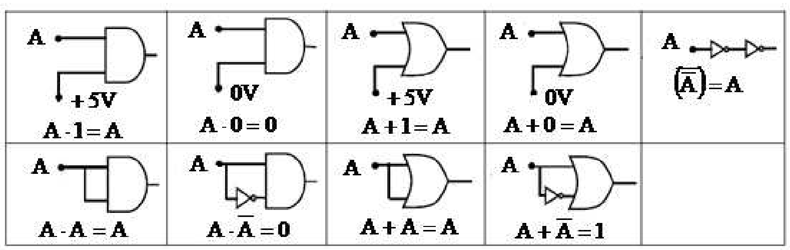
ΨΗΦΙΑΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 3
ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ και ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Σκοπός: Η κατανόηση της σχέσης μιας λογικής συνάρτησης με το αντίστοιχο κύκλωμα. Η απλοποίηση λογικών συναρτήσεων με τους κανόνες της άλγεβρας Boole και με χρήση των πινάκων Karnaugh.

3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

3.1.1 Άλγεβρα Boole

Η άλγεβρα Boole είναι στην ουσία τα μαθηματικά των ψηφιακών συστημάτων. Ως εκ τούτου η βασική γνώση της άλγεβρας είναι απαραίτητη για τη μελέτη και ανάλυση των λογικών κυκλωμάτων. Στα προηγούμενα εργαστήρια/πειράματα εισήχθησαν οι πρώτες εκφράσεις της άλγεβρας Boole, που σχετίζονται με τις λογικές πύλες NOT, AND, NAND, OR, NOR και XOR. Σ’ αυτό το πείραμα θα εξεταστεί η σχέση μεταξύ μιας έκφρασης/συνάρτησης Boole και του αντίστοιχου λογικού διαγράμματος/κυκλώματος. Όσο πιο σύνθετη είναι η αλγεβρική έκφραση, τόσο πιο σύνθετο είναι το κύκλωμα που υλοποιείται μέσω αυτής. Ωστόσο, πολλά σύνθετα κυκλώματα μπορούν να απλοποιηθούν, με εφαρμογή των κανόνων της άλγεβρας Boole, καθώς και με την ονομαζόμενη μέθοδο Karnaugh. Στο σχ. 3.1 συνοψίζονται οι βασικές αναγωγικές σχέσεις της άλγεβρας Boole.



Σχήμα 3.1 **Οι βασικές αναγωγικές σχέσεις της άλγεβρας Boole.**

Με βάση τις σχέσεις που εμφανίζονται στο σχ. 3.1 μπορούν να απλοποιηθούν σύνθετες αλγεβρικές/λογικές εκφράσεις. Στη διαδικασία απλοποίησης η κάθε μεταβλητή και το συμπλήρωμά της θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους και οι λογικές εκφράσεις αντιμετωπίζονται ως τυπικές αλγεβρικές σχέσεις, με τις συνήθεις προτεραιότητες των αλγεβρικών πράξεων.

3.1.2 Θεώρημα DeMorgan

Συχνά, η αναπαράσταση ενός λογικού κυκλώματος είναι σε μορφή που δεν είναι η επιθυμητή. Για παράδειγμα, η συνάρτηση Boole εκφράζεται σε όρους OR/NOR, ενώ απαιτείται η χρήση πυλών AND/NAND, ή συνδυάζονται πύλες OR/NOR και AND/NAND, ενώ απαιτείται η χρήση μιας μόνο λογικής (ενός τύπου πυλών).

Για την αντιμετώπιση τέτοιων ζητημάτων είναι χρήσιμο το θεώρημα που διατύπωσε ο Augustus DeMorgan και το οποίο επιτρέπει τη μετατροπή της λογικής OR/NOR σε AND/NAND και AND/NAND σε OR/NOR. Το θεώρημα DeMorgan εκφράζεται απ’ τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{3.1}$$

$$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B} \tag{3.2}$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος DeMorgan συνοψίζεται στα εξής βήματα:

1. Αντικατάσταση πύλης AND με OR και OR με AND
2. Αντιστροφή των μεταβλητών (χρήση των συμπληρωμάτων τους)
3. Αντιστροφή του τελικού αποτελέσματος
4. Εφόσον είναι δυνατό: απλοποίηση με διπλή αντιστροφή

Οι εξισώσεις (3.1) και (3.2) ισχύουν ανεξάρτητα απ’ το πλήθος των μεταβλητών, ενώ εφαρμόζονται σε ολόκληρη ή σε ένα μόνο τμήμα μιας λογικής συνάρτησης.

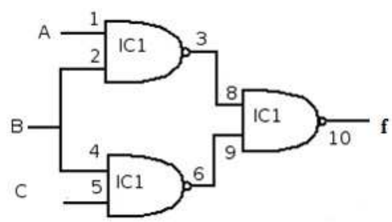
Σκεφτείτε ως παράδειγμα τη συνάρτηση:

$$f(A,B,C) = AB + BC \tag{3.3}$$

Το κύκλωμα που αντιστοιχεί στη συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί με δύο πύλες AND και μία OR. Με εφαρμογή των εξ. (3.1) και (3.2) διαπιστώνουμε ότι αρκούν τρεις πύλες NAND, δηλαδή ένα ολοκληρωμένο τύπου 7400:

$$f(A,B,C) = AB + BC = \overline{\left(\overline{AB + BC}\right)} = \overline{\overline{AB}\cdot\overline{BC}} \tag{3.4}$$

Η υλοποίηση της εξ. (3.4) φαίνεται στο σχήμα 3.2



Σχήμα 3.2 **Υλοποίηση του κυκλώματος της εξ. (3.4), με πύλες NAND (ολοκληρωμένο IC1: 7400).**

3.1.3 Πίνακες Karnaugh

Η χρήση των πινάκων Karnaugh αποτελεί ένα άλλο τρόπο απλοποίησης λογικών εκφράσεων. Βασίζεται στην αναπαράσταση του πίνακα αλήθειας ενός κυκλώματος σε μορφή που διευκολύνει την ομαδοποίηση όρων σε μορφή γινομένων (πύλες AND) και, στη συνέχεια, στη δημιουργία αθροισμάτων αυτών των όρων (πύλες OR). Με χρήση κι εδώ των κανόνων De Morgan, το τελικό κύκλωμα μπορεί να υλοποιείται μόνο με πύλες NAND ή NOR. Συνήθως, η μέθοδος χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις λογικών εκφράσεων με τέσσερις το πολύ μεταβλητές εισόδου, αφού για περισσότερες μεταβλητές είναι αρκετά δύσκολη η κατανόηση της λειτουργίας της. Συγκριτικά με τη χρήση της άλγεβρας Boole, η μέθοδος Karnaugh οδηγεί ευκολότερα σε απλοποίηση κι ελαχιστοποίηση συναρτήσεων.

3.1.3.1 Περιγραφή της μεθόδου

Οι πίνακες που ακολουθούν αντιστοιχούν στις περιπτώσεις συναρτήσεων 4, 3 και 2 μεταβλητών εισόδου

	$\overline{A}\overline{B}$ 00	$\overline{A}B$ 01	AB 11	$A\overline{B}$ 10
$\overline{C}\overline{D}$ 00				
$\overline{C}D$ 01				
CD 11				
$C\overline{D}$ 10				

	$\overline{A}\overline{B}$ 00	$\overline{A}B$ 01	AB 11	$A\overline{B}$ 10
$\overline{C}$ 0				
C 1				

	$\overline{A}$ 0	A 1
$\overline{B}$ 0		
B 1		

Κάθε κελί αντιστοιχεί σε μία γραμμή του πίνακα αλήθειας, δηλαδή σε μία κατάσταση της λογικής έκφρασης.

<u>**ΠΡΟΣΟΧΗ**</u>: ***Η σειρά τοποθέτησης των καταστάσεων στον πίνακα Karnaugh προκύπτει απ' την απαίτηση τα διαδοχικά κελιά να αντιστοιχούν σε <u>μεταβολή της τιμής μίας μόνο μεταβλητής</u>.***

Τα περιεχόμενα των κελιών ομαδοποιούνται συνεπώς σε ορθογώνια πλαίσια δυάδων τετράδων, οκτάδων, ώστε να προκύψει ο ελάχιστος αριθμός ομάδων που θα χρησιμοποιηθούν στην τελική έκφραση. Να σημειωθεί ότι τα περιεχόμενα των κελιών θα είναι λογικές τιμές “1” ή “0”. Ανάλογα με τον τρόπο που πρέπει να υλοποιηθεί το κύκλωμα επιλέγονται ομάδες “1” (υλοποίηση με πύλες NAND) ή “0” (υλοποίηση με πύλες NOR). Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε περιπτώσεις υλοποίησης με πύλες NAND.

Θα εξεταστεί ως παράδειγμα η συνάρτηση:

$$F(A,B,C) = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} \quad (3.4)$$

Πίνακας αλήθειας της εξ. 3.4

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Πίνακας Karnaugh για την εξ. 3.4

	$\overline{A}\overline{B}$ 00	$\overline{A}B$ 01	AB 11	$A\overline{B}$ 10
$\overline{C}$ 0	0	1	1	0
C 1	0	1	1	0

Η εξ. 3.4 υλοποιείται με χρήση τεσσάρων πυλών AND τριών εισόδων η καθεμιά, μιας πύλης OR τεσσάρων εισόδων και πυλών NOT.

Απλοποίηση της εξ. 3.4

i. ***<u>Άλγεβρα Boole</u>***

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} = AB(C+\overline{C}) + \overline{A}B(C+\overline{C}) = \\ &= AB + \overline{A}B = (A+\overline{A})B = B \end{aligned} \quad (3.5\alpha)$$

ii. ***<u>Μέθοδος Karnaugh</u>***

Μπορούν να ομαδοποιηθούν τα τέσσερα κελιά που σημειώνονται και τα οποία περιέχουν “1”. Η τελική έκφραση θα περιέχει μόνον έναν όρο (αφού μία ομάδα δημιουργείται). Οι μεταβλητές που θα εμφανίζονται είναι αυτές που διατηρούν σταθερή τιμή σε όλες τις θέσεις (κελιά) της ομάδας. Μόνον η μεταβλητή B διατηρείται στην ίδια τιμή (“1”) και έτσι η τελική μορφή της απλοποιημένης εξίσωσης είναι:

$$F(A,B,C) = B \quad (3.5\beta)$$

Σημείωση: Οι μεταβλητές που διατηρούνται στην τιμή “1” εμφανίζονται στην κανονική τους μορφή, ενώ αυτές που διατηρούνται στην τιμή “0” εμφανίζονται στη συμπληρωματική μορφή.

Το κύκλωμα που θα υλοποιηθεί θα είναι αυτό που αντιστοιχεί στην εξ. (3.5α), ή στην (3.5β). Είναι εμφανής η διαφορά με την αρχική εξ. 3.4.

Στη συνέχεια δίνεται ο πίνακας αλήθειας μιας συνάρτησης τεσσάρων μεταβλητών A,B,C,D:

A	B	C	D	G
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**

Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτόν είναι:

$$G(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + AC + AB\overline{C}D \qquad (3.6)$$

Ο πίνακας Karnaugh με τις ομαδοποιήσεις που αντιστοιχούν στην εξ. 3.6 φαίνεται στη συνέχεια:

Πίνακας Karnaugh για την εξ. 3.6

	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\,\overline{D}$	1	0	0	0
$\overline{C}D$	1	0	1	0
CD	1	0	1	1
$C\overline{D}$	1	0	1	1

Ωστόσο, η συγκεκριμένη έκφραση δεν είναι η απλούστερη δυνατή. Σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται επικάλυψη κάποιων όρων ώστε να σχηματισθούν οι πολυπληθέστερες ομάδες και άρα η σωστότερη απλοποίηση της λογικής συνάρτησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αποδοτικότερη ομαδοποίηση επιτυγχάνεται όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας Karnaugh για την εξ. 3.6

	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\,\overline{D}$	1	0	0	0
$\overline{C}D$	1	0	1	0
CD	1	0	1	1
$C\overline{D}$	1	0	1	1

Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στη νέα ομαδοποίηση είναι:

$$G(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + AC + ABD \qquad (3.7)$$

Η οποία δεν περιέχει διαφορετικό αριθμό πυλών, απλά περιέχει μια μεταβλητή λιγότερη στον έναν απ' τους όρους της.

Σε κάποιες περιπτώσεις οι ομάδες που σχηματίζονται δεν αντιστοιχούν σε προφανή ορθογώνια πλαίσια. Τέτοια περίπτωση φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας Karnaugh για την εξ. 3.8

	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\,\overline{D}$	0	0	0	0
$\overline{C}D$	1	1	0	1
CD	1	1	0	1
$C\overline{D}$	1	0	0	0

Η συνάρτηση που προκύπτει είναι η εξής:

$$H(A,B,C,D) = \overline{A}D + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}C \qquad (3.8)$$

Η εξ. 3.8 υλοποιείται με πύλες AND, OR και NOT. Αν επιβάλλεται η υλοποίηση της μόνον με πύλες NAND, η διαδικασία που θα πρέπει να ακολουθηθεί περιγράφεται στη συνέχεια:

$$H = \overline{\overline{\left(\overline{A}D + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}C\right)}} \qquad \textit{διπλή αντιστροφή της έκφρασης}$$

$$= \overline{\overline{\overline{A}D}\cdot\overline{\overline{B}D}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{B}C}} \qquad \textit{εφαρμογή της εξ. 3.1}$$

Η τελευταία έκφραση υλοποιείται με τέσσερις πύλες NAND (δύο πύλες με 2 εισόδους και δύο με 3 εισόδους).

3.1.3.2 Αδιάφορες περιπτώσεις

Κατά τη σχεδίαση ενός πραγματικού κυκλώματος, κάποιες καταστάσεις ενδέχεται να μην «εμφανίζονται». Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε έναν μετρητή που λειτουργεί καταγράφοντας συνεχώς τις τιμές από 0 μέχρι 5 επαναλαμβάνοντας τον κύκλο. Για την απεικόνιση των αριθμών σε δυαδική μορφή απαιτούνται 3 bit. Προφανώς το συγκεκριμένο κύκλωμα δεν θα φτάσει ποτέ στις τιμές 011 (6) και 111 (7). Γενικά, οι καταστάσεις που δεν χρησιμοποιούνται από ένα κύκλωμα χαρακτηρίζονται αδιάφορες και μπορούν να συμπεριλαμβάνονται στις ομαδοποιήσεις, ώστε να διευκολύνεται η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης που θα υλοποιηθεί, άρα και η απλοποίηση του κυκλώματος.

Παράδειγμα:

Πίνακας Karnaugh για την εξ. 3.9

	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\,\overline{D}$	1	1	1	1
$\overline{C}D$	0	1	x	0
CD	0	x	x	0
$C\overline{D}$	0	1	1	0

Η αποδοτικότερη ομαδοποίηση είναι όπως σημειώνεται στον διπλανό πίνακα και οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

$$g(A,B,C,D) = \overline{C}\,\overline{D} + B \tag{3.9}$$

Ελέγξτε την αντίστοιχη έκφραση, όταν δεν συμπεριλαμβάνονται οι αδιάφορες καταστάσεις και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

3.2 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟ ΜΕΡΟΣ

3.2.1 Θεώρημα DeMorgan

1. Να υλοποιήσετε στο ράστερ το κύκλωμα που αντιστοιχεί στην εξίσωση:

$$F = \overline{A} + B \tag{3.10}$$

Χρησιμοποιήστε πύλες NOT (7404) και OR (7432).

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αληθείας, παρακολουθώντας την ένδειξη του LED εξόδου και μετρώντας την τάση της εξόδου με το βολτόμετρο:

A	***B***	***F***	**Τάση V**
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Να σχεδιάσετε το υλοποιούμενο κύκλωμα (χρησιμοποιήστε τα κυκλωματικά σύμβολα των πυλών)

2. Η εξίσωση:

$$G = AC + BC \tag{3.11}$$

αντιστοιχεί σε κύκλωμα που υλοποιείται με δύο πύλες AND και μία πύλη OR. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα DeMorgan «απλοποιήστε» την (3.11) ώστε να οδηγεί σε κύκλωμα που περιλαμβάνει μόνο πύλες NAND.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………….

Υλοποιείστε το κύκλωμα με πύλες NAND (IC-7400) και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

A	***B***	***C***	***G***
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

3.2.2 Πίνακες Karnaugh

3. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας αλήθειας:

A	***B***	***C***	***h***	**Τάση V**
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

α) Να εξαχθεί η λογική συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πίνακα.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

β) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση με χρήση του πίνακα Karnaugh

	00	01	11	10
0				
1				

…………………………………………………………………………………………

γ) Να υλοποιηθεί το αντίστοιχο κύκλωμα **<u>μόνο</u>** με πύλες NAND (IC-7400). Αυτό σημαίνει πως όλες οι πύλες που θα χρησιμοποιηθούν θα πρέπει να «κατασκευαστούν» με πύλες NAND. Να επαληθευθεί η λειτουργία του κυκλώματος με συμπλήρωση της τελευταίας στήλης του πίνακα αλήθειας, σύμφωνα με τις ενδείξεις του βολτομέτρου.

Στον χώρο αυτό να σχεδιάσετε το κύκλωμα με πύλες NAND (7400). Να σημειώσετε τους αριθμούς των ακροδεκτών του ολοκληρωμένου στις αντίστοιχες εισόδους και εξόδους του σχήματός σας.

4. Σε κάθε μία απ’ τις παρακάτω περιπτώσεις να γραφεί η απλοποιημένη λογική συνάρτηση και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο κύκλωμα.

α)

C \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
0	0	0	1	1
1	1	x	x	1

Απλοποιημένη συνάρτηση:

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

Λογικό κύκλωμα:

β)

C \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
0	x	0	1	1
1	1	0	0	x

Απλοποιημένη συνάρτηση:

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

Λογικό κύκλωμα:

Να υλοποιηθεί στο raster το κύκλωμα 4α και να σχολιαστεί το νόημα των αδιάφορων καταστάσεων.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………