ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής, Υπολογιστών και Τηλεπικοινωνιών – Σέρρες

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Οκτώβριος 2019

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον
Έβδομη Σειρά Διαφανειών

1. Σχέσεις Διαφορών

2. Αριθμητική Παραγώγιση - Πρώτη παράγωγος
   - Πρώτη παράγωγος με προς τα εμπρός διαφορές
   - Πρώτη παράγωγος με προς τα πίσω διαφορές
   - Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

3. Αριθμητική Παραγώγιση - Δεύτερη παράγωγος
   - Δεύτερη παράγωγος με προς τα εμπρός διαφορές
   - Πρώτη παράγωγος με προς τα πίσω διαφορές
   - Δεύτερη παράγωγος - Παράδειγμα

Σχέσεις Διαφορών

Αν τις διηρημένες διαφορές τις υπολογίσουμε σε ισαπέχοντα σημεία για τα οποία ισχύει

$$h = x_{i+1} - x_i$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση μεταξύ των διηρημένων διαφορών και των προς τα εμπρός διαφορών αλλά και των προς τα πίσω διαφορών.

Σχέσεις Διαφορών

Ο πίνακας τιμών των διηρημένων διαφορών

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_0	f_0			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$		
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	f_3			

Σχέσεις Διαφορών

θα γίνει σε σχέση με τις προς τα εμπρός διαφορές

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_0	f_0			
		$f[x_0, x_1] = \frac{\Delta f_0}{h}$		
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{\Delta f_1}{h}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\Delta^3 f_0}{6h^3}$
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{\Delta^2 f_1}{2h^2}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{\Delta f_2}{h}$		
x_3	f_3			

γενικά ισχύει

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! \cdot h^n}$$

Σχέσεις Διαφορών

θα γίνει σε σχέση με τις προς τα πίσω διαφορές

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_0	f_0			
		$f[x_0, x_1] = \frac{\nabla f_1}{h}$		
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\nabla^2 f_2}{2h^2}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{\nabla f_2}{h}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\nabla^3 f_3}{6h^3}$
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{\nabla^2 f_3}{2h^2}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{\nabla f_3}{h}$		
x_3	f_3			

γενικά ισχύει

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{\nabla^n f_n}{n! \cdot h^n}$$

Σχέσεις Διαφορών

Το πολυώνυμο Newton δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot +f[x_0, x_1, x_2]$$
$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

το οποίο σε σχέση με τις προς τα εμπρός διαφορές θα γίνει

$$f(x) \simeq P_n(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta f_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2} +$$
$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot \frac{\Delta^n f_0}{n! \cdot h^n}$$

Σχέσεις Διαφορών

Αν θέσουμε

$$x = x_0 + s \cdot h \quad \Rightarrow \quad s = \frac{x - x_0}{h}$$

θα έχουμε

$$f(x) \simeq P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n} \cdot \Delta^n f_0$$

το οποίο είναι το πολυώνυμο Newton-Gregory ($\Delta - NG$) με προς τα εμπρός διαφορές.

Σχέσεις Διαφορών

Όπου

$$\binom{s}{1} = \frac{s!}{(s-1)! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (s-2) \cdot (s-1) \cdot s}{1 \cdot 2 \ldots \cdot (s-1) \cdot 1} = s$$

$$\begin{aligned}\binom{s}{2} &= \frac{s!}{(s-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (s-2) \cdot (s-1) \cdot s}{1 \cdot 2 \ldots \cdot (s-2) \cdot 1 \cdot 2} \\ &= \frac{(s-1) \cdot s}{2} = \frac{s^2 - s}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{s}{3} &= \frac{s!}{(s-3)! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (s-3) \cdot \ldots \cdot s}{1 \cdot 2 \ldots \cdot (s-3) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{(s-2) \cdot (s-1) \cdot s}{6} = \frac{s^3 - 3s^2 + s}{6}\end{aligned}$$

Σχέσεις Διαφορών

Ενώ, αν θέσουμε

$$x = x_n - s \cdot h \quad \Rightarrow \quad s = \frac{x_n - x}{h}$$

το πολυώνυμο Newton με τις προς τα πίσω διαφορές θα γίνει

$$f(x) \simeq P_n(x) = f_n - \binom{s}{1} \cdot \nabla f_n + \binom{s}{2} \cdot \nabla^2 f_n - \ldots + (-1)^n \binom{s}{n} \cdot \nabla^n f_n$$

το οποίο είναι το πολυώνυμο Newton-Gregory ($\nabla - NG$) με προς τα πίσω διαφορές.

Πρώτη παράγωγος ($\Delta - NG$)

Για να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης σε σημείο, παραγωγίζουμε το πολυώνυμο $\Delta - NG$. Επομένως

$$f'(x) \simeq \frac{d}{dx}P_n(x) = \frac{d}{ds}P_n(x) \cdot \frac{d}{dx}s =$$
$$\frac{1}{h}\frac{d}{ds}\left[f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n} \cdot \Delta^n f_0\right]$$

δηλαδή,

$$f'(x) = f'(x_0 + s \cdot h) \simeq \frac{1}{h}\frac{d}{ds}\left[f_0 + s \cdot \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} \cdot \Delta^n f_0\right]$$

Πρώτη παράγωγος ($\Delta - NG$)

Για $s = 0$ υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο στο $x = x_0$. Επομένως, με βάση το n έχουμε

- Για $n = 1$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_0$$

- Για $n = 2$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right]$$

- Για $n = 3$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right]$$

Πρώτη παράγωγος ($\Delta - NG$)

- Για $n = k$, με k περιττό

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \ldots + \frac{1}{k}\Delta^k f_0\right]$$

ή ισοδύναμα, με k άρτιο

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \ldots - \frac{1}{k}\Delta^k f_0\right]$$

- Η αριθμητική παραγώγιση με το πολυώνυμο $\Delta - NG$ χρησιμοποιείται στα αρχικά σημεία παρεμβολής.

Πρώτη παράγωγος ($\nabla - NG$)

Επίσης, για να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης σε σημείο, παραγωγίζουμε το πολυώνυμο $\nabla - NG$.
Επομένως

$$f'(x) \simeq \frac{d}{dx}P_n(x) = \frac{d}{ds}P_n(x) \cdot \frac{d}{dx}s =$$
$$-\frac{1}{h}\frac{d}{ds}\left[f_n - \binom{s}{1} \cdot \nabla f_n + \binom{s}{2} \cdot \nabla^2 f_n - \ldots + (-1)^n \binom{s}{n} \cdot \nabla^n f_n\right]$$

δηλαδή,

$$f'(x) = f'(x_n - s \cdot h) \simeq -\frac{1}{h}\frac{d}{ds}\left[f_n - s \cdot \nabla f_n + \frac{s(s-1)}{2} \cdot \nabla^2 f_n - \right.$$
$$\left. - \ldots + (-1)^n \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} \cdot \nabla^n f_n\right]$$

Πρώτη παράγωγος ($\nabla - NG$)

Για $s = 0$ υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο στο $x = x_n$. Επομένως, με βάση το n έχουμε

- Για $n = 1$

$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\nabla f_n$$

- Για $n = 2$

$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n\right]$$

- Για $n = 3$

$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n\right]$$

Πρώτη παράγωγος ($\nabla - NG$)

- Για $n = k$

$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \ldots + \frac{1}{k}\nabla^k f_n\right]$$

- Η αριθμητική παραγώγιση με το πολυώνυμο $\nabla - NG$ χρησιμοποιείται στα τελευταία σημεία παρεμβολής.

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

- Δίνεται ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης $f(x)$ $(p(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 3)$

x	0	1	2	3	4
y	-3	2	3	6	17

Να υπολογιστούν οι τιμές των παραγώγων $f'(0), f'(1), f'(2), f'(3)$ και $f'(4)$ με τα πολυώνυμα $\Delta - NG$ και $\nabla - NG$.

Έχουμε 5 σημεία αρά θα υπολογίσουμε διαφορές μέχρι τέταρτης τάξης.

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

Δημιουργούμε πίνακα τιμών των διαφορών

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης	$4^{\eta\varsigma}$ τάξης
0	-3				
		5			
1	2		-4		
		1		6	
2	3		2		0
		3		6	
3	6		8		
		11			
4	17				

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

Με το πολυώνυμο $\Delta - NG$ έχουμε

- Για $x_0 = 0$ έχουμε μέχρι Δ^4 διαφορές, άρα

$$f'(0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right] = 5 - \frac{1}{2}(-4) + \frac{1}{3}6 = 9$$

  με πραγματική τιμή $p'(0) = 9$

- Για $x_0 = 1$ έχουμε μέχρι Δ^3 διαφορές, άρα

$$f'(1) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right] = 1 - \frac{1}{2}2 + \frac{1}{3}6 = 2$$

  με πραγματική τιμή $p'(1) = 2$

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

- Για $x_0 = 2$ έχουμε μέχρι Δ^2 διαφορές, άρα

$$f'(2) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right] = 3 - \frac{1}{2}8 = -1$$

  με πραγματική τιμή $p'(2) = 1$
- Για $x_0 = 3$ έχουμε μέχρι Δ^1 διαφορές, άρα

$$f'(3) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_0 = 11$$

  με πραγματική τιμή $p'(3) = 6$
- Για $x_0 = 4$ δεν έχουμε προς τα εμπρός διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο.

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

Με το πολυώνυμο $\nabla - NG$ έχουμε

- Για $x_n = 0$ δεν έχουμε προς τα πίσω διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο.
- Για $x_n = 1$ έχουμε μέχρι ∇^1 διαφορές, άρα

$$f'(1) \simeq \frac{1}{h}\nabla f_n = 5$$

  με πραγματική τιμή $p'(1) = 2$
- Για $x_n = 2$ έχουμε μέχρι ∇^2 διαφορές, άρα

$$f'(2) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n\right] = 1 + \frac{1}{2}(-4) = -1$$

  με πραγματική τιμή $p'(2) = 1$

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

- Για $x_n = 3$ έχουμε μέχρι ∇^3 διαφορές, άρα

$$f'(3) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n\right] = 3 + \frac{1}{2}2 + \frac{1}{3}6 = 6$$

  με πραγματική τιμή $p'(3) = 6$

- Για $x_n = 4$ έχουμε μέχρι ∇^4 διαφορές, άρα

$$f'(4) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n\right] = 11 + \frac{1}{2}8 + \frac{1}{3}6 = 17$$

  με πραγματική τιμή $p'(4) = 17$

Δεύτερη παράγωγος ($\Delta - NG$)

Για να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης σε σημείο, παραγωγίζουμε δυο φορές το πολυώνυμο $\Delta - NG$.
Επομένως

$$f''(x) \simeq \frac{d^2}{dx^2}P_n(x) = \frac{d^2}{ds^2}P_n(x) \cdot \frac{d}{dx}s \cdot \frac{d}{dx}s =$$
$$\frac{1}{h^2}\frac{d^2}{ds^2}\left[f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n} \cdot \Delta^n f_0\right]$$

δηλαδή,

$$f''(x) = f''(x_0 + s \cdot h) \simeq \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{ds^2}\left[f_0 + s \cdot \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} \cdot \Delta^n f_0\right]$$

Δεύτερη παράγωγος ($\Delta - NG$)

Για $s = 0$ υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο στο $x = x_0$. Επομένως, με βάση το n έχουμε

- Για $n = 1$ δεν έχουμε όρο Δ^2
- Για $n = 2$
$$f''(x_0) \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0$$
- Για $n = 3$
$$f''(x_0) \simeq \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0\right]$$
- Η αριθμητική παραγώγιση με το πολυώνυμο $\Delta - NG$ χρησιμοποιείται στα αρχικά σημεία παρεμβολής.

Δεύτερη παράγωγος ($\nabla - NG$)

Επίσης, για να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης σε σημείο, παραγωγίζουμε το πολυώνυμο $\nabla - NG$.
Επομένως

$$f''(x) \simeq \frac{d^2}{dx^2}P_n(x) = \frac{d^2}{ds^2}P_n(x) \cdot \frac{d}{dx}s \cdot \frac{d}{dx}s =$$
$$\frac{1}{h^2}\frac{d}{ds}\left[f_n - \binom{s}{1} \cdot \nabla f_n + \binom{s}{2} \cdot \nabla^2 f_n - \ldots + (-1)^n \binom{s}{n} \cdot \nabla^n f_n\right]$$

δηλαδή,

$$f''(x) = f''(x_n - s \cdot h) \simeq \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{ds^2}\left[f_n - s \cdot \nabla f_n + \frac{s(s-1)}{2} \cdot \nabla^2 f_n - \right.$$
$$\left. - \ldots + (-1)^n \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} \cdot \nabla^n f_n\right]$$

Δεύτερη παράγωγος ($\nabla - NG$)

Για $s = 0$ υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο στο $x = x_n$. Επομένως, με βάση το n έχουμε

- Για $n = 1$ Για $n = 1$ δεν έχουμε όρο ∇^2
- Για $n = 2$
$$f''(x_n) \simeq \frac{1}{h^2}\nabla^2 f_n$$
- Για $n = 3$
$$f''(x_n) \simeq \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n\right]$$
- Η αριθμητική παραγώγιση με το πολυώνυμο $\Delta - NG$ χρησιμοποιείται στα τελευταία σημεία παρεμβολής.

Δεύτερη παράγωγος - Παράδειγμα

- Δίνεται ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης $f(x)$ $(p(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 3)$

x	0	1	2	3	4
y	-3	2	3	6	17

Να υπολογιστούν οι τιμές των παραγώγων $f''(0), f''(1), f''(2), f''(3)$ και $f''(4)$ με τα πολυώνυμα $\Delta - NG$ και $\nabla - NG$.

Έχουμε 5 σημεία αρά θα υπολογίσουμε διαφορές μέχρι τέταρτης τάξης.

Δεύτερη παράγωγος - Παράδειγμα

Δημιουργούμε πίνακα τιμών των διαφορών

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης	$4^{\eta\varsigma}$ τάξης
0	-3				
		5			
1	2		-4		
		1		6	
2	3		2		0
		3		6	
3	6		8		
		11			
4	17				

Δεύτερη παράγωγος - Παράδειγμα

Με το πολυώνυμο $\Delta - NG$ έχουμε

- Για $x_0 = 0$ έχουμε μέχρι Δ^4 διαφορές, άρα

$$f''(0) \simeq \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0\right] = -4 - 6 = -10$$

  με πραγματική τιμή $p''(0) = -10$

- Για $x_0 = 1$ έχουμε μέχρι Δ^3 διαφορές, άρα

$$f''(1) \simeq \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0\right] = 2 - 6 = -4$$

  με πραγματική τιμή $p''(1) = -4$

Δεύτερη παράγωγος - Παράδειγμα

- Για $x_0 = 2$ έχουμε μέχρι Δ^2 διαφορές, άρα

$$f''(2) \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0 = 8$$

  με πραγματική τιμή $p''(2) = 2$
- Για $x_0 = 3$ έχουμε μέχρι Δ^1 διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο.
- Για $x_0 = 4$ δεν έχουμε προς τα εμπρός διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο.

Δεύτερη παράγωγος - Παράδειγμα

Με το πολυώνυμο $\nabla - NG$ έχουμε

- Για $x_n = 0$ δεν έχουμε προς τα πίσω διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο.
- Για $x_n = 1$ έχουμε μέχρι ∇^1 διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο.
- Για $x_n = 2$ έχουμε μέχρι ∇^2 διαφορές, άρα

$$f''(2) \simeq \frac{1}{h^2}\nabla^2 f_n = -4$$

με πραγματική τιμή $p''(2) = 2$

Δεύτερη παράγωγος - Παράδειγμα

- Για $x_n = 3$ έχουμε μέχρι ∇^3 διαφορές, άρα

$$f''(3) \simeq \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n\right] = 2 + 6 = 8$$

με πραγματική τιμή $p''(3) = 8$

- Για $x_n = 4$ έχουμε μέχρι ∇^4 διαφορές, άρα

$$f''(4) \simeq \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n\right] = 8 + 6 = 14$$

με πραγματική τιμή $p''(4) = 14$