ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής, Υπολογιστών και Τηλεπικοινωνιών – Σέρρες

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Οκτώβριος 2019

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Όγδοη Σειρά Διαφανειών

1. Αριθμητική Ολοκλήρωση
2. Αριθμητική Ολοκλήρωση με παρεμβολή
   - Κανόνας Ορθογωνίου
   - Κανόνας Ορθογωνίου - Σφάλμα
   - Κανόνας Ορθογωνίου - Παραδείγματα
   - Κανόνας Τραπεζίου
   - Κανόνας Τραπεζίου - Σφάλμα
   - Κανόνας Τραπεζίου - Παραδείγματα
   - Κανόνας Simpson
   - Κανόνας Simpson - Σφάλμα
   - Κανόνας Simpson - Παραδείγματα
3. Ειδικές περιπτώσεις Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Αριθμητική Ολοκλήρωση

- Ένα από τα βασικά προβλήματα στα μαθηματικά είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης.
- Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[a, b]$.
- Ο αναλυτικός υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος απαιτεί την ύπαρξη της Παράγουσας ή Αρχικής συνάρτησης F η οποία ικανοποιεί τη σχέση $F'(x) = f(x)$ έτσι ώστε

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Για τις περισσότερες συναρτήσεις δεν υπάρχει η παράγουσα ή έχει δύσχρηστο τύπο.

Αριθμητική Ολοκλήρωση με παρεμβολή

Η Αριθμητική Ολοκλήρωση με παρεμβολή υλοποιείται με τις παρακάτω μεθόδους.

- Κανόνας Ορθογωνίου (ανοιχτός τύπος)
  Παρεμβολή με σταθερό πολυώνυμο (Μηδενικού βαθμού)
- Κανόνας Τραπεζίου (κλειστός τύπος)
  Παρεμβολή με γραμμικό πολυώνυμο (Πρώτου βαθμού)
- Κανόνας Simpson (κλειστός τύπος)
  Παρεμβολή με τετραγωνικό πολυώνυμο (Δευτέρου βαθμού)

Κανόνας Ορθογωνίου

- Για να υπολογίσουμε το

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

χρησιμοποιούμε το κεντρικό σημείο $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ από το οποίο φέρουμε ένα παράλληλο τμήμα στον $x'x$ από το a μέχρι το b δηλαδή, εφαρμόζουμε παρεμβολή με σταθερό πολυώνυμο. Το σχήμα που δημιουργείται είναι ένα ορθογώνιο.

- Θέτουμε

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \quad \text{με} \quad h = b - a$$

και αντίστοιχα

$$f_0 = f(x_0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Κανόνας Ορθογωνίου

- Το σταθερό πολυώνυμο με τις προς τα εμπρός διαφορές θα είναι

$$p(x) = f_0$$

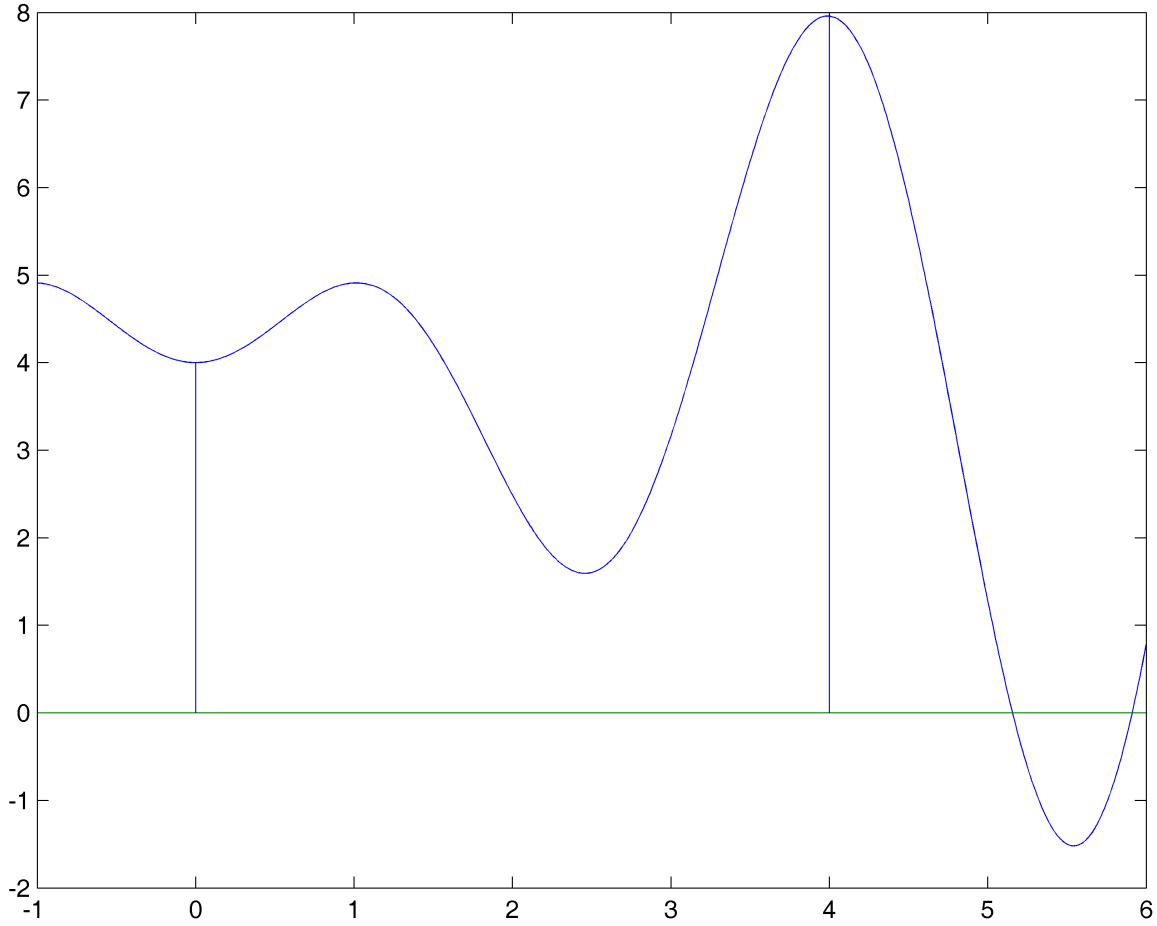
άρα

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p(x)dx = h \cdot f_0$$

επομένως ο απλός τύπος του Ορθογωνίου δίνεται από

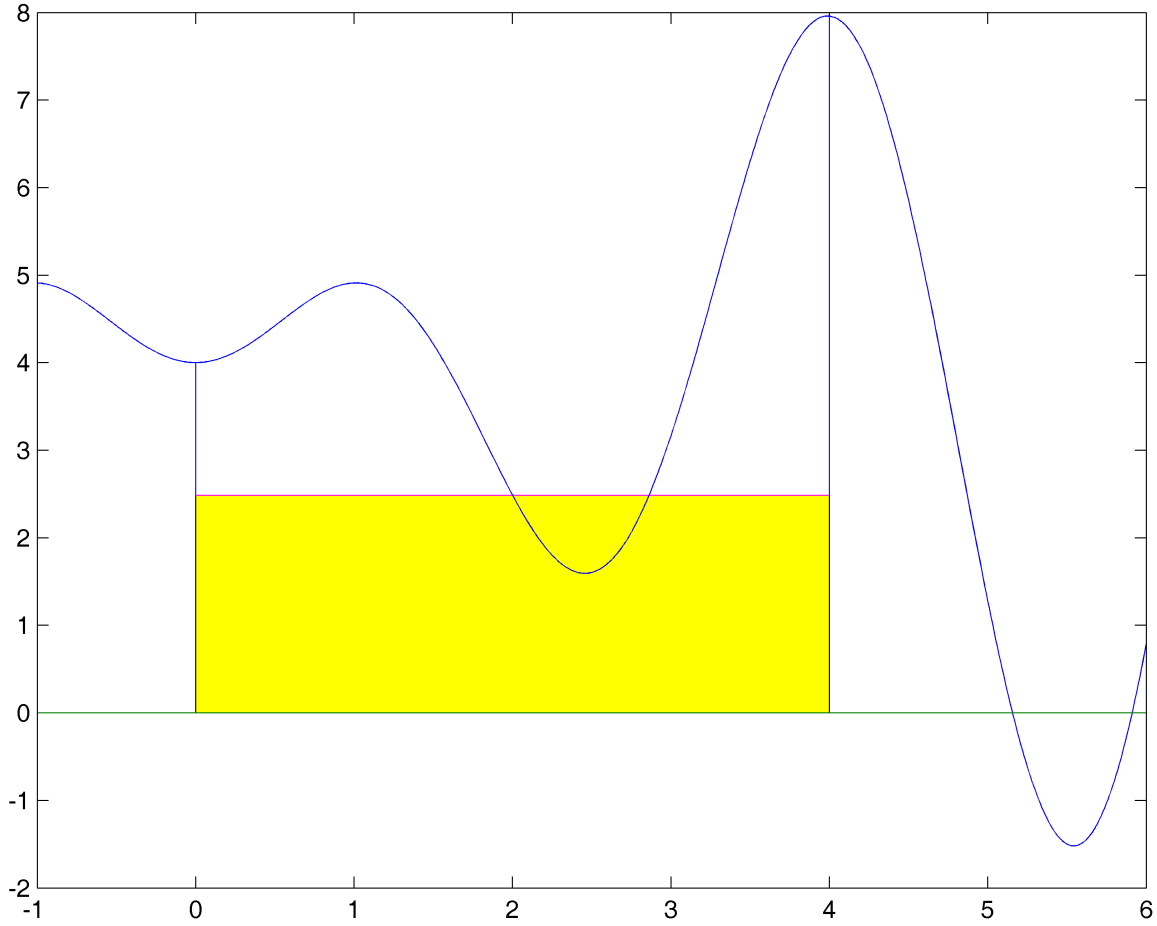
$$I = h \cdot f_0$$

Κανόνας Ορθογωνίου



Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Ορθογωνίου



Σχήμα: Υπολογισμός του $\int_0^4 f(x)dx$ - Απλός Κανόνας Ορθογωνίου

Κανόνας Ορθογωνίου

- Είναι προφανές ότι, αν διαμερίσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε μικρότερα διαστήματα θα έχουμε καλύτερη προσέγγιση της καμπύλης της συνάρτησης f.
- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, δηλαδή θα έχουμε n ισαπέχοντα κεντρικά σημεία με απόσταση
$$h = \frac{b-a}{n}$$
- Τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ δίνονται από τον τύπο
$$x_i = x_0 + i \cdot h \quad \text{με} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{και} \quad x_0 = a + \frac{h}{2}$$
- Αντιστοίχως,
$$f_i = f(x_i) \quad \text{με} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Κανόνας Ορθογωνίου

- Επομένως, η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

προσεγγίζεται από τον Σύνθετο Κανόνα του Ορθογωνίου σύμφωνα με τον τύπο

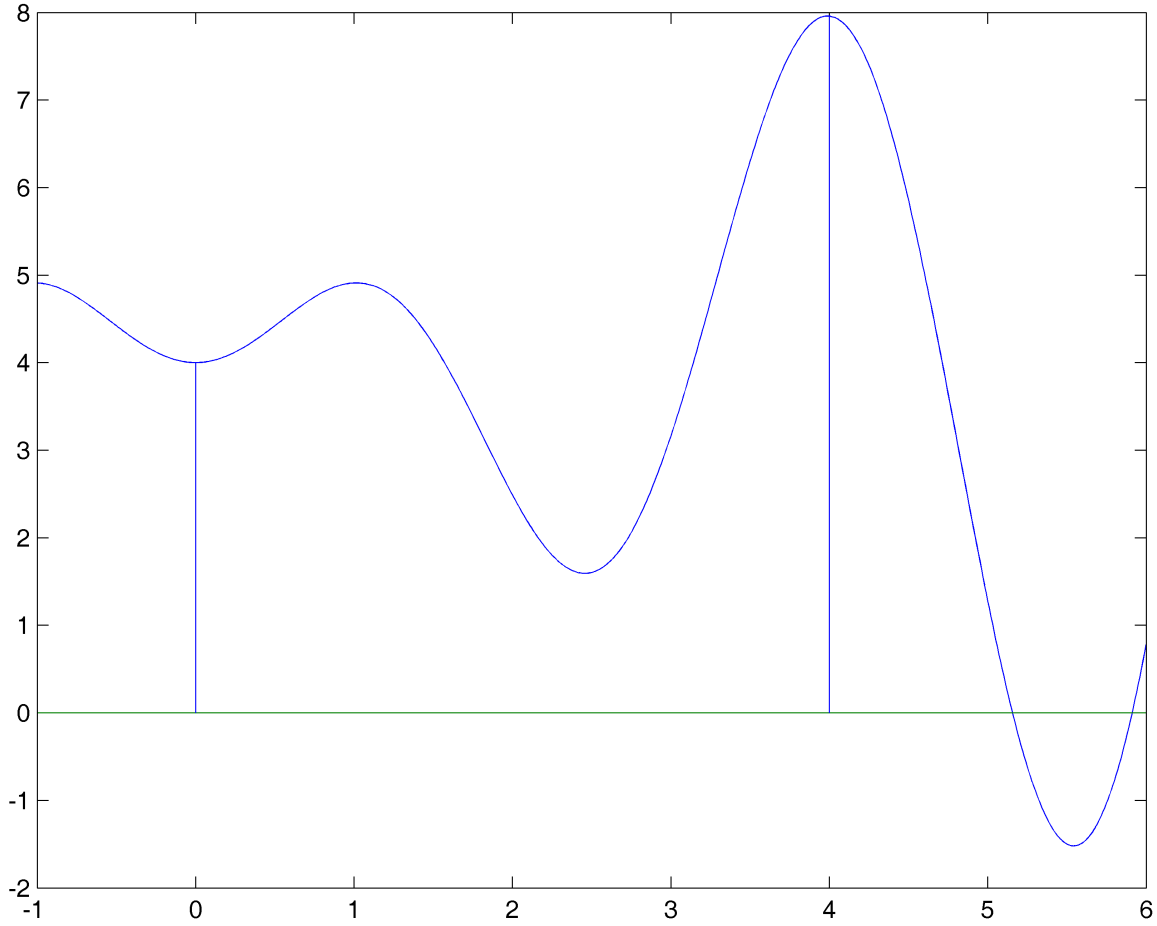
$$I = h\big(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}\big) = h\sum_{i=0}^{n-1} f_i$$

όπου n το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί ο τύπος και

$$h = \frac{b-a}{n}$$

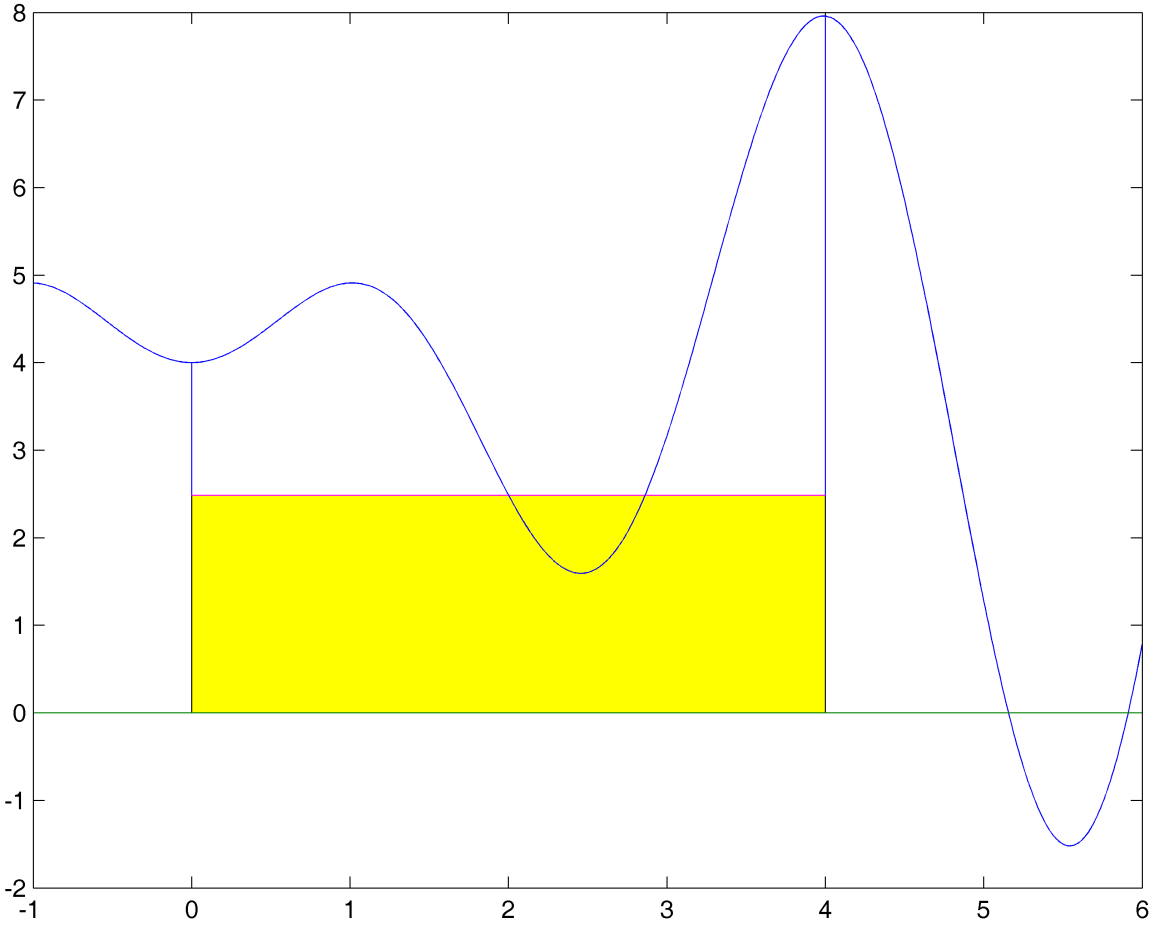
το βήμα των ισαπεχόντων σημείων.

Κανόνας Ορθογωνίου



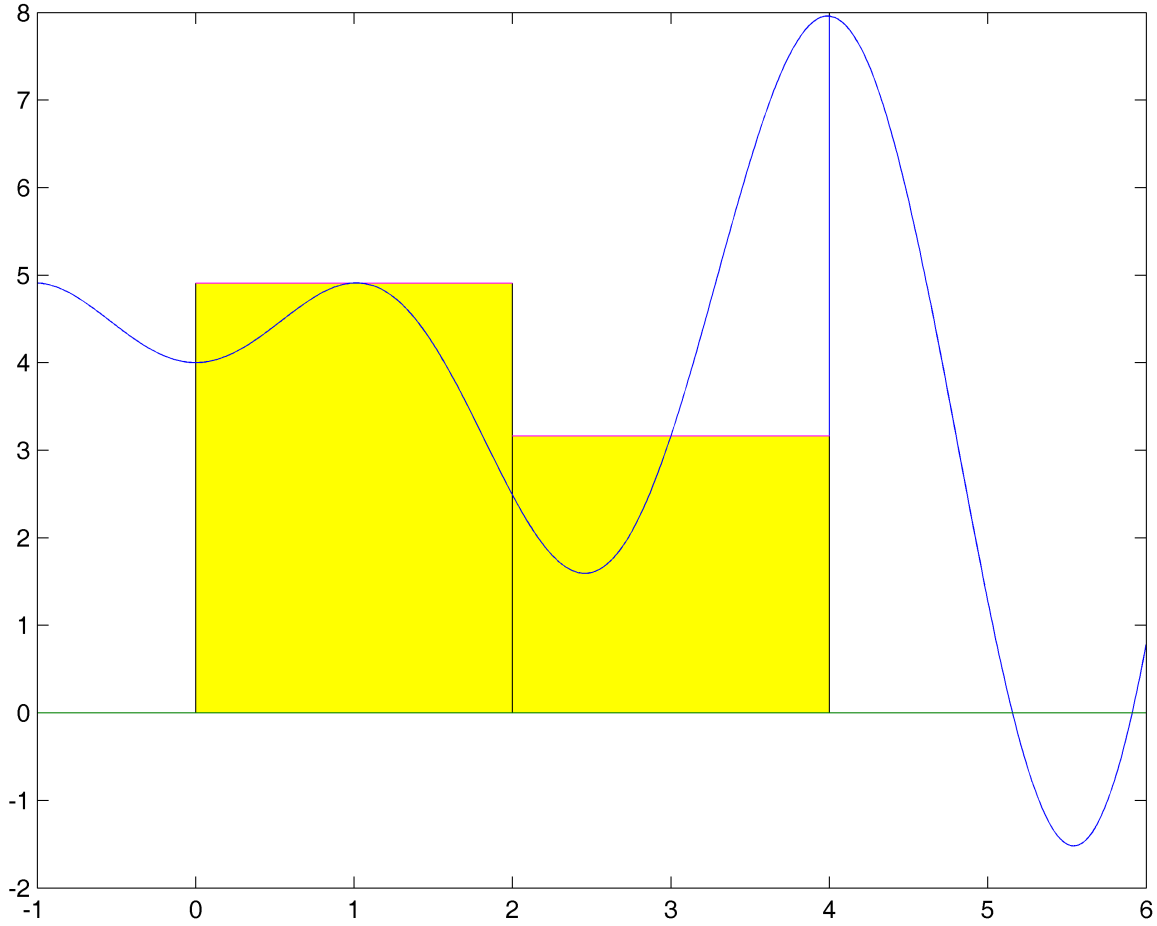
Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Ορθογωνίου



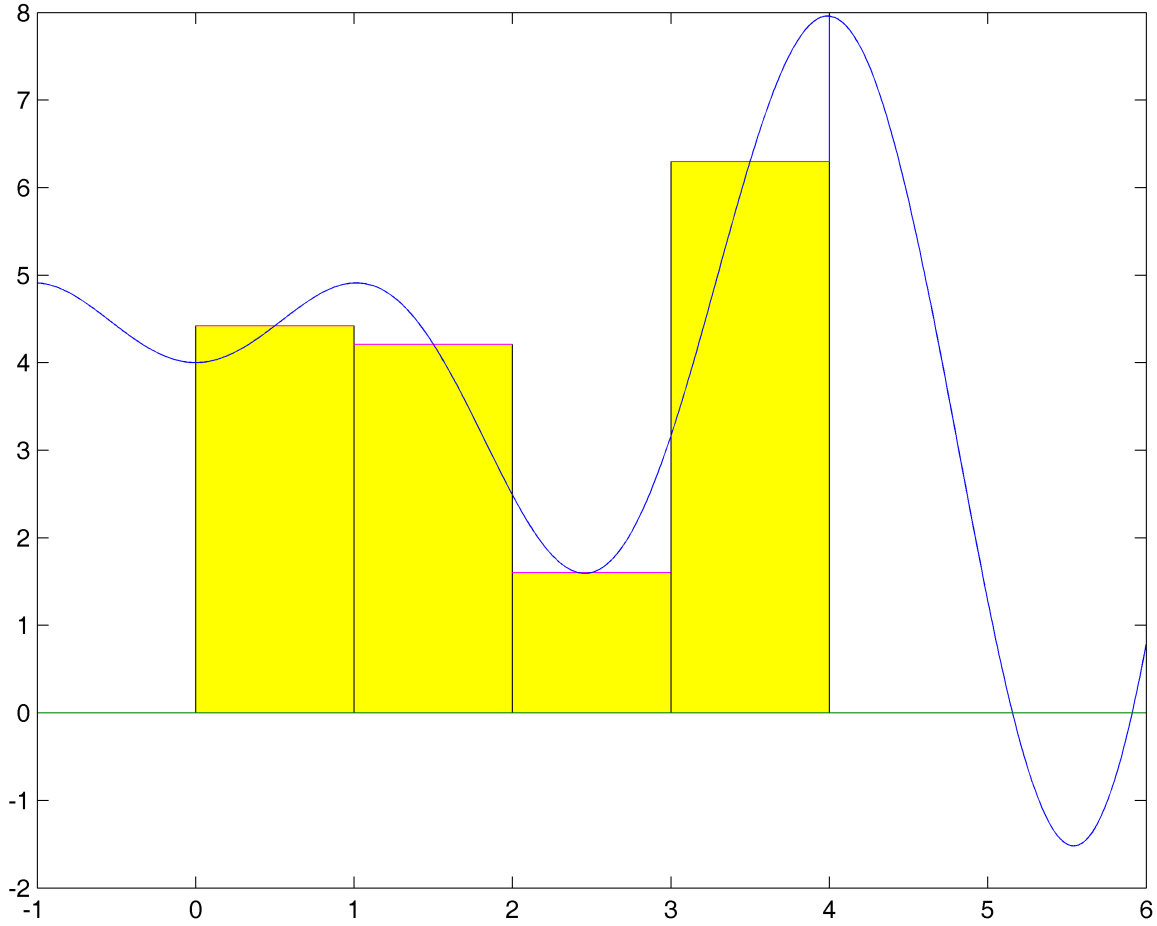
Σχήμα: Κανόνας Ορθογωνίου για $n = 1$

Κανόνας Ορθογωνίου



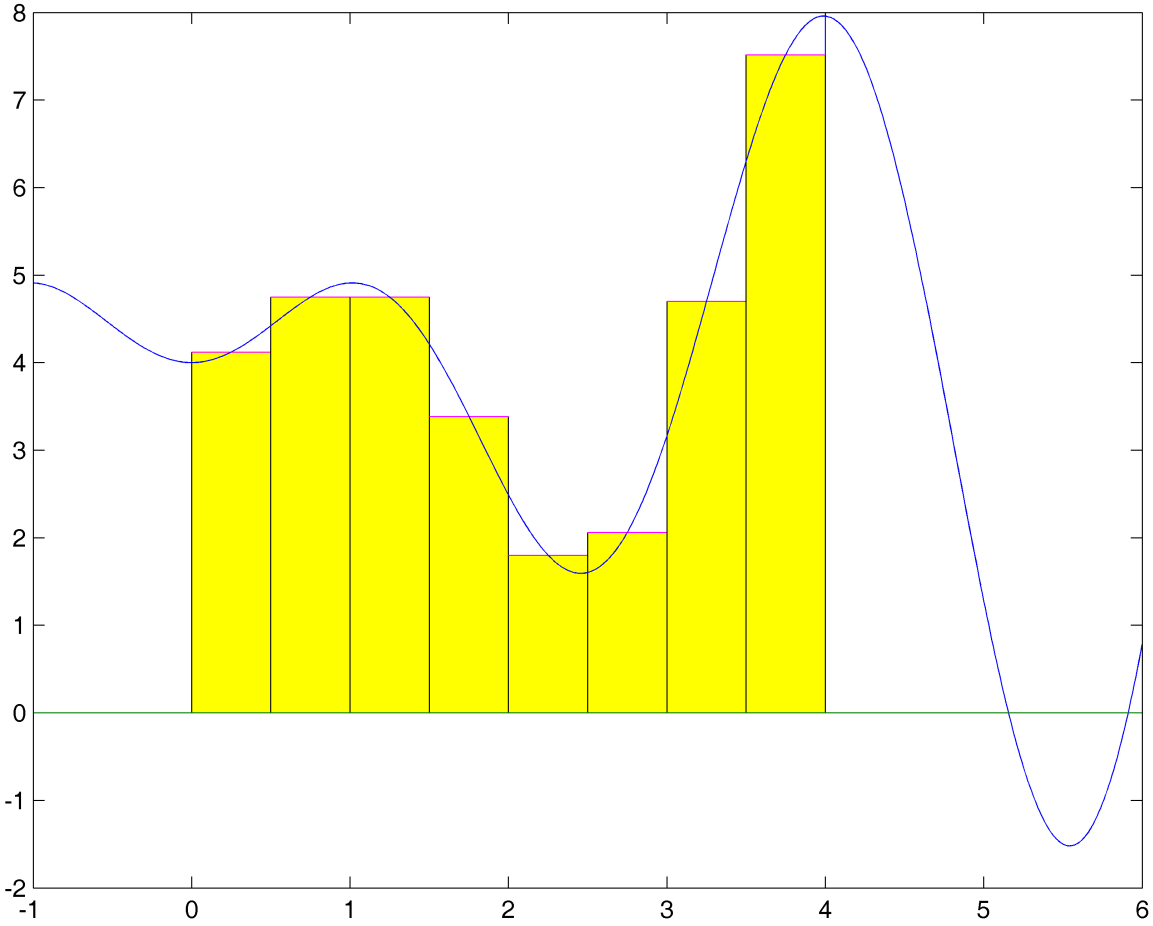
Σχήμα: Κανόνας Ορθογωνίου για $n = 2$

Κανόνας Ορθογωνίου



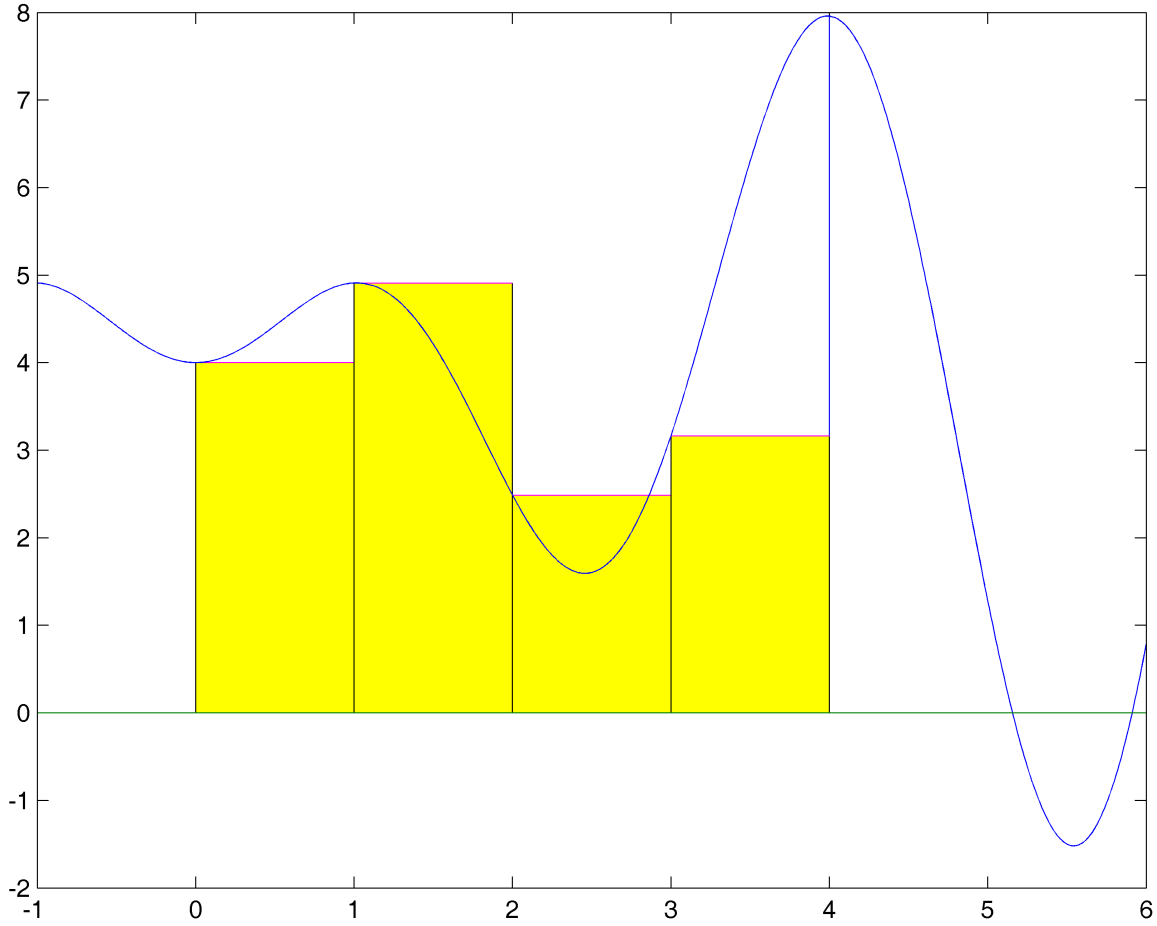
Σχήμα: Κανόνας Ορθογωνίου για $n = 4$

Κανόνας Ορθογωνίου



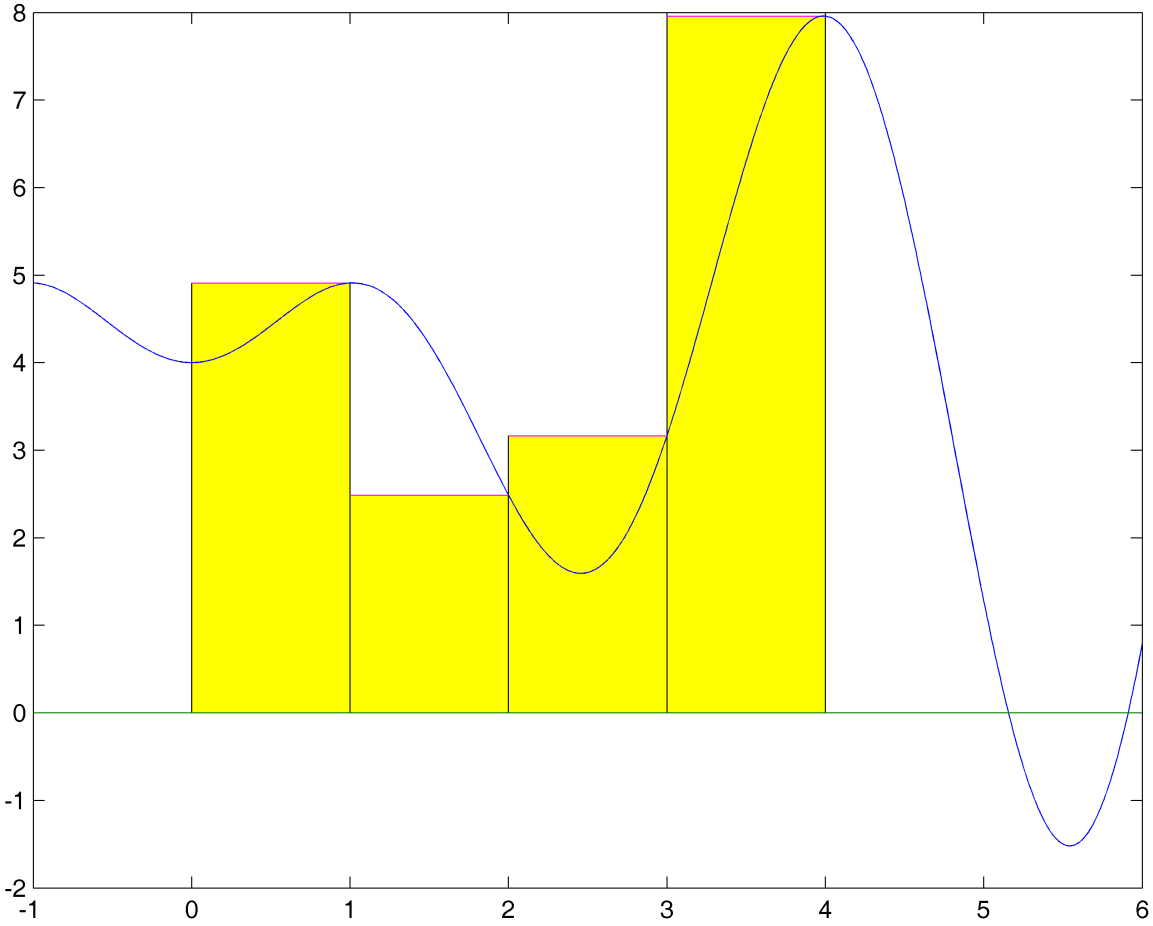
Σχήμα: Κανόνας Ορθογωνίου για $n = 8$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παραλλαγή



Σχήμα: Κανόνας Ορθογωνίου για $n = 4$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παραλλαγή



Σχήμα: Κανόνας Ορθογωνίου για $n = 4$

Κανόνας Ορθογωνίου - Σφάλμα

Το άνω σφάλμα του απλού τύπου του Ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{h^2}{2} \cdot M \quad \text{με} \quad M = |\max_{x \in [a,b]} \{f'(x)\}|$$

ενώ το άνω σφάλμα του σύνθετου τύπου του Ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{h^2}{2} \cdot n \cdot M = \frac{h(b-a)}{2} \cdot M \quad \text{με} \quad M = |\max_{x \in [a,b]} \{f'(x)\}|$$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 1

- Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

και το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^5 f(x)dx$$

  - Να υπολογιστεί το I με τον απλό κανόνα Ορθογωνίου.
  - Να υπολογιστεί το I με τον σύνθετο κανόνα Ορθογωνίου για $n = 4$.
  - Να υπολογιστούν τα αντίστοιχα σφάλματα.
  - Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαστημάτων έτσι ώστε το αποτέλεσμα να έχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 1

Για τον απλό κανόνα του Ορθογωνίου έχουμε

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 3 \quad \text{με} \quad h = b - a = 5 - 1 = 4$$

και αντίστοιχα

$$f_0 = f(x_0) = f(3) = \frac{1}{3}$$

άρα

$$I = h \cdot f_0 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1.33333$$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 1

Για τον σύνθετο κανόνα του Ορθογωνίου με $n = 4$ έχουμε

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

και τα σημεία

$$\begin{aligned}
x_0 &= a + \tfrac{h}{2} = \tfrac{3}{2} && \text{με} \quad f_0 = f(x_0) = f(1) = \tfrac{2}{3} \\
x_1 &= x_0 + h = \tfrac{5}{2} && \text{με} \quad f_1 = f(x_1) = f(2) = \tfrac{2}{5} \\
x_2 &= x_0 + 2h = \tfrac{7}{2} && \text{με} \quad f_2 = f(x_2) = f(3) = \tfrac{2}{7} \\
x_3 &= x_0 + 3h = \tfrac{9}{2} && \text{με} \quad f_3 = f(x_3) = f(4) = \tfrac{2}{9}
\end{aligned}$$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 1

άρα

$$
\begin{aligned}
I &= h\big(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}\big) = h\sum_{i=0}^{n-1} f_i \\
I &= h\big(f_0 + f_1 + f_2 + f_3\big) \\
&= 1\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9}\right) \\
&= \frac{496}{315} \simeq 1.5746
\end{aligned}
$$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 1

Για να υπολογίσουμε το άνω σφάλμα υπολογίζουμε πρώτα το M

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

άρα

$$M = |\max_{x\in[a,b]}\{f'(x)\}| = 1$$

Για τον απλό τύπο του Ορθογωνίου το σφάλμα ισούται με

$$E = \frac{h^2}{2} \cdot M = \frac{4^2}{2} \cdot 1 = 8$$

ενώ για το σύνθετο τύπο του Ορθογωνίου το σφάλμα ισούται με

$$E = \frac{h(b-a)}{2} \cdot M = \frac{1(5-1)}{2} \cdot 1 = 2$$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 1

Για να έχουμε στο αποτέλεσμα ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει να βρούμε μια σχέση του n με το k. Θα πρέπει να ισχύει

$$E < \frac{1}{2}10^{-k}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{h(b-a)}{2} \cdot M < \frac{1}{2}10^{-k} \overset{h=\frac{b-a}{n}}{\Longrightarrow} \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M < \frac{1}{2}10^{-k}$$

Επομένως, λύνουμε ως προς n

$$n > 10^k \cdot M \cdot (b-a)^2$$

δηλαδή

$$n > 10^5 \cdot 1 \cdot (5-1)^2 = 1600000 \Rightarrow n > 1600000$$

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 2

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	3	1	5

και το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

- Να υπολογιστεί το I με τον σύνθετο κανόνα Ορθογωνίου με το κατάλληλο n.

Κανόνας Ορθογωνίου - Παράδειγμα 2

Επειδή έχουμε 5 ισαπέχοντα σημεία το πλήθος των διαστημάτων θα είναι $n = 2$.
Το βήμα είναι $h = 2$.
Θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= h\big(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}\big) = h\sum_{i=0}^{n-1} f_i \\
I &= h\big(f_0 + f_1\big) \\
&= 1\,(1+1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Κανόνας Τραπεζίου

- Για να υπολογίσουμε το

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

ενώνουμε τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ με μια γραμμή, δηλαδή, εφαρμόζουμε γραμμική παρεμβολή. Το σχήμα που δημιουργείται είναι συνήθως ένα τραπέζιο.

- Θέτουμε

$$x_0 = a \quad \text{και} \quad x_1 = b \quad \text{με} \quad h = b - a$$

και αντίστοιχα

$$f_0 = f(x_0) = f(a) \quad \text{και} \quad f_1 = f(x_1) = f(b)$$

Κανόνας Τραπεζίου

- Το γραμμικό πολυώνυμο με τις προς τα εμπρός διαφορές θα είναι

$$p(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta f_0}{h}$$

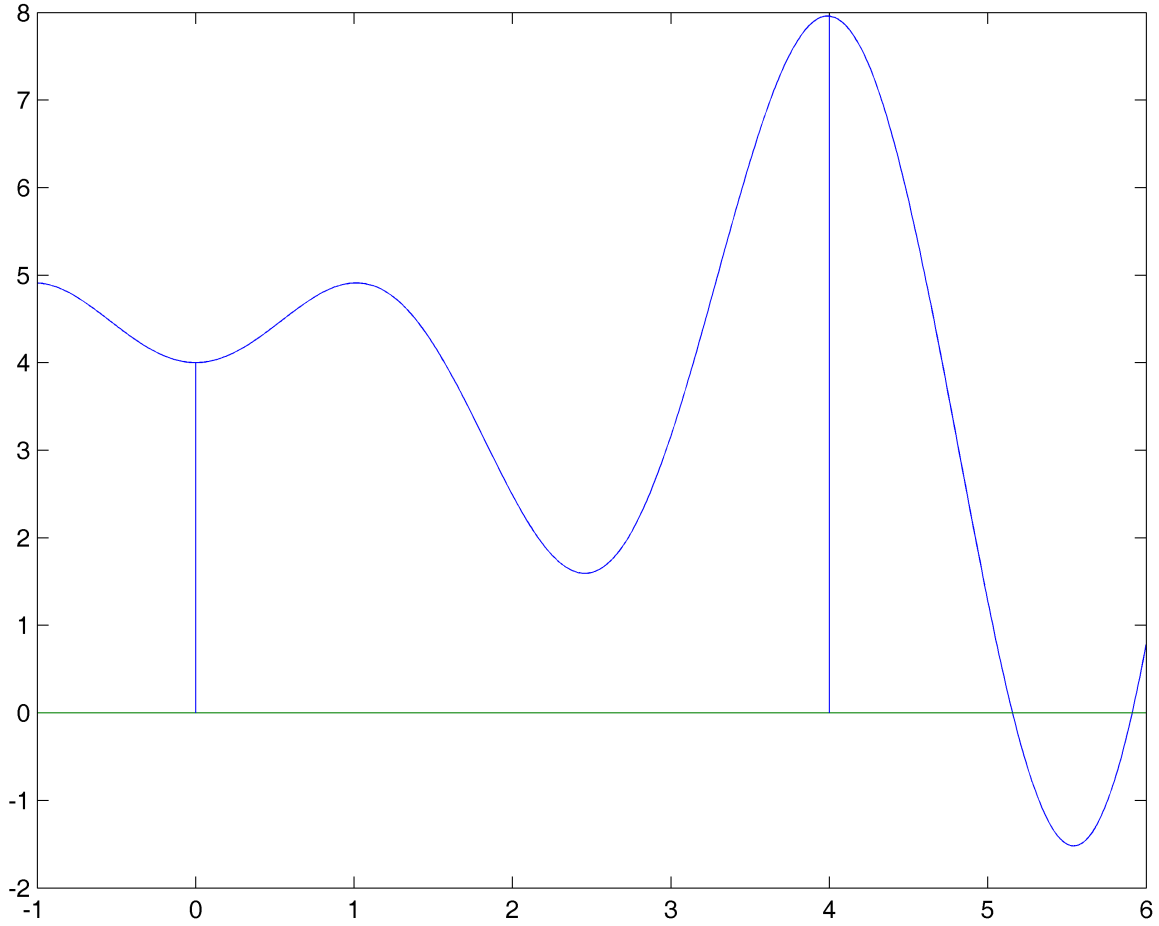
άρα

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

επομένως ο απλός τύπος του Τραπεζίου δίνεται από

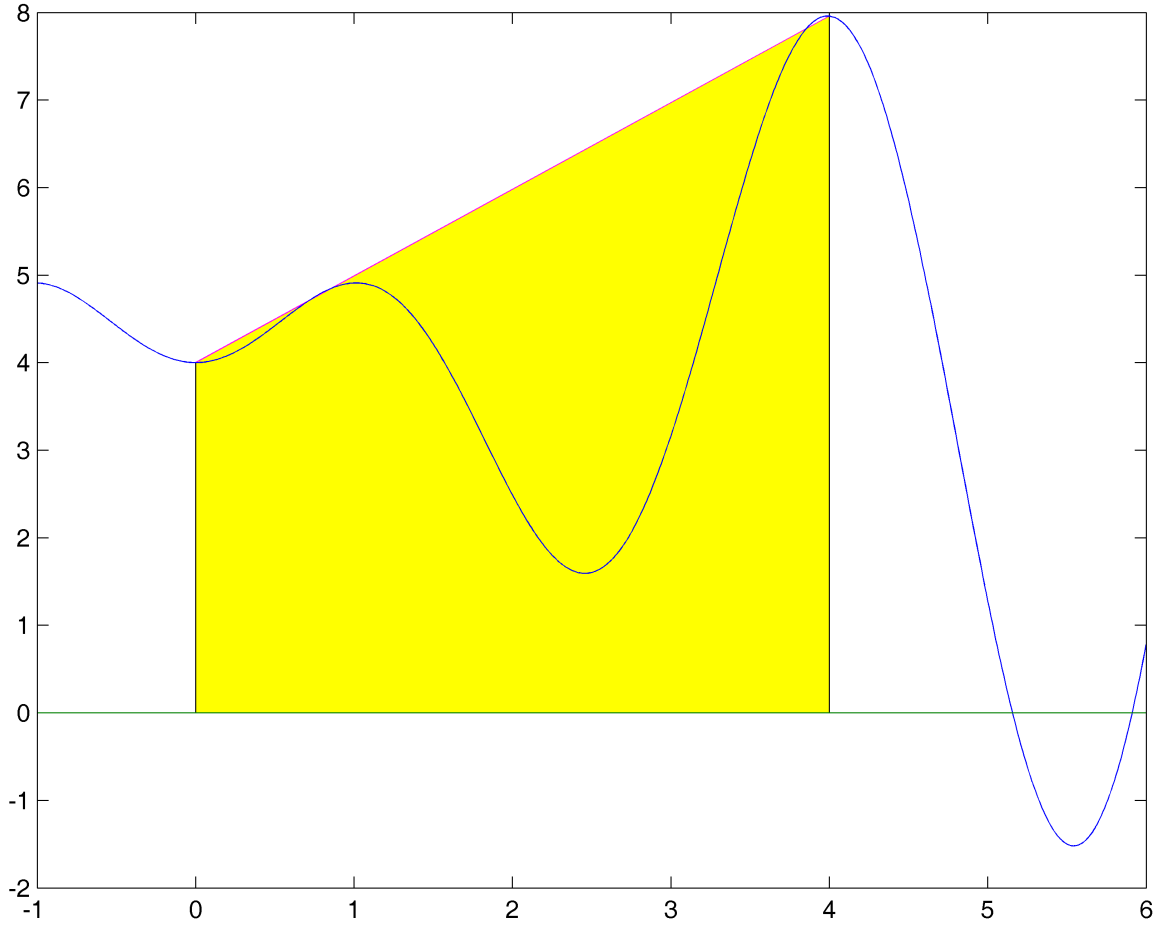
$$I = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Υπολογισμός του $\int_0^4 f(x)dx$ - Απλός Κανόνας Τραπεζίου

Κανόνας Τραπεζίου

- Είναι προφανές ότι, αν διαμερίσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε μικρότερα διαστήματα θα έχουμε καλύτερη προσέγγιση της καμπύλης της συνάρτησης f.
- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, δηλαδή θα έχουμε $n + 1$ ισαπέχοντα σημεία με απόσταση

$$h = \frac{b - a}{n}$$

- Τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ δίνονται από τον τύπο

$$x_i = x_0 + i \cdot h \quad \text{με} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{και} \quad x_0 = a \ , x_n = b$$

- Αντιστοίχως,

$$f_i = f(x_i) \quad \text{με} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Κανόνας Τραπεζίου

- Επομένως, η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

προσεγγίζεται από τον Σύνθετο Κανόνα του Τραπεζίου σύμφωνα με τον τύπο

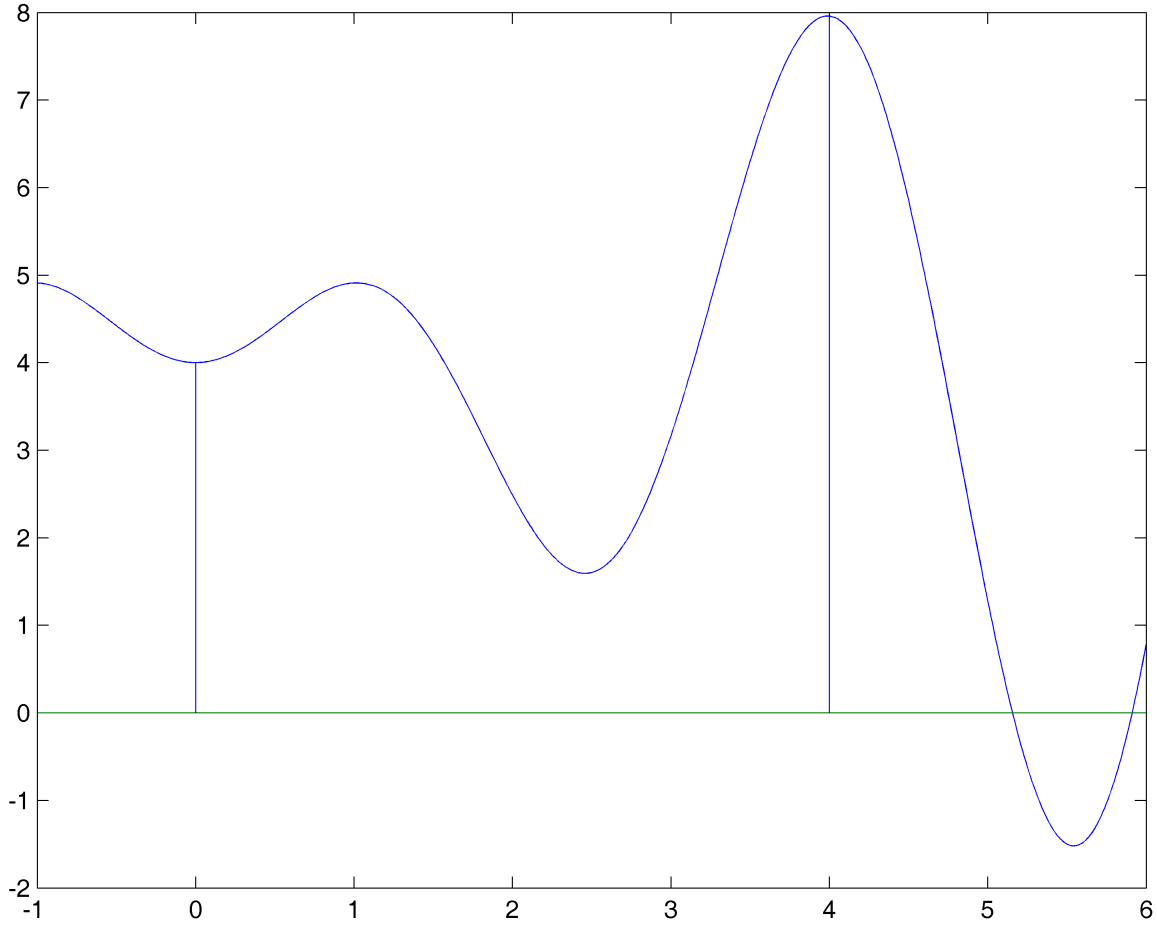
$$I = \frac{h}{2}(f_0 + 2 \cdot f_1 + \ldots + 2 \cdot f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

όπου n το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί ο τύπος και

$$h = \frac{b-a}{n}$$

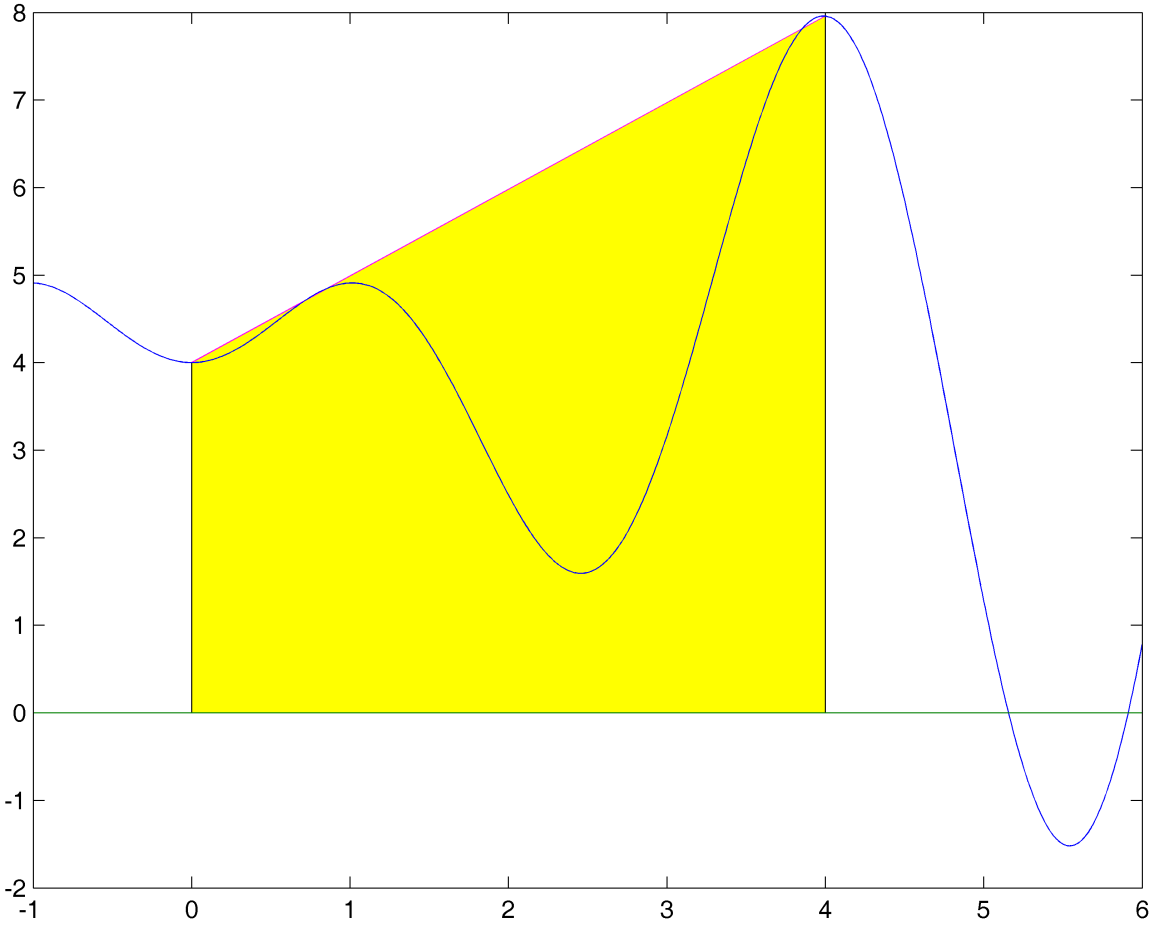
το βήμα των ισαπεχόντων σημείων.

Κανόνας Τραπεζίου



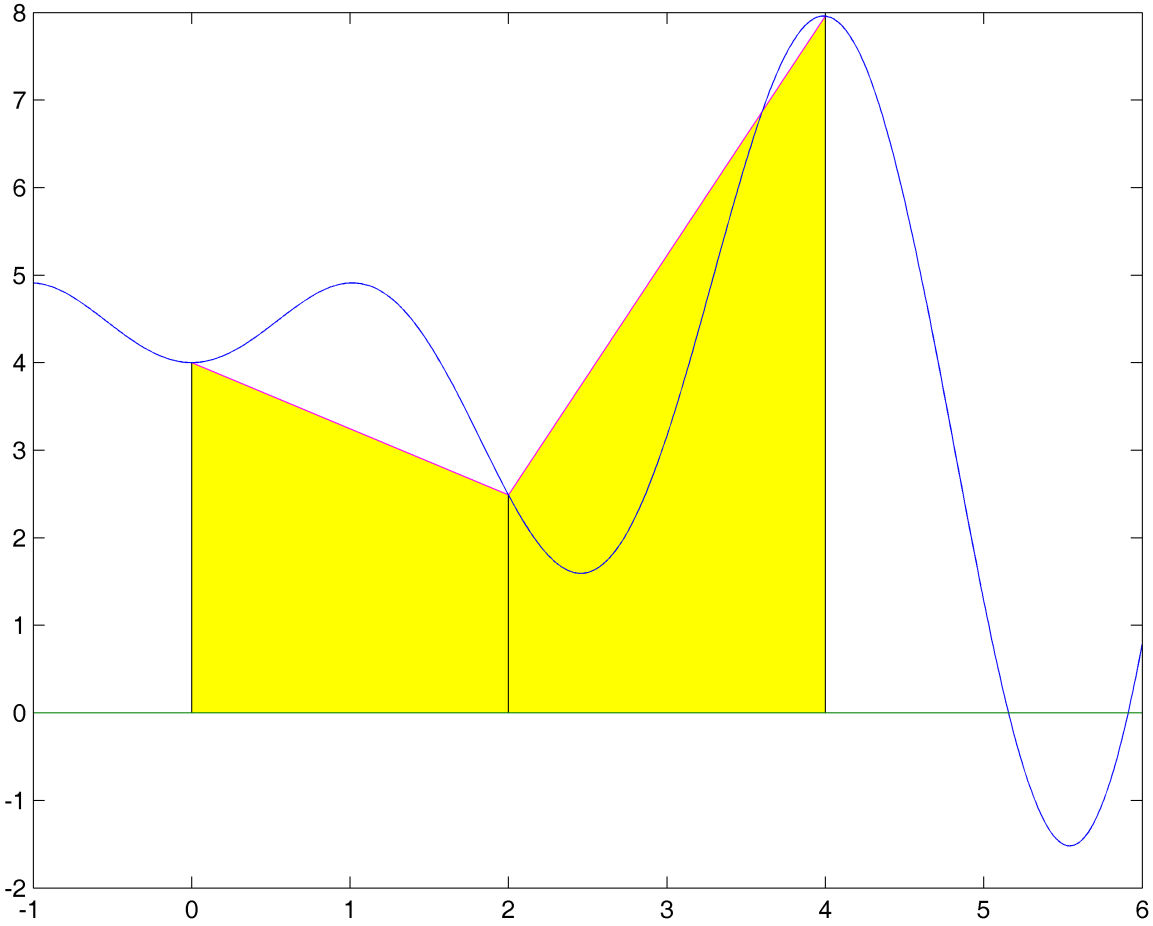
Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Τραπεζίου



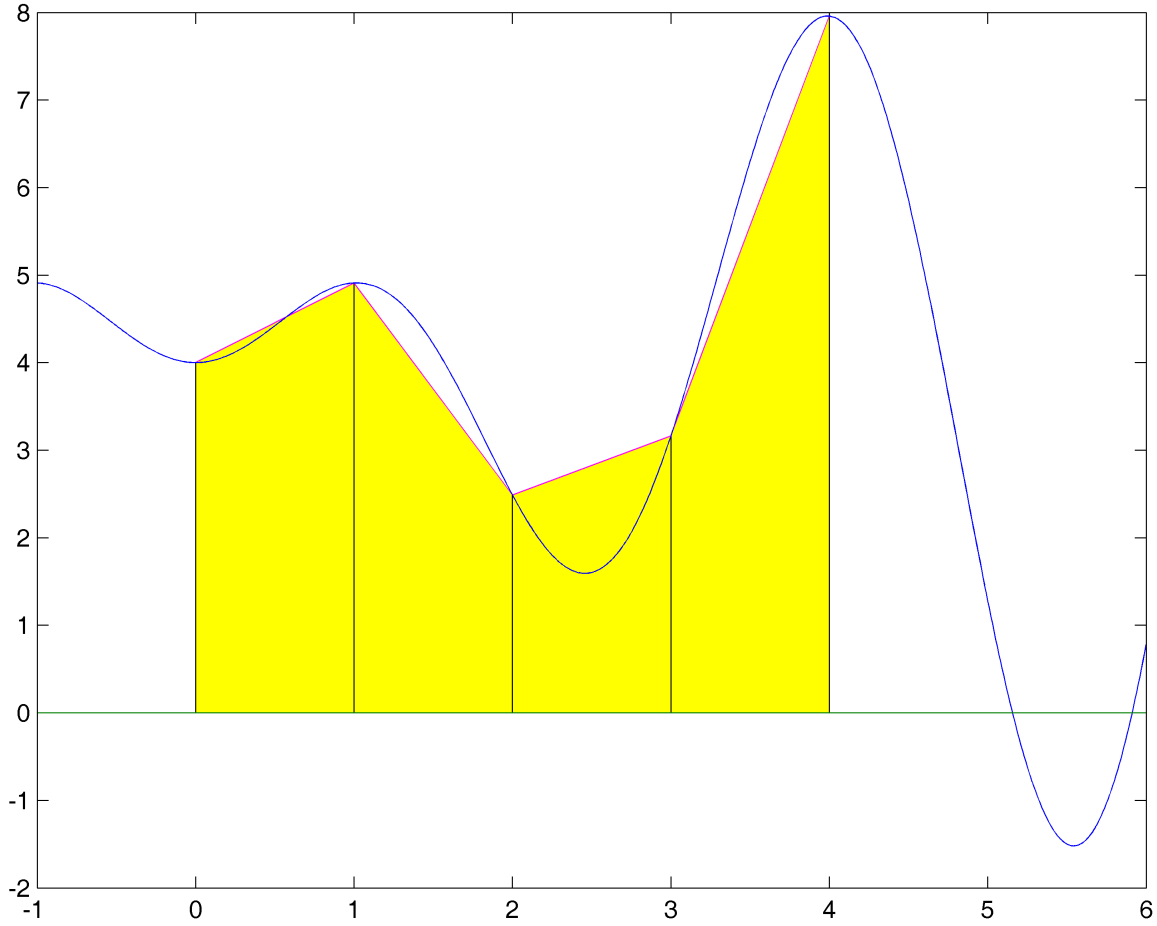
Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 1$

Κανόνας Τραπεζίου



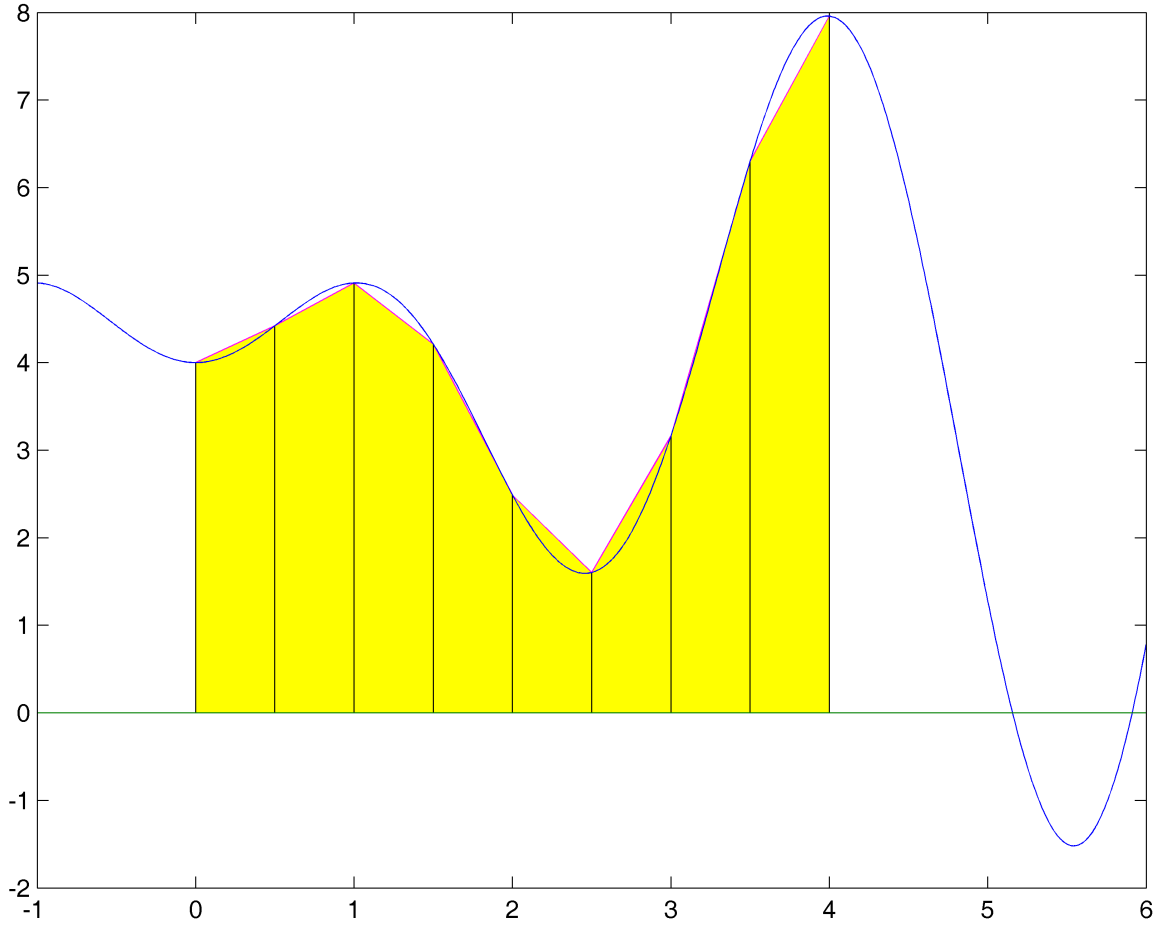
Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 2$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 4$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 8$

Κανόνας Τραπεζίου - Σφάλμα

Το άνω σφάλμα του απλού τύπου του Τραπεζίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{h^3}{12} \cdot M \quad \text{με} \quad M = |\max_{x \in [a,b]} \{f''(x)\}|$$

ενώ το άνω σφάλμα του σύνθετου τύπου του Τραπεζίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{h^3}{12} \cdot n \cdot M = \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot M \quad \text{με} \quad M = |\max_{x \in [a,b]} \{f''(x)\}|$$

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

- Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
και το ορισμένο ολοκλήρωμα
$$I = \int_1^5 f(x)dx$$
  - Να υπολογιστεί το I με τον απλό κανόνα Τραπεζίου.
  - Να υπολογιστεί το I με τον σύνθετο κανόνα Τραπεζίου για $n = 4$.
  - Να υπολογιστούν τα αντίστοιχα σφάλματα.
  - Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαστημάτων έτσι ώστε το αποτέλεσμα να έχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

Για τον απλό κανόνα του Τραπεζίου έχουμε

$$x_0 = a = 1 \quad \text{και} \quad x_1 = b = 5 \quad \text{με} \quad h = b - a = 5 - 1 = 4$$

και αντίστοιχα

$$f_0 = f(x_0) = f(1) = 1 \quad \text{και} \quad f_1 = f(x_1) = f(5) = \frac{1}{5}$$

άρα

$$I = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) = \frac{4}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 2.4$$

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

Για τον σύνθετο κανόνα του Τραπεζίου με $n = 4$ έχουμε

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

και τα σημεία

$$\begin{aligned}
x_0 &= a = 1 && \text{με} \quad f_0 = f(x_0) = f(1) = 1 \\
x_1 &= x_0 + h = 2 && \text{με} \quad f_1 = f(x_1) = f(2) = \tfrac{1}{2} \\
x_2 &= x_0 + 2h = 3 && \text{με} \quad f_2 = f(x_2) = f(3) = \tfrac{1}{3} \\
x_3 &= x_0 + 3h = 4 && \text{με} \quad f_3 = f(x_3) = f(4) = \tfrac{1}{4} \\
x_4 &= x_0 + 4h = 5 = b && \text{με} \quad f_4 = f(x_4) = f(5) = \tfrac{1}{5}
\end{aligned}$$

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

άρα

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{h}{2}\big(f_0 + 2\cdot f_1 + \ldots + 2\cdot f_{n-1} + f_n\big) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) \\
&= \frac{h}{2}\big(f_0 + 2\cdot f_1 + 2\cdot f_2 + 2\cdot f_3 + f_4\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\big) \\
&= \frac{101}{60} \simeq 1.683
\end{aligned}
$$

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

Για να υπολογίσουμε το άνω σφάλμα υπολογίζουμε πρώτα το M

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

άρα

$$M = |\max_{x\in[a,b]}\{f''(x)\}| = 2$$

Για τον απλό τύπο του Τραπεζίου το σφάλμα ισούται με

$$E = \frac{h^3}{12} \cdot M = \frac{4^3}{12} \cdot 2 = 10.66666$$

ενώ για το σύνθετο τύπο του Τραπεζίου το σφάλμα ισούται με

$$E = \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot M = \frac{1^2(5-1)}{12} \cdot 2 = 0.66666$$

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

Για να έχουμε στο αποτέλεσμα ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει να βρούμε μια σχέση του n με το k. Θα πρέπει να ισχύει

$$E < \frac{1}{2}10^{-k}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{h^2(b-a)}{12} \cdot M < \frac{1}{2}10^{-k} \overset{h=\frac{b-a}{n}}{\Longrightarrow} \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M < \frac{1}{2}10^{-k}$$

Επομένως, λύνουμε ως προς n

$$n^2 > \frac{1}{6} \cdot 10^k \cdot M \cdot (b-a)^3$$

δηλαδή

$$n^2 > \frac{1}{6} \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot (5-1)^3 = 2133333.33333 \Rightarrow n > 1460.59$$

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	3	1	5

και το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

- Να υπολογιστεί το I με τον σύνθετο κανόνα Τραπεζίου με το κατάλληλο n.

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

Επειδή έχουμε 5 ισαπέχοντα σημεία το πλήθος των διαστημάτων θα είναι $n = 4$.
Το βήμα είναι $h = 1$.
Θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2 \cdot f_1 + \ldots + 2 \cdot f_{n-1} + f_n\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) \\
&= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 + f_4\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 5\right) \\
&= \frac{17}{2} = 8.5
\end{aligned}
$$

Κανόνας Simpson

- Για να υπολογίσουμε το

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

χρησιμοποιούμε τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ και το κεντρικό σημείο $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ τα οποία τα ενώνουμε με μια παραβολή, δηλαδή, εφαρμόζουμε τετραγωνική παρεμβολή (πολυώνυμο δευτέρου βαθμού).

- Θέτουμε

$$x_0 = a \ , \ x_1 = \frac{a+b}{2} \text{ και } x_2 = b \quad \text{με} \quad h = \frac{b-a}{2}$$

και αντίστοιχα

$$f_0 = f(x_0) = f(a) \ , \ f_1 = f(x_1) \text{ και } f_2 = f(x_2) = f(b)$$

Κανόνας Simpson

- Το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με τις προς τα εμπρός διαφορές θα είναι

$$p(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta f_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

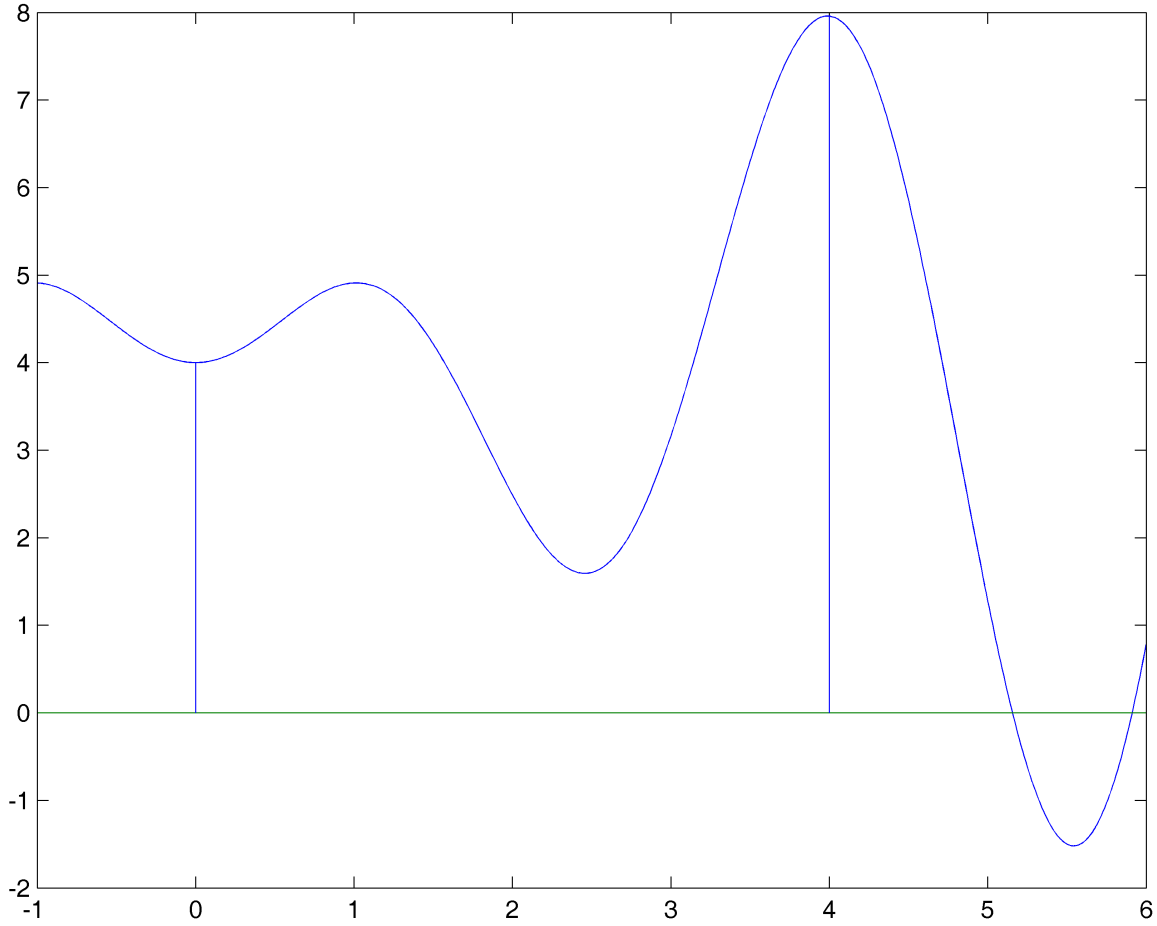
άρα

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

επομένως, ο απλός τύπος του Simpson γίνεται

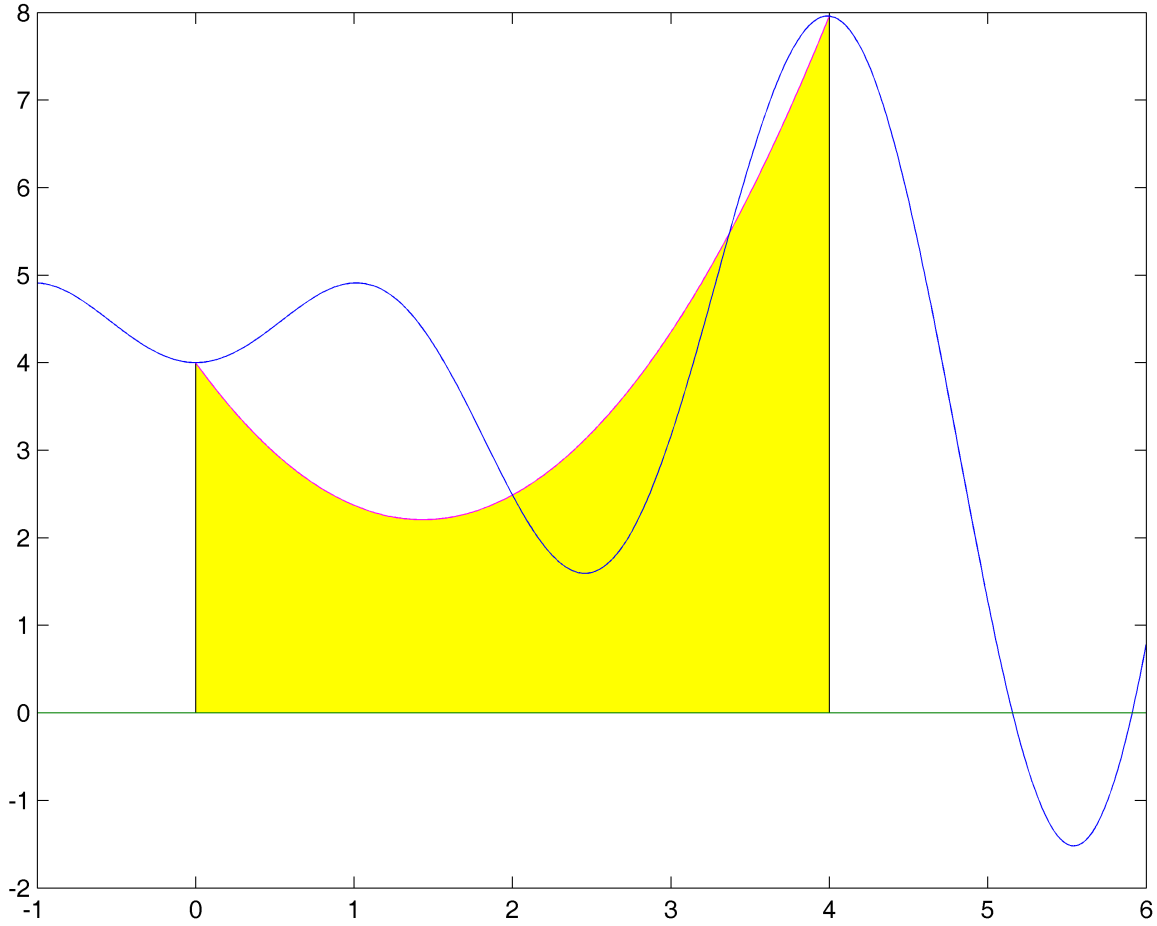
$$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4 \cdot f_1 + f_2)$$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Υπολογισμός του $\int_0^4 f(x)dx$ - Απλός Κανόνας Simpson

Κανόνας Simpson

- Είναι προφανές ότι, αν διαμερίσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε μικρότερα διαστήματα θα έχουμε καλύτερη προσέγγιση της καμπύλης της συνάρτησης f.
- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα στα οποία ορίζουμε και τα αντίστοιχα κεντρικά σημεία, δηλαδή θα έχουμε $2n+1$ ισαπέχοντα σημεία με απόσταση

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

- Τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ δίνονται από τον τύπο

$$x_i = x_0 + i \cdot h \quad \text{με} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2n \quad \text{και} \quad x_0 = a \ , \ x_{2n} = b$$

- Αντιστοίχως,

$$f_i = f(x_i) \quad \text{με} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$$

Κανόνας Simpson

- Επομένως, η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

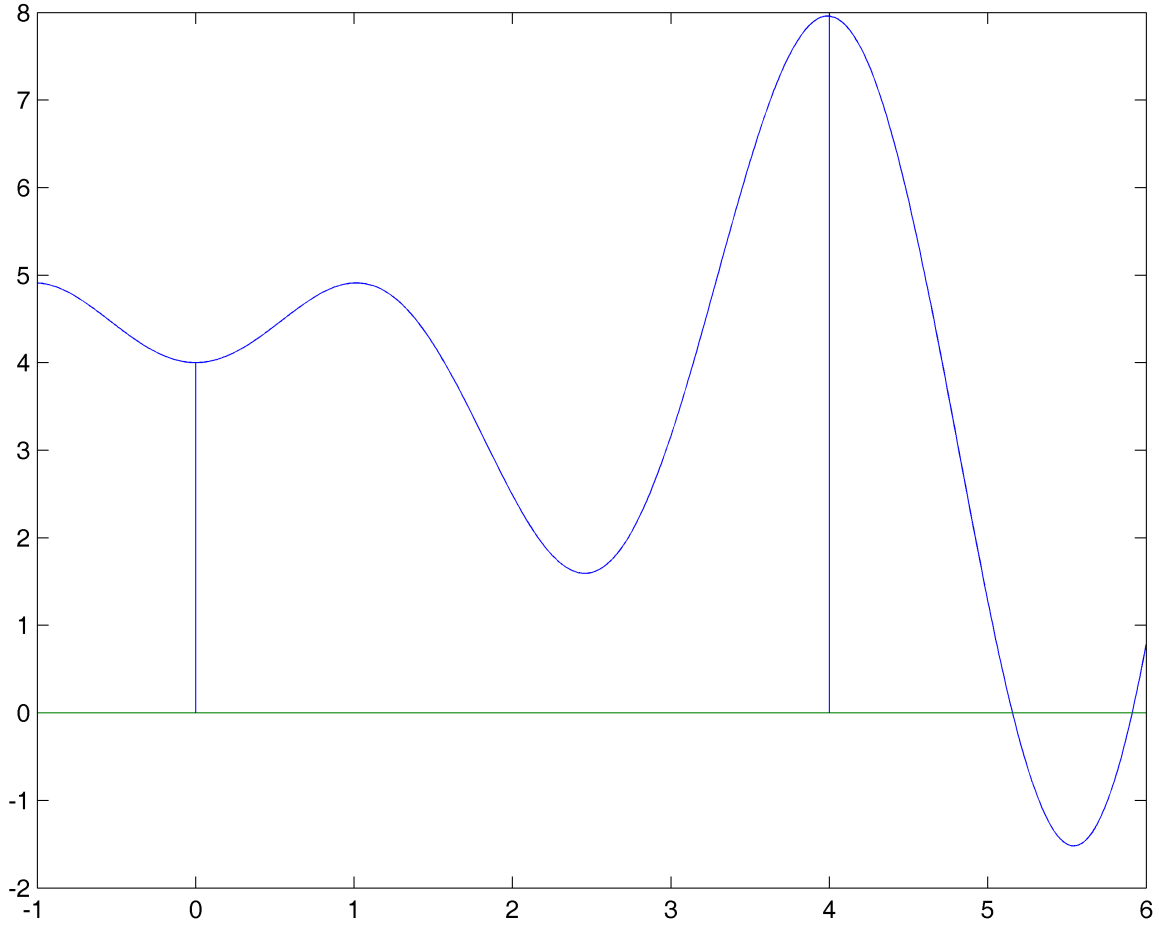
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

προσεγγίζεται από τον Σύνθετο Κανόνα του Simpson σύμφωνα με τον τύπο

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + \ldots + 2 \cdot f_{2n-2} + 4 \cdot f_{2n-1} + f_{2n}\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n}\right) \end{aligned}$$

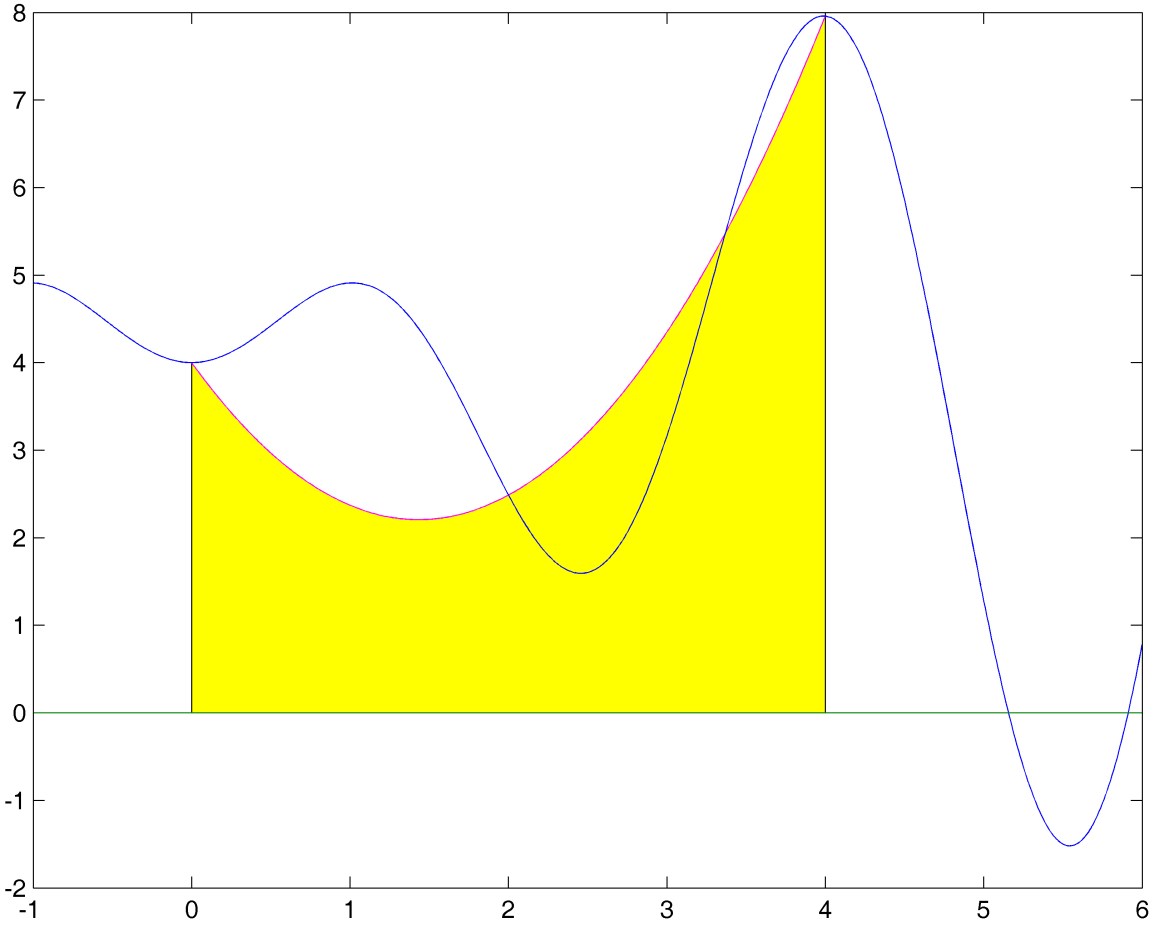
όπου n το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί ο τύπος και $h = \frac{b-a}{2n}$ το βήμα των ισαπεχόντων σημείων.

Κανόνας Simpson



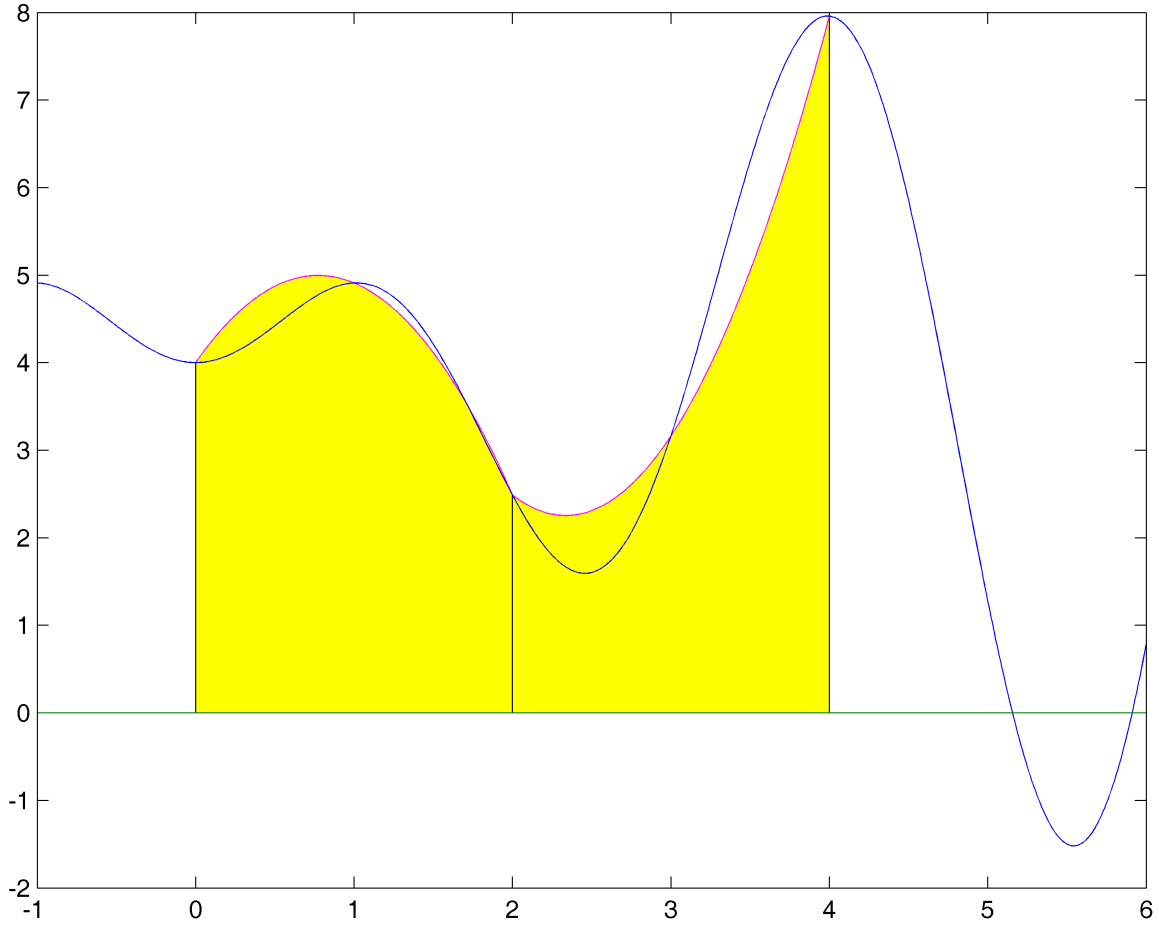
Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Simpson



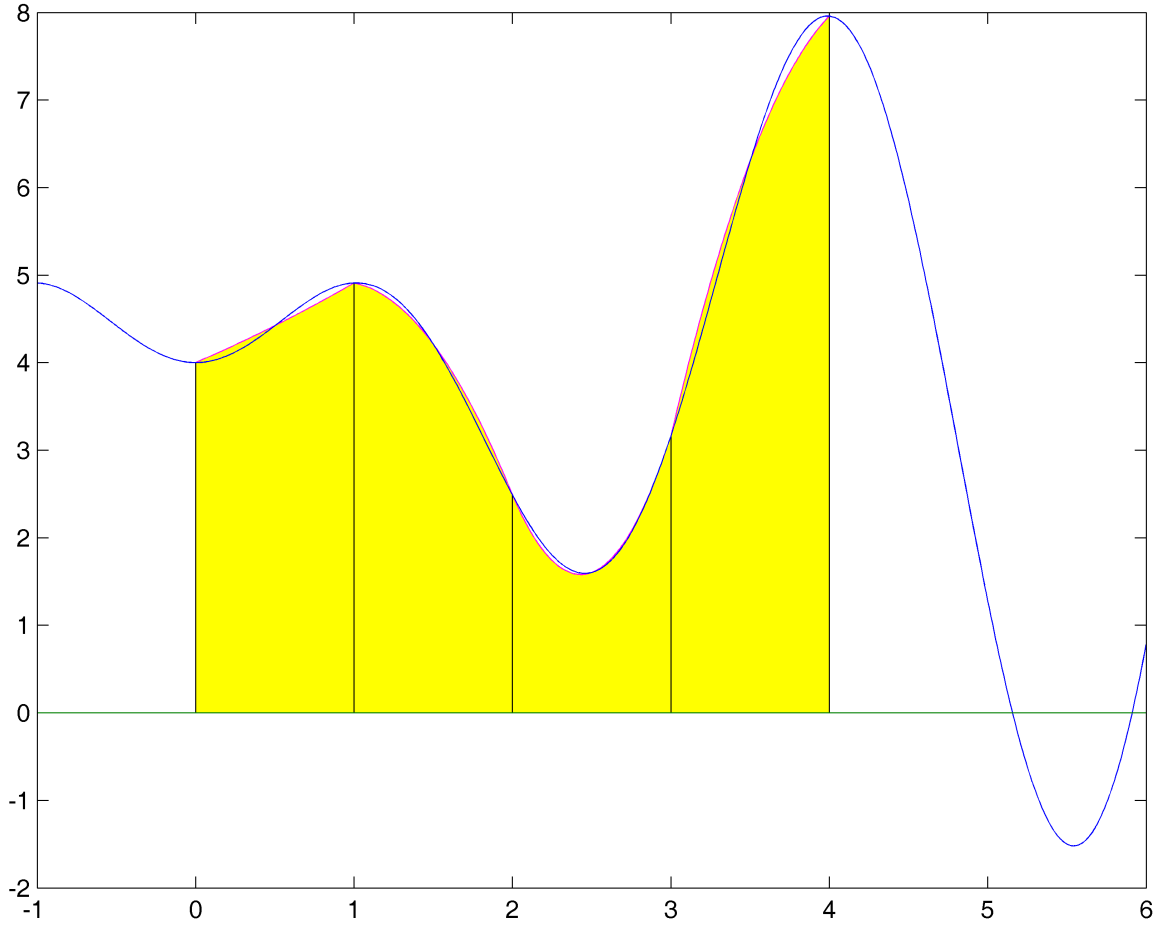
Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 1$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 2$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 4$

Κανόνας Simpson - Σφάλμα

Το άνω σφάλμα του απλού τύπου του Simpson δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{h^5}{90} \cdot M \quad \text{με} \quad M = |\max_{x \in [a,b]} \{f^{(4)}(x)\}|$$

ενώ το άνω σφάλμα του σύνθετου τύπου του Simpson δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{h^5}{90} \cdot n \cdot M = \frac{h^4(b-a)}{180} \cdot M \quad \text{με} \quad M = |\max_{x \in [a,b]} \{f^{(4)}(x)\}|$$

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

- Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
και το ορισμένο ολοκλήρωμα
$$I = \int_1^5 f(x)dx$$
  - Να υπολογιστεί το I με τον απλό κανόνα Simpson.
  - Να υπολογιστεί το I με τον σύνθετο κανόνα Simpson για $n = 2$.
  - Να υπολογιστούν τα αντίστοιχα σφάλματα.
  - Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαστημάτων έτσι ώστε το αποτέλεσμα να έχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

Για τον απλό κανόνα του Simpson έχουμε

$$x_0 = a = 1\ ,\ x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ και } x_2 = b = 5 \quad \text{με} \quad h = \frac{b-a}{2}$$

και αντίστοιχα

$$f_0 = f(x_0) = f(1) = 1\ ,\ f_1 = f(x_1) = f(3) = \frac{1}{3} \text{ και } f_2 = f(x_2) = f(5) = \frac{1}{5}$$

άρα

$$I = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot f_1 + f_2\right) = \frac{2}{3}\left(1 + 4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{76}{45} \simeq 1.68888$$

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

Για τον σύνθετο κανόνα του Simpson με $n = 2$ έχουμε

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

και τα σημεία

$$\begin{aligned}
x_0 &= a = 1 && \text{με} \quad f_0 = f(x_0) = f(1) = 1 \\
x_1 &= x_0 + h = 2 && \text{με} \quad f_1 = f(x_1) = f(2) = \tfrac{1}{2} \\
x_2 &= x_0 + 2h = 3 && \text{με} \quad f_2 = f(x_2) = f(3) = \tfrac{1}{3} \\
x_3 &= x_0 + 3h = 4 && \text{με} \quad f_3 = f(x_3) = f(4) = \tfrac{1}{4} \\
x_4 &= x_0 + 4h = 5 = b && \text{με} \quad f_4 = f(x_4) = f(5) = \tfrac{1}{5}
\end{aligned}$$

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

άρα

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\cdot\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n}\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\cdot f_1 + 2\cdot f_2 + \ldots + 2\cdot f_{2n-2} + 4\cdot f_{2n-1} + f_{2n}\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\cdot f_1 + 2\cdot f_2 + 4\cdot f_3 + f_4\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + 4\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{73}{45} \simeq 1.62222
\end{aligned}
$$

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

Για να υπολογίσουμε το άνω σφάλμα υπολογίζουμε πρώτα το M

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ ,\ f''(x) = \frac{2}{x^3}\ ,\ f'''(x) = -\frac{6}{x^4}\ ,\ f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

άρα

$$M = |\max_{x\in[a,b]}\{f^{(4)}(x)\}| = 24$$

Για τον απλό τύπο του Simpson το σφάλμα ισούται με

$$E = \frac{h^5}{90}\cdot M = \frac{2^5}{90}\cdot 24 = 8.533333$$

ενώ για το σύνθετο τύπο του Simpson το σφάλμα ισούται με

$$E = \frac{h^4(b-a)}{180}\cdot M = \frac{1^4(5-1)}{180}\cdot 24 = 0.533333$$

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

Για να έχουμε στο αποτέλεσμα ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει να βρούμε μια σχέση του n με το k. Θα πρέπει να ισχύει

$$E < \frac{1}{2}10^{-k}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{h^4(b-a)}{180} \cdot M < \frac{1}{2}10^{-k} \overset{h=\frac{b-a}{2n}}{\Longrightarrow} \frac{(b-a)^5}{180 \cdot 16n^4} \cdot M < \frac{1}{2}10^{-k}$$

Επομένως, λύνουμε ως προς n

$$n^4 > \frac{1}{1440} \cdot 10^k \cdot M \cdot (b-a)^5$$

δηλαδή

$$n^4 > \frac{1}{1440} \cdot 10^5 \cdot 24 \cdot (5-1)^5 = 1706666.66666 \Rightarrow n > 36.14$$

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	3	1	5

και το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

- Να υπολογιστεί το I με τον σύνθετο κανόνα Simpson με το κατάλληλο n.

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

Επειδή έχουμε 5 ισαπέχοντα σημεία το πλήθος των διαστημάτων θα είναι $n = 2$.
Το βήμα είναι $h = 2$.
Θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n}\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + \ldots + 2 \cdot f_{2n-2} + 4 \cdot f_{2n-1} + f_{2n}\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 4 \cdot f_3 + f_4\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5\right) \\
&= \frac{42}{3} = 14
\end{aligned}
$$

Ειδικές περιπτώσεις Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

- Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

  - Η παραπάνω συνάρτηση απειρίζεται στο αριστερό άκρο (0).
  - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλειστούς τύπους.
  - Οι ανοιχτοί τύποι συγκλίνουν αργά.

Ειδικές περιπτώσεις Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

- Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

  - Στο παραπάνω ολοκλήρωμα το πάνω άκρο απειρίζεται.
  - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους διότι χρειαζόμαστε άπειρα σημεία.

Ειδικές περιπτώσεις Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

- Μπορούμε να κάνουμε μετασχηματισμό έτσι ώστε τα άκρα να είναι πεπερασμένα.

$$y = 1 - e^{-x} \quad \text{με} \quad x = -ln(1-y)$$

Τα άκρα θα γίνουν $0 \to 0$ και $\infty \to 1$ και το διαφορικό $dx = dy(1-y)$. Άρα

$$I = \int_0^1 \frac{f(-ln(1-y))}{1-y} dy$$