\frac{d\vec{p}}{dt} \tag{3.51}$$

Η μορφή αυτή είναι η μορφή με την οποία διατυπώθηκε για πρώτη φορά ο Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής από τον Newton. Το μέγεθος p, που είχε ονομάσει "ποσότητα κίνησης", εμείς, σήμερα, το ονομάζουμε **ορμή** του υλικού σημείου.

$$\vec{p}=m\vec{\upsilon} \tag{3.52}$$

Η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος, με διεύθυνση και φορά ίδιες με αυτές της ταχύτητας και μετριέται (στο SI) σε $\mathrm{kg}\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}}$.

Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτή τη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής (σχέση 3.50), η δύναμη δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι εάν για κάποιο σώμα η δύναμη που ασκείται (ή σε περίπτωση πολλών δυνάμεων, η συνισταμένη) είναι μηδέν τότε:

$$F=0\Rightarrow\frac{d\vec{p}}{dt}=0 \tag{3.53}$$

Δηλαδή η ορμή του παραμένει σταθερή ($\vec{p}=$σταθ.).

Η παραπάνω πρόταση αποτελεί την **αρχή διατήρησης της ορμής**, η οποία είναι μία από τις βασικότερες αρχές της Φυσικής.

Αν στο σώμα ασκείται δύναμη διάφορη του μηδενός τότε

$$\vec{F}\neq 0\Rightarrow\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}\Rightarrow d\vec{p}=\vec{F}dt\Rightarrow\int_{\vec{p}_{\alpha\rho\chi}}^{\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}}d\vec{p}=\int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}}\vec{F}dt\Rightarrow$$

$$\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}-\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}}\vec{F}dt \tag{3.54}$$

Δηλαδή, η μεταβολή της ορμής μεταξύ μιας αρχικής τιμής $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}$ και μιας τελικής τιμής $\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ισούται με το ολοκλήρωμα

$$\vec{J}=\int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}}\vec{F}dt \tag{3.55}$$

το οποίο ονομάζεται **ώθηση**, $\vec{J}$, της δύναμης $\vec{F}$.

Στην περίπτωση που η δύναμη είναι σταθερή (ως προς τον χρόνο και την θέση) έχουμε:

$$\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \vec{F} dt \Rightarrow \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{F} \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} dt \Rightarrow \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{F}\left(t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}\right)$$

ή πιο συνεπτυγμένα:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t \tag{3.56}$$

(θεώρημα Ώθησης – Ορμής).

3.8 Έργο – Ενέργεια

Με βάση την φιλοσοφία αιτίου → αποτελέσματος, κάποιος θα αναρωτηθεί : «Αν η δύναμη είναι το αποτέλεσμα, τότε πιο είναι το αίτιο που την δημιουργεί; Τι είναι αυτό που εκφράζεται με την εκδήλωση μιας δύναμης;» Η απάντηση στο ερώτημα είναι : Η μεταβολή της ενέργειας! Ναι, αλλά τι είναι η ενέργεια;

Κάθε απομονωμένο πεδίο χαρακτηρίζεται από ένα μέγεθος το οποίο παραμένει σταθερό, ή όπως συνήθως λέμε, από ένα μέγεθος που διατηρείται. Λέμε τότε ότι το πεδίο περικλείει **ενέργεια**. Η ενέργεια είναι ένα μέγεθος μονόμετρο και μπορεί να είναι είτε θετική, είτε αρνητική. Η ενέργεια του πεδίου αποδίδεται στο εκάστοτε "υπόθεμα". Αυτό σημαίνει ότι γίνεται φανερή με την εισαγωγή ενός σώματος σε κάποιο σημείο του πεδίου. Αλλιώς, υπάρχει μεν, αλλά κανείς δεν είναι σε θέση να την αντιληφθεί.

Το πόσο μικρό ή μεγάλο ποσό ενέργειας θα αποδοθεί στο σώμα, από το πεδίο, εξαρτάται από το ίδιο το σώμα, αλλά και από την θέση του σώματος στο πεδίο. Συνήθως εξαρτάται από την απόσταση του σώματος από την πηγή του πεδίου (από αυτό που δημιουργεί το πεδίο). Για τον λόγο αυτό, η συγκεκριμένη μορφή του διατηρούμενου μεγέθους του πεδίου χαρακτηρίζεται ως **ενέργεια λόγω θέσης** ή πιο συχνά, **δυναμική ενέργεια**. (Με την έννοια ότι είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του σημείου και αποκτά υπόσταση με την εισαγωγή στο σημείο αυτό του υποθέματος).

Η δυναμική ενέργεια αποτελεί το αίτιο εμφάνισης της δύναμης. Η δύναμη, με την σειρά της, προκαλεί την μεταβολή της κινητικής κατάστασης του σώματος.

Γιατί όμως εμφανίζεται η δύναμη; Διότι :

- Η πλέον ευσταθής (σταθερή) κατάσταση ενός συστήματος και της φύσης γενικότερα, είναι αυτή της ελάχιστης τιμής της ενέργειας. Αυτό είναι ένα αξίωμα της Φυσικής, που όμως μπορεί να αποδειχθεί με καθαρά Μαθηματικό τρόπο.

- Κάθε φυσικό σύστημα προσπαθεί να πετύχει μια πιο ευσταθή κατάσταση από αυτή που βρίσκεται, έτσι ώστε η ενέργεια του να πλησιάσει περισσότερο την ελάχιστη τιμή της ενέργειας (την οποία κατά σύμβαση θεωρούμε συνήθως μηδέν)

Όταν, λοιπόν, ένα σύστημα έχει "θετική" ενέργεια, τότε έχει την τάση να αποβάλει ενέργεια, παράγοντας έργο, έτσι ώστε η ενέργειά του να πέσει προς το μηδέν. Αντίστοιχα αν το σύστημα έχει "αρνητική" ενέργεια προσπαθεί να καταναλώσει έργο για να αυξηθεί η ενέργεια του και να ανέβει προς το μηδέν.

Έτσι αν U_{A} η αρχική τιμή της ενέργειας, U_{T} η τελική τιμή της ενέργειας και W το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται:

$U_{\text{A}} > 0 \Rightarrow \Delta\text{U} = U_{\text{T}} - U_{\text{A}} < 0 \Rightarrow \text{W} > 0$ Παραγωγή έργου.
Έργο που φεύγει από το σύστημα και αποδίδεται στο περιβάλλον.

$U_{\text{A}} < 0 \Rightarrow \Delta\text{U} = U_{\text{T}} - U_{\text{A}} > 0 \Rightarrow \text{W} < 0$ Κατανάλωση έργου.
Έργο που φεύγει από το περιβάλλον και αποδίδεται στο σύστημα.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$$W = -\Delta U \tag{3.57}$$

Είναι, τελικά, αυτή καθαυτή η παραγωγή ή κατανάλωση έργου που συνοδεύεται από την εκδήλωση κάποιας δύναμης.

Σκεφτείτε την περίπτωση ενός σεισμού και τις δυνάμεις που εμφανίζονται κατά την εκδήλωση του. Το αίτιο του σεισμού είναι η συσσώρευση ενέργειας στα πετρώματα του εσωτερικού της Γης. Τα πετρώματα θέλουν να επανέλθουν σε μια πιο ευσταθή κατάσταση, μικρότερης ενέργειας και απελευθερώνουν την ενέργεια που περισσεύει. Αυτή η απελευθέρωση ενέργειας είναι που δημιουργεί της δυνάμεις που εμφανίζονται σε ένα σεισμό.

Το επόμενο, φυσικά, ερώτημα που προκύπτει είναι: «Τι είναι αυτό το έργο W, από ποια μαθηματική έκφραση δίνεται και πως συνδέεται με την δύναμη F ;»

Για να απαντήσουμε σ' αυτή την ερώτηση, θα ξεκινήσουμε λίγο ανάποδα. Έστω ένα σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$ από μια θέση $\vec{x}_A$ σε μια θέση $\vec{x}_B$. Ας σημειωθεί ότι ούτε η δύναμη είναι σταθερή κατά την διάρκεια της κίνησης, αλλά ούτε η κίνηση του (τροχιά) από το $\vec{x}_A$ στο $\vec{x}_B$ είναι ευθύγραμμη, αλλά είναι κατά μήκος μιας καμπύλης στον χώρο. Ξεκινώντας από τον, γνωστό πια, θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, έχουμε:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow m\frac{d\vec{x}}{d\vec{x}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow$$

$$m\frac{d\vec{x}}{dt}\frac{d\vec{\upsilon}}{d\vec{x}} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{d\vec{x}} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = \vec{F}\cdot d\vec{x}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης, έχουμε:

$$m\int_{\upsilon_A}^{\upsilon_T}\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = \int_{x_A}^{x_T}\vec{F}\cdot d\vec{x} \Rightarrow m\left[\frac{\upsilon^2}{2}\right]_{\upsilon_A}^{\upsilon_T} = \int_{x_A}^{x_T}\vec{F}\cdot d\vec{x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m{\upsilon_T}^2 - \frac{1}{2}m{\upsilon_A}^2 = \int_{x_A}^{x_T}\vec{F}\cdot d\vec{x} \tag{3.58}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση (3.57) είναι ένα **επικαμπύλιο** ολοκλήρωμα. Είναι δηλαδή ένα ολοκλήρωμα στο οποίο η ποσότητα $\vec{F}\cdot d\vec{x}$ (εσωτερικό γινόμενο) υπολογίζεται και αθροίζεται σε κάθε σημείο της τροχιάς (καμπύλης) την οποία ακολουθεί το σώμα για να πάει από την θέση $\vec{x}_A$ στην θέση $\vec{x}_T$.

Εάν ορίσουμε ως

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \tag{3.59}$$

την **κινητική ενέργεια** ενός σώματος, μάζας m, που κινείται με ταχύτητα μέτρου υ, τότε η εξίσωση (3.58) παριστάνει την μεταβολή της ενέργειας λόγω κίνησης του σώματος, από μια αρχική τιμή της $K_A = \frac{1}{2}m{\upsilon_A}^2$ σε μια τελική $K_T = \frac{1}{2}m{\upsilon_T}^2$, λόγω κάποιας ποσότητας η οποία είναι συνάρτηση της δύναμης.

Στην πραγματικότητα, η σχέση (3.58) δεν είναι τίποτα άλλο παρά το **Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας**. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι ίση με το **έργο** της δύναμης $\vec{F}$ κατά την μετακίνηση ενός σώματος μάζας m από την αρχική θέση $\vec{x}_A$ στην τελική θέση $\vec{x}_T$. Κατά συνέπεια:

$$W = \int_{x_A}^{x_T}\vec{F}\cdot d\vec{x} \tag{3.60}$$

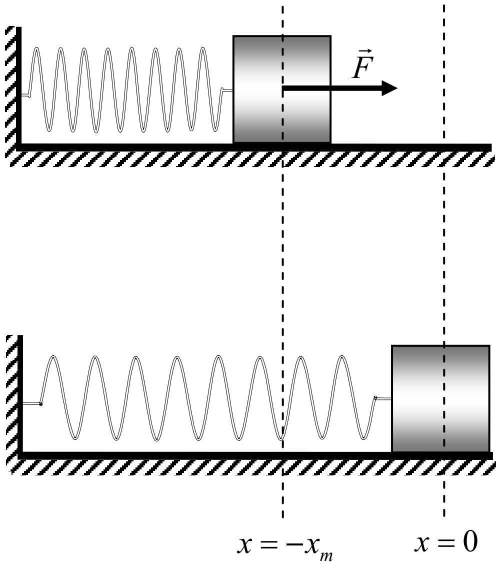
Το έργο μιας δύναμης είναι μονόμετρο μέγεθος και η μονάδα μέτρησης του στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) είναι το N·m = J (Joule). Καθώς $W = -\Delta U = \Delta K$, συνεπάγεται ότι και η μονάδα μέτρησης της ενέργειας είναι επίσης το Joule.

Από την σχέση (3.60) συμπεραίνουμε επίσης ότι, όταν η δύναμη είναι κάθετη στην μετατόπιση, τότε, επειδή το εσωτερικό γινόμενο δύο καθέτων διανυσμάτων είναι μηδέν, το έργο της δύναμης θα είναι μηδέν!

Παράδειγμα 3.18

Σώμα βρίσκεται πάνω σε λεία, οριζόντια επιφάνεια και συνδέεται με ελατήριο σταθεράς $k = 4\ \mathrm{N/m}$. Το ελατήριο συμπιέζεται από την θέση ισορροπίας του ($x = 0$) κατά ένα μήκος $x_m = 5\ \mathrm{cm}$. Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη του ελατηρίου καθώς το σώμα κινείται από την θέση $x = -x_m$ πίσω στην θέση ισορροπίας, $x = 0$.

Λύση



Σχήμα 3.20 *Έργο της δύναμης ενός ελατηρίου. (Παράδειγμα 3.18)*

Η δύναμη του ελατηρίου δίνεται από την σχέση (νόμος Hook)

$$F = -kx$$

όπου x η απόσταση από την θέση ισορροπίας.

Το έργο, λοιπόν, της δύναμης του ελατηρίου, καθώς το σώμα κινείται από την θέση $x = -x_m$ πίσω στην θέση ισορροπίας, $x = 0$, θα είναι (σύμφωνα με την σχέση 3.60)

$$W = \int_{-x_m}^{0} F dx = -\int_{-x_m}^{0} kx dx =$$

$$-k \int_{-x_m}^{0} x dx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-x_m}^{0} \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} k x_m^{\ 2} \tag{3.61}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην παραπάνω σχέση έχουμε

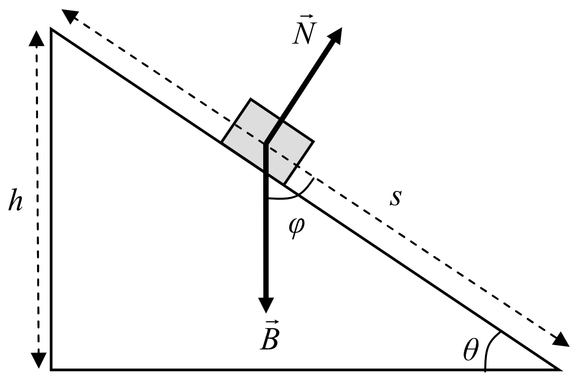
$$W = \frac{1}{2} 4 (0,05)^2 = 0,005\ \mathrm{J}$$

□

Παράδειγμα 3.19

Σώμα, μάζας $m = 2$ kg, βρίσκεται πάνω σε λεία επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\theta = 30°$ και ολισθαίνει, χωρίς τριβή. Να βρεθεί το έργο του βάρους του σώματος καθώς αυτό κατέρχεται από ύψος $h = 10\,\text{m}$ μέχρι ύψος $h = 0$.

Λύση



Σχήμα 3.21 *Έργο του βάρους σώματος που ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. (Παράδειγμα 3.19)*

Όπως βλέπουμε και στο σχήμα 3.21 το σώμα ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο καλύπτοντας μια απόσταση (από την κορυφή, μέχρι την βάση) ίση με s.
Το έργο του βάρους του σώματος είναι

$$W = \int_0^s \vec{B} \cdot d\vec{x}$$

Το βάρος δεν είναι παράλληλο με την κίνηση αλλά σχηματίζει γωνία. Έτσι το έργο του θα είναι ίσο με

$$W = \int_0^s B \cos\varphi \, d\vec{x} \Rightarrow$$

$$W = Bs\cos\varphi = mgs\cos\varphi$$

Αλλά

$$\varphi = 90° - \theta \Rightarrow \cos\varphi = \cos(90° - \theta) = \sin\theta = \frac{h}{s}$$

Οπότε το έργο θα είναι

$$W = mgs\frac{h}{s} \Rightarrow W = mgh \tag{3.62}$$

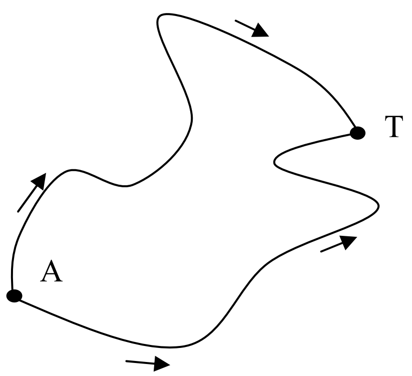
Παρατηρούμε ότι το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο από το μήκος της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την υψομετρική διαφορά του αρχικού με το τελικό σημείο.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση $m = 2\,\text{kg}$, $h = 10\,\text{m}$ και $g = 10\, {}^{m}\!/\!_{s^2}$ βρίσκουμε ότι το έργο είναι $W = 200$ J.

□

3.8.1 Διατηρητικές (Συντηρητικές) και μη διατηρητικές δυνάμεις.

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.18, το έργο που παράγει η δύναμη του βάρους του σώματος εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος (συγκεκριμένα την υψομετρική τους διαφορά) και όχι από τη διαδρομή που ακολούθησε το σώμα. Μια δύναμη που έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται **διατηρητική** ή **συντηρητική** δύναμη.



Σχήμα 3.22 *Το έργο μια διατηρητικής δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.*

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια δύναμη είναι διατηρητική όταν το έργο που παράγει η δύναμη αυτή κατά την μετακίνηση ενός σώματος από ένα σημείο Α σε ένα άλλο σημείο Τ, δεν εξαρτάται από την διαδρομή που ακολούθησε το σώμα ανάμεσα σε αυτά τα δύο σημεία.

Άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας του έργου από την διαδρομή είναι ότι όταν το σώμα κινηθεί σε μια κλειστή διαδρομή, επιστρέψει δηλαδή στο ίδιο σημείο με αυτό που ξεκίνησε, το έργο της διατηρητικής δύναμης είναι μηδέν.

Τέτοιες δυνάμεις (διατηρητικές) είναι, για παράδειγμα, το βάρος και η δύναμη της παγκόσμιας έλξης, η ηλεκτρομαγνητική δύναμη, η δύναμη του ελατηρίου κ.α.

Αντίστοιχα, μια δύναμη είναι μη διατηρητική όταν το έργο που παράγει η δύναμη αυτή κατά την μετακίνηση ενός σώματος από ένα σημείο Α σε ένα άλλο σημείο Τ, εξαρτάται από την διαδρομή που ακολούθησε το σώμα ανάμεσα σε αυτά τα δύο σημεία.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι η τριβή ολίσθησης. Η δύναμη της τριβής ολίσθησης είναι πάντα αντίθετη προς την κατεύθυνση της κίνησης (ταχύτητα). Έτσι το έργο της τριβής ολίσθησης, κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, δεν είναι μηδέν.

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι δυνάμεις που εξαρτώνται από την θέση του σώματος είναι διατηρητικές, ενώ δυνάμεις που εξαρτώνται από την ταχύτητα του σώματος, όπως η τριβή ολίσθησης και η αντίσταση του αέρα, είναι μη διατηρητικές.

3.8.2 Δυναμική Ενέργεια

Όπως είδαμε προηγουμένως, το έργο μιας διατηρητικής δύναμης είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που ακολουθεί το σώμα και εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες της αρχικής και τελικής θέσης του σώματος. Το έργο αυτό ισούται με την μείωση της δυναμικής ενέργειας

$$W = \int_{x_A}^{x_T} \vec{F} \cdot d\vec{x} = -\Delta U = U_A - U_T \tag{3.63}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την διαφορά της δυναμικής ενέργειας ανάμεσα σε δύο θέσεις. Έτσι η δυναμική ενέργεια σε μια θέση x μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$U(x) = -\int_{x_A}^{x} \vec{F} \cdot d\vec{x} + U_A \tag{3.64}$$

θεωρώντας το σημείο x_A ως σημείο αναφοράς.

Πολλές φορές, θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια στο σημείο αναφοράς είναι μηδέν. Η τιμή της δυναμικής ενέργειας U_A στο σημείο αναφοράς δεν έχει σημασία, αφού το μόνο που κάνει είναι να αυξομειώσει την U κατά μία σταθερά. Εκείνο που έχει φυσική σημασία είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας από μια θέση σε μια άλλη.

Έτσι, σαν σημείο αναφοράς μηδενικής δυναμικής ενέργειας στο πεδίο βαρύτητας της Γης θεωρούμε την επιφάνεια της Γης. Ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης έχει δυναμική ενέργεια ίση με:

$$U = mgh \tag{3.65}$$

3.8.3 Διατήρηση της Ενέργειας απομονωμένου συστήματος.

Με βάση τον ορισμό του έργου μια διατηρητικής δύναμης σε ένα απομονωμένο σύστημα έχουμε:

$$W = -\Delta U = U_A - U_T \tag{3.66}$$

ενώ από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας προκύπτει ότι

$$W = \Delta K = K_T - K_A \tag{3.67}$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (3.60) και (3.61) έχουμε

$$K_T + U_T = K_A + U_A \tag{3.68}$$

Δηλαδή, σε ένα απομονωμένο σύστημα η ποσότητα $K + U$ διατηρείται. Η ποσότητα αυτή

$$E = K + U \tag{3.69}$$

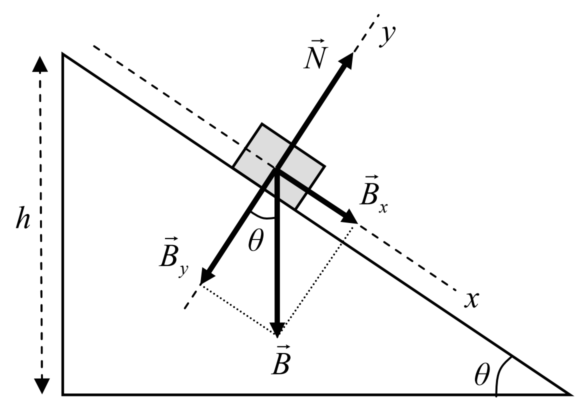
ονομάζεται **Ολική Μηχανική Ενέργεια** (ή πιο απλά ολική ενέργεια) του απομονωμένου συστήματος. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι «Η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται σταθερή».

Ας δούμε αν όντως ισχύει αυτή η διατήρηση της ενέργειας χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα την κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο που μελετήσαμε και στο Παράδειγμα 3.10.

Παράδειγμα 3.20

Σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβή και χωρίς αρχική ταχύτητα από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, μήκους s και ύψους h, που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστεί η αρχική (κορυφή κεκλιμένου επιπέδου) και η τελική (βάση επιπέδου) ολική μηχανική ενέργεια του σώματος. Η επιτάχυνση της βαρύτητας g θεωρείται γνωστή.

Λύση



Σχήμα 3.23 *Δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα καθώς ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. (Παράδειγμα 3.20)*

Αρχικά σχεδιάζουμε το σχήμα (Σχήμα 3.23) και βάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα. Οι δυνάμεις αυτές είναι το βάρος του σώματος $\vec{B}$ και η δύναμη αντίδρασης $\vec{N}$ του κεκλιμένου επιπέδου που είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο και εμποδίζει το σώμα να "βυθιστεί" εντός του κεκλιμένου επιπέδου.

Στην συνέχεια φέρνουμε δύο άξονες. Τον άξονα των x παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο και κατά συνέπεια παράλληλο με την κίνηση και τον άξονα y κάθετο στον x (άρα και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο και στην διεύθυνση της κίνησης).

Όσες δυνάμεις δεν είναι πάνω στους άξονες τις αναλύουμε σε συνιστώσες, με προβολή τους πάνω στους άξονες. Η μόνη δύναμη που δεν είναι πάνω στους άξονες είναι το βάρος $\vec{B}$ που το αναλύουμε σε δύο συνιστώσες $\vec{B}_x$ και $\vec{B}_y$ πάνω στους άξονες x και y αντίστοιχα. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η γωνία που σχηματίζει το βάρος $\vec{B}$ με τον άξονα y είναι ίση με την γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου γιατί είναι δύο οξείες γωνίες που έχουν μεταξύ τους τις πλευρές τους κάθετες. Άρα οι δύο συνιστώσες του βάρους θα έχουν μέτρο

$$B_x = B\sin\theta = m\,g\,\sin\theta \qquad \text{και} \qquad B_y = B\cos\theta = m\,g\,\cos\theta$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε άξονα ξεχωριστά.

Κατά τον άξονα y :

Το σώμα ΔΕΝ κινείται! Ούτε "απογειώνεται", ούτε "βουλιάζει" στο κεκλιμένο επίπεδο. Άρα:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = mg\,\cos\theta$$

Κατά τον άξονα x :

Το σώμα κινείται με επιτάχυνση. Άρα

$$\sum F_x = m\,a \Rightarrow B_x = m\,a \Rightarrow mg\,\sin\theta = m\,a \Rightarrow a = g\,\sin\theta$$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή. Άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Με γνωστή πια την επιτάχυνση μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον χρόνο που χρειάζεται να κατέλθει μέχρι τη βάση του κεκλιμένου επίπεδου:

$$s = \frac{1}{2}a\,t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

καθώς και την ταχύτητα που θα έχει όταν φτάσει στην βάση:

$$\upsilon = a\,t \Rightarrow \upsilon = a\sqrt{\frac{2s}{a}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2\,a\,s} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2\,s\,g\sin\theta}$$

Αλλά από το σχήμα βλέπουμε ότι $s\sin\theta = h$. Έτσι η ταχύτητα στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου θα είναι

$$\upsilon = \sqrt{2gh}$$

Ας δούμε τώρα την ολική μηχανική ενέργεια.

$$E = U + K = mgh + \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, σε ύψος h, απ' όπου το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει, η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon = 0$. Η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο αυτό είναι

$$E_{\mathrm{A}} = mgh$$

Στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου, σε ύψος $h = 0$, η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο αυτό είναι

$$E_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \Rightarrow E_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{2gh}\right)^2 \Rightarrow E_{\mathrm{T}} = mgh$$

Παρατηρούμε ότι $E_{\mathrm{A}} = E_{\mathrm{T}} = mgh$. Άρα η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται.

□

Στην περίπτωση που στο σώμα επιδρούν περισσότερες από μία διατηρητικές δυνάμεις, για κάθε μία από αυτές έχουμε και μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Έτσι ο νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στην περίπτωση περισσοτέρων, της μίας, δυνάμεων γράφεται:

$$E_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{A}} \Rightarrow K_{\mathrm{T}} + \sum U_{\mathrm{T}} = K_{\mathrm{A}} + \sum U_{\mathrm{A}} \tag{3.70}$$

όπου στο άθροισμα περιλαμβάνονται οι δυναμικές ενέργειες από όλες τις δυνάμεις.

Στην περίπτωση που υπάρχουν και μη διατηρητικές δυνάμεις, κάτι που ισχύει συνήθως στα φυσικά συστήματα, η ολική μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔK ισούται με το άθροισμα του έργου των διατηρητικών δυνάμεων W_{δ} συν το έργο των μη διατηρητικών δυνάμεων $W_{\mu\delta}$.

$$\Delta K = W_{\delta} + W_{\mu\delta} \tag{3.71}$$

Άλλα $W_{\delta} = -\Delta U$, οπότε

$$W_{\mu\delta} = \Delta K + \Delta U = \left(K_{\mathrm{T}} - K_{\mathrm{A}}\right) + \left(U_{\mathrm{T}} - U_{\mathrm{A}}\right) = E_{\mathrm{T}} - E_{\mathrm{A}} \tag{3.72}$$

Δηλαδή, το έργο των μη διατηρητικών δυνάμεων ισούται με την μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας.

Ας ξαναδούμε το παράδειγμα της ολίσθησης ενός σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο, αλλά τώρα να συμπεριλάβουμε και την δύναμη τριβής.

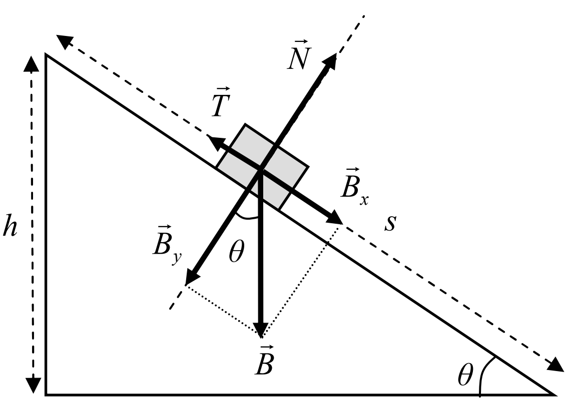
Παράδειγμα 3.21

Σώμα ολισθαίνει χωρίς αρχική ταχύτητα από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, μήκους s και ύψους h, που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_o, να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος που θα έχει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Η επιτάχυνση της βαρύτητας g θεωρείται γνωστή

Λύση

Όπως βλέπουμε και στο σχήμα 3.24 το σώμα ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο καλύπτοντας μια απόσταση (από την κορυφή, μέχρι την βάση) ίση με s.

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα είναι το βάρος του σώματος $\vec{B}$, η δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{T}$ και η δύναμη αντίδρασης $\vec{N}$ του κεκλιμένου επιπέδου που είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο και εμποδίζει το σώμα να "βυθιστεί" εντός του κεκλιμένου επιπέδου.



Σχήμα 3.24 *Έργο του βάρους σώματος που ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. (Παράδειγμα 3.21)*

Η δύναμη τριβής δίνεται από την σχέση

$$T = -\mu_o N$$

το αρνητικό πρόσημο είναι γιατί η τριβή αντιτίθεται στην κίνηση.

Επειδή το σώμα κινείται μόνο κατά μήκος του κεκλιμένου επίπεδου:

$$N = B_y \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

Το έργο της τριβής θα είναι

$$W_T = Ts = -\mu_o Ns = -\mu_o mgs\cos\theta$$

Η αρχική ολική μηχανική ενέργεια (στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, όπου το σώμα είναι ακίνητο, δηλαδή $\upsilon = 0$) είναι

$$E_{\mathrm{A}} = mgh$$

Στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου, σε ύψος $h = 0$, η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο αυτό είναι

$$E_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Το έργο της μη διατηρητικής δύναμης της τριβής ολίσθησης θα είναι:

$$W_T = E_{\mathrm{T}} - E_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - mgh$$

Άρα

$$-\mu_o mgs\cos\theta = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - mgh \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh - \mu_o mgs\cos\theta \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = 2g(h - \mu_o s\cos\theta) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2g(h - \mu_o s\cos\theta)}$$

και επειδή $\sin\theta = h/s \Rightarrow h = s\sin\theta$ καταλήγουμε

$$\upsilon = \sqrt{2gs(\sin\theta - \mu_o\cos\theta)}$$

Όπως παρατηρούμε καταλήξαμε στην ίδια σχέση με αυτή του Παραδείγματος 3.10, αλλά με πολύ λιγότερες πράξεις!

Ισοδύναμα, αν είχαμε αντικαταστήσει το $s = h/\sin\theta$ θα βρίσκαμε ότι η τελική ταχύτητα θα είναι

$$\upsilon = \sqrt{2gh\left(1 - \mu_o\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh(1 - \mu_o\cot\theta)}$$

Η σχέση αυτή, αν δεν είχαμε τριβή ($\mu_o = 0$) θα μας έδινε την γνωστή μας σχέση

$$\upsilon = \sqrt{2gh}$$

□

3.8.4 *Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων υπολογισμού έργου και ενέργειας*

Τόσο ο προσδιορισμός του έργου, όσο και της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας γίνεται μέσω του υπολογισμού του ολοκληρώματος:

$$\int_{x_A}^{x_T} \vec{F}\cdot d\vec{x}$$

Ο εν λόγω υπολογισμός εξαρτάται, φυσικά, από την συναρτησιακή μορφή της δύναμης $\vec{F}$ αλλά και από την τροχιά (καμπύλη) την οποία ακολουθεί το σώμα για να πάει από την θέση $\vec{x}_A$ στην θέση $\vec{x}_T$. Συγκεκριμένα, από την γωνία που σχηματίζει η δύναμη με την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της τροχιάς.

.

Αν η κίνηση γίνεται πάνω σε μία ευθεία και η δύναμη είναι παράλληλη με την ευθεία αυτή τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

α) Περίπτωση σταθερής δύναμης

Στην περίπτωση αυτή

$$W = \int_{x_A}^{x_T} F dx = F\int_{x_A}^{x_T} dx = F[x]_{x_A}^{x_T} = F(x_T - x_A)$$

ή πιο συνεπτυγμένα:

$$W = F\,\Delta x$$

β) Δύναμη ως συνάρτηση της θέσης

Στην περίπτωση αυτή η ολοκλήρωση γίνεται απευθείας

$$W = \int_{x_A}^{x_T} F(x)\,dx$$

Αυτό που συνήθως δεν είναι γνωστό είναι η τελική θέση x_T.

Ας δούμε ένα παράδειγμα με δύο σκέλη:

Παράδειγμα 3.22

Σώμα, μάζας $m = 1$ kg, κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F(x) = k\,x$ (όπου $k = 1\ \mathrm{N/m}$). Στη χρονική στιγμή $t = 0$ s το σώμα βρίσκεται στην θέση $x = 1$ m και έχει ταχύτητα $\upsilon = 1\ \mathrm{m/s}$. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης:

i. κατά την κίνηση του σώματος από την θέση $x = 1$ m, στην θέση $x = 4$ m
ii. από την χρονική στιγμή $t = 0$ s, μέχρι την χρονική στιγμή $t = \ln 2$ s.

Λύση

Το πρώτο ερώτημα επιλύεται απευθείας:

$$W = \int_{x_A}^{x_T} F(x)\,dx = \int_{x_A}^{x_T} kx\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_T} = \frac{k}{2}\left(x_T{}^2 - x_A{}^2\right)$$

και με αντικατάσταση των τιμών έχουμε

$$W == \frac{1}{2}\left(4^2 - 0^2\right) = 8\ \mathrm{J}$$

Το δεύτερο ερώτημα όμως έχει αρκετή δουλειά. Πρέπει να προσδιορίσουμε την τελική θέση που θα έχει το σώμα όταν $t = \ln 2$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει πρώτα να βρούμε την συνάρτηση $x = x(t)$ και κατόπιν να βάλουμε $t = \ln 2$ για να βρούμε το x_T.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε

$$F(x)=k\,x \Rightarrow m\,a=k\,x \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt}=k\,x \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt}=\frac{k}{m}x \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}\frac{dx}{dx}=\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{dx}{dt}\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{k}{m}x \Rightarrow \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{k}{m}x \Rightarrow \upsilon\,d\upsilon=\frac{k}{m}x\,dx \Rightarrow$$

$$\int \upsilon\,d\upsilon=\int\frac{k}{m}x\,dx \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2}=\frac{k}{m}\frac{x^2}{2}+c_1 \Rightarrow \upsilon^2=\frac{k}{m}x^2+c_1$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι όταν $x=1$ m, $\upsilon=1\ \mathrm{m/s}$. Γνωρίζοντας επίσης ότι $m=1$ kg και $k=1\ \mathrm{N/m}$ καταλήγουμε ότι $c_1=0$. Άρα η εξίσωση της ταχύτητας είναι:

$$\upsilon=x$$

Στην συνέχεια, από την ταχύτητα, υπολογίζουμε την συνάρτηση της θέσης:

$$\upsilon=x \Rightarrow \frac{dx}{dt}=x \Rightarrow \frac{dx}{x}=dt \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int dt \Rightarrow \ln x=t+c_2 \Rightarrow$$

$$x=e^{t+c_2} \Rightarrow x=e^{c_2}e^{t} \Rightarrow x=C_2e^{t}$$

όπου στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε την σταθερή e^{c_2} με C_2. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι όταν $t=0$, $x=1$. Άρα $C_2=1$ και η εξίσωση της θέσης γράφεται

$$x=e^{t}$$

Έτσι με την βοήθεια της παραπάνω σχέσης βρίσκουμε ότι η τελική θέση όταν $t=\ln 2$ είναι $x=e^{\ln 2}=2$ m.

Άρα το έργο της δύναμης είναι

$$W=\int_{x_A}^{x_T}F(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(2^2-0^2\right)=2\ \ \mathrm{J}$$

□

γ) Δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου

Στην περίπτωση αυτή η ολοκλήρωση δεν μπορεί να γίνει απευθείας. Η δύναμη είναι συνάρτηση του t και εμείς θέλουμε να ολοκληρώσουμε ως προς x

$$W = \int_{x_A}^{x_T} F(t)\,dx$$

Θα πρέπει λοιπόν, με κάποιο τρόπο, να αλλάξουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με dt.

Έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$W = \int_{x_A}^{x_T} F(t)\,dx \Rightarrow W = \int_{x_A}^{x_T} F(t)\frac{dt}{dt}\,dx \Rightarrow W = \int_{x_A}^{x_T} F(t)\frac{dx}{dt}\,dt \Rightarrow$$

$$W = \int_{t_A}^{t_T} F(t)\,\upsilon(t)\;dt$$

Έτσι, αυτό που χρειάζεται, στην περίπτωση αυτή, είναι να υπολογίσουμε την ταχύτητα και στην συνέχεια απλά να ολοκληρώσουμε ως προς τον χρόνο. Ένα σημείο που πρέπει ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να προσέξουμε όταν αλλάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι ότι πρέπει να αλλάξουμε και τα όρια ολοκλήρωσης. Τα όρια αυτά πρέπει να είναι οι τιμές που θα έχει η νέα μεταβλητή όταν η παλαιά μεταβλητή παίρνει τις τιμές των δικών της ορίων. Έτσι βλέπουμε πια θα είναι η τιμή του t όταν $x = x_A$, και βάζουμε αυτή την τιμή του t στο κάτω όριο. Αντίστοιχα κάνουμε και για το επάνω όριο.

Παράδειγμα 3.23

Σώμα, μάζας $m = 1$ kg, κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F(x) = 2\,t$ (όλες οι μονάδες είναι στο SI). Στη χρονική στιγμή $t = 0$ s το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης την χρονική στιγμή $t = 4$ s.

<u>Λύση</u>

Από το ορισμό του έργου έχουμε

$$W = \int_{x_A}^{x_T} F(t)\,dx \Rightarrow W = \int_{x_A}^{x_T} F(t)\frac{dt}{dt}\,dx \Rightarrow W = \int_{x_A}^{x_T} F(t)\frac{dx}{dt}\,dt \Rightarrow$$

$$W = \int_{t_A}^{t_T} F(t)\, \upsilon(t)\; dt$$

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t)$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε (αντικαθιστώντας και την τιμή της μάζας του σώματος)

$$F(x) = 2t \Rightarrow m\,a = 2t \Rightarrow a = 2t \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = 2t \Rightarrow d\upsilon = 2t\,dt \Rightarrow$$

$$\int d\upsilon = \int 2t\,dt \Rightarrow \upsilon = t^2 + c$$

Από τις αρχικές συνθήκες ξέρουμε ότι όταν $t = 0$, $\upsilon = 0$. Άρα από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι $c = 0$ και η εξίσωση της ταχύτητας γράφεται:

$$\upsilon = t^2$$

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση της δύναμης και ταχύτητας στο ολοκλήρωμα του έργου έχουμε :

$$W = \int_{t_A}^{t_T} F(t)\, \upsilon(t)\; dt = \int_0^4 2t\, t^2\; dt = 2\int_0^4 t^3\; dt = 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^4 = 2\left(\frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = 128 \;\; \mathrm{J}$$

□

3.9 Ισχύς

Στην πράξη, πολλές φορές, μας ενδιαφέρει όχι μόνο το έργο που παράγεται, αλλά και ο ρυθμός παραγωγής του έργου, ο ρυθμός, δηλαδή, μεταφοράς της ενέργειας. Ο ρυθμός αυτός ονομάζεται **ισχύς** και είναι

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{3.73}$$

Η ισχύς μετριέται στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) σε J/s. Την μονάδα αυτή την ονομάζουμε Watt και την συμβολίζουμε με W ($1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}$).

Επειδή για μια στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{x}$ το έργο μιας δύναμης $\vec{F}$ είναι $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$, η ισχύς λοιπόν θα είναι ίση με:

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \tag{3.74}$$

Πολλές φορές η ενέργεια μας δίνεται όχι σε Joule αλλά σε άλλες μονάδες. Έτσι για παράδειγμα η ηλεκτρική ενέργεια, που καταναλώσαμε στο σπίτι μας, μας δίνεται στο λογαριασμό της ΔΕΗ ως κιλοβατώρες (ΩΧΒ ή πιο σωστά kWh) . Η κατανάλωση ενέργειας 1 kWh σημαίνει ότι καταναλώσαμε ισχύ 1 kW = 1000 W επί μία ώρα. Η ενέργεια αυτή είναι:

$$1\ \mathrm{kWh} = 1000\ \mathrm{W} \cdot 1\ \mathrm{h} = 1000\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdot 3600\ \mathrm{s} = 3{,}600{,}000\ \mathrm{J}$$