ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής, Υπολογιστών και Τηλεπικοινωνιών – Σέρρες

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Οκτώβριος 2019

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον
Έκτη Σειρά Διαφανειών

1. Πεπερασμένες Διαφορές
   - Προς τα εμπρός Διαφορές
   - Προς τα πίσω Διαφορές
   - Κεντρικές Διαφορές
2. Ιδιότητες των Διαφορών
3. Σφάλμα στις Διαφορές

Πεπερασμένες Διαφορές

Ορισμός

Έστω τα σημεία $(x_i, f(x_i))$ με $i = 0, 1, \ldots, n$. **Διαφορές πρώτης τάξης** είναι οι διάφορες των τιμών της συνάρτησης. **Διαφορές δεύτερης τάξης** είναι οι διάφορες των τιμών των διαφορών της πρώτης τάξης.
Γενικά, Διαφορές n τάξης είναι οι διαφορές των τιμών των διαφορών $n-1$ τάξης.

- Οι πεπερασμένες διαφορές διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:
  - Προς τα εμπρός Διαφορές
  - Προς τα πίσω Διαφορές
  - Κεντρικές Διαφορές

Πεπερασμένες Διαφορές

- Οι πεπερασμένες διαφορές διακρίνονται μπορούν να παρασταθούν εύκολα σε ένα πίνακα διαφορών.
- Η μέγιστη τάξη των διαφορών εξαρτάται από το πλήθος των σημείων. Δηλαδή, για $n+1$ σημεία θα υπολογίσουμε διαφορές έως n τάξης.
- Εφαρμογή σε
  - παρεμβολή, διαφορικές εξισώσεις, εξισώσεις διαφορών κ.α..
  - Εναλλαγή από τα διακριτά σε συνεχή συστήματα και το αντίστροφο.

Προς τα εμπρός Διαφορές

- Έστω τα σημεία (x_i, f_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Η προς τα εμπρός διαφορά της n θέσης ορίζεται ως η διαφορά της n θέσης από την $n+1$ θέση και συμβολίζεται με Δ.
- Επομένως, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Delta f_n &= f_{n+1} - f_n \\
\Delta^2 f_n &= \Delta f_{n+1} - \Delta f_n \\
&\vdots \\
\Delta^k f_n &= \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n
\end{aligned}
$$

Προς τα εμπρός Διαφορές

- Μπορούμε να εκφράσουμε τις προς τα εμπρός διαφορές με τις τιμές της συνάρτησης, δηλαδή,

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - f_{n+1} - (f_{n+1} - f_n) \Rightarrow$$

$$\Delta^2 f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$$

και

$$\Delta^3 f_n = \Delta^2 f_{n+1} - \Delta^2 f_n = \Delta f_{n+2} - \Delta f_{n+1} - (\Delta f_{n+1} - \Delta f_n) \Rightarrow$$
$$\Delta^3 f_n = f_{n+3} - f_{n+2} - (f_{n+2} - f_{n+1}) - \big(f_{n+2} - f_{n+1} - (f_{n+1} - f_n)\big) \Rightarrow$$

$$\Delta^3 f_n = f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n$$

Προς τα εμπρός Διαφορές

- ή ισοδύναμα δημιουργούμε πίνακα τιμών των διαφορών

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης	$4^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_{k-2}	f_{k-2}				
		Δf_{k-2}			
x_{k-1}	f_{k-1}		$\Delta^2 f_{k-2}$		
		Δf_{k-1}		$\Delta^3 f_{k-2}$	
x_k	f_k		$\Delta^2 f_{k-1}$		$\Delta^4 f_{k-2}$
		Δf_k		$\Delta^3 f_{k-1}$	
x_{k+1}	f_{k+1}		$\Delta^2 f_k$		
		Δf_{k+1}			
x_{k+2}	f_{k+2}				

Προς τα πίσω Διαφορές

- Έστω τα σημεία (x_i, f_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Η προς τα πίσω διαφορά της n θέσης ορίζεται ως η διαφορά της $n-1$ θέσης από την n θέση και συμβολίζεται με ∇.
- Επομένως, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\nabla f_n &= f_n - f_{n-1} \\
\nabla^2 f_n &= \nabla f_n - \nabla f_{n-1} \\
&\vdots \\
\nabla^k f_n &= \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}
\end{aligned}
$$

Προς τα πίσω Διαφορές

- Μπορούμε να εκφράσουμε τις προς τα πίσω διαφορές με τις τιμές της συνάρτησης, δηλαδή,

$$\nabla^2 f_n = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - f_{n-1} - (f_{n-1} - f_{n-2}) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

και

$$\nabla^3 f_n = \nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} - (\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2}) \Rightarrow$$
$$\nabla^3 f_n = f_n - f_{n-1} - (f_{n-1} - f_{n-2}) - \big(f_{n-1} - f_{n-2} - (f_{n-2} - f_{n-3})\big) \Rightarrow$$

$$\nabla^3 f_n = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

Προς τα πίσω Διαφορές

- ή ισοδύναμα δημιουργούμε πίνακα τιμών των διαφορών

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης	$4^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_{k-2}	f_{k-2}				
		∇f_{k-1}			
x_{k-1}	f_{k-1}		$\nabla^2 f_k$		
		∇f_k		$\nabla^3 f_{k+1}$	
x_k	f_k		$\nabla^2 f_{k+1}$		$\nabla^4 f_{k+2}$
		∇f_{k+1}		$\nabla^3 f_{k+2}$	
x_{k+1}	f_{k+1}		$\nabla^2 f_{k+2}$		
		∇f_{k+2}			
x_{k+2}	f_{k+2}				

Κεντρικές Διαφορές

- Έστω τα σημεία (x_i, f_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Οι κεντρικές διαφορές ορίζονται ως εξής:
  - για τις κεντρικές διαφορές περιττής τάξης, ως η διαφορά της n θέσης από την $n+1$ θέση και συμβολίζεται με δ στη θέση $n + \frac{1}{2}$
  - ενώ, για τις κεντρικές διαφορές άρτιας τάξης, ως η διαφορά της $n - \frac{1}{2}$ θέσης από την $n + \frac{1}{2}$ θέση και συμβολίζεται με δ στη θέση n

Κεντρικές Διαφορές

- Επομένως, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\delta f_{n+\frac{1}{2}} &= f_{n+1} - f_n \\
\delta^2 f_n &= \delta f_{n+\frac{1}{2}} - \delta f_{n-\frac{1}{2}} \\
&\vdots \\
\delta^{2k+1} f_{n+\frac{1}{2}} &= \delta^{2k} f_{n+1} - \delta^{2k} f_n \\
\delta^{2k+2} f_n &= \delta^{2k+1} f_{n+\frac{1}{2}} - \delta^{2k+1} f_{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Κεντρικές Διαφορές

- ή ισοδύναμα δημιουργούμε πίνακα τιμών των διαφορών

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης	$4^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_{k-2}	f_{k-2}				
		$\delta f_{k-\frac{3}{2}}$			
x_{k-1}	f_{k-1}		$\delta^2 f_{k-1}$		
		$\delta f_{k-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{k-\frac{1}{2}}$	
x_k	f_k		$\delta^2 f_k$		$\delta^4 f_k$
		$\delta f_{k+\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{k+\frac{1}{2}}$	
x_{k+1}	f_{k+1}		$\delta^2 f_{k+1}$		
		$\delta f_{k+\frac{3}{2}}$			
x_{k+2}	f_{k+2}				

Διαφορές - Παράδειγμα

- Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,3)$, $\Gamma(3,6)$ και $\Delta(4,17)$. Να υπολογιστούν οι προς τα εμπρός διαφορές, οι προς τα πίσω διαφορές και οι κεντρικές διαφορές των σημείων.

Ο πίνακας τιμών των παραπάνω σημείων είναι

i	0	1	2	3
x	1	2	3	4
y	2	3	6	17

Έχουμε 4 σημεία αρά θα υπολογίσουμε διαφορές μέχρι τρίτης τάξης.

Ιδιότητες των Διαφορών - Παράδειγμα

Οι προς τα εμπρός διαφορές θα είναι

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
1	2			
		$\Delta f_0 = 1$		
2	3		$\Delta^2 f_0 = 2$	
		$\Delta f_1 = 3$		$\Delta^3 f_0 = 6$
3	6		$\Delta^2 f_1 = 8$	
		$\Delta f_2 = 11$		
4	17			

Ιδιότητες των Διαφορών - Παράδειγμα

Οι προς τα πίσω διαφορές θα είναι

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
1	2			
		$\nabla f_1 = 1$		
2	3		$\nabla^2 f_2 = 2$	
		$\nabla f_2 = 3$		$\nabla^3 f_3 = 6$
3	6		$\nabla^2 f_3 = 8$	
		$\nabla f_3 = 11$		
4	17			

Ιδιότητες των Διαφορών - Παράδειγμα

Οι κεντρικές διαφορές θα είναι

x_i	f_i	δ	δ^2	δ^3
1	2			
		$\delta f_{\frac{1}{2}} = 1$		
2	3		$\delta^2 f_1 = 2$	
		$\delta f_{\frac{3}{2}} = 3$		$\delta^3 f_{\frac{3}{2}} = 6$
3	6		$\delta^2 f_2 = 8$	
		$\delta f_{\frac{5}{2}} = 11$		
4	17			

Σχέσεις μεταξύ των Διαφορών

Ορισμός (Σχέσεις μεταξύ των Διαφορών)

Η σχέση που συνδέει τα 3 είδη των διαφορών k τάξης είναι:

$$\Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+\frac{k}{2}}$$

Ορισμός (Τύπος Υπολογισμού Διαφορών)

$$\Delta^k f_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f_{k+i-j} \ , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ιδιότητες των Διαφορών

Theorem

Έστω ότι τα σημεία x_i με $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι ισαπέχοντα με βήμα h, δηλαδή,

$$x_{i+1} - x_i = h \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Για τις διαφορές n τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n ισχύει:

$$\Delta^n P(x) = p_n \cdot n! \cdot h^n$$

οι οποίες είναι σταθερές.

Theorem

Οι διαφορές $(n+1)$ και ανώτερης τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι ίσες με μηδέν.

Ιδιότητες των Διαφορών - Παράδειγμα

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας διαφορών για το πολυώνυμο
$$x^3 - 2x + 2$$
όταν δίνονται οι τιμές του για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Ο πίνακας τιμών των παραπάνω σημείων είναι

x	0	1	2	3	4	5
y	2	1	6	23	58	117

Έχουμε 6 σημεία αρά θα υπολογίσουμε διαφορές μέχρι πέμπτης τάξης.

Ιδιότητες των Διαφορών - Παράδειγμα

x_i	f_i	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	2					
		-1				
1	1		6			
		5		6		
2	6		12		0	
		17		6		0
3	23		18		0	
		35		6		
4	58		24			
		59				
5	117					

Ιδιότητες των Διαφορών - Παράδειγμα

Από τον τύπο

$$\Delta^n P(x) = p_n \cdot n! \cdot h^n$$

έχουμε

$$p_n = \frac{\Delta^n P(x)}{n! \cdot h^n} = \frac{6}{3! \cdot 1^3} = 1$$

Μετάδοση Σφάλματος

- Μετάδοση σφάλματός στις προς τα εμπρός διαφορές
- Έστω ε ένα μεμονωμένο σφάλμα σε κάποια τιμή της f.

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης	$4^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_{k-2}	f_{k-2}		$\Delta^2 f_{k-3}$		$\Delta^4 f_{k-4} + \varepsilon$
		Δf_{k-2}		$\Delta^3 f_{k-3} + \varepsilon$	
x_{k-1}	f_{k-1}		$\Delta^2 f_{k-2} + \varepsilon$		$\Delta^4 f_{k-3} - 4\varepsilon$
		$\Delta f_{k-1} + \varepsilon$		$\Delta^3 f_{k-2} - 3\varepsilon$	
x_k	$f_k + \varepsilon$		$\Delta^2 f_{k-1} - 2\varepsilon$		$\Delta^4 f_{k-2} + 6\varepsilon$
		$\Delta f_k - \varepsilon$		$\Delta^3 f_{k-1} + 3\varepsilon$	
x_{k+1}	f_{k+1}		$\Delta^2 f_k + \varepsilon$		$\Delta^4 f_{k-1} - 4\varepsilon$
		Δf_{k+1}		$\Delta^3 f_k - \varepsilon$	
x_{k+2}	f_{k+2}		$\Delta^2 f_{k+1}$		$\Delta^4 f_k + \varepsilon$

Μετάδοση Σφάλματος

ή πιο συνοπτικά αν X η σωστή τιμή κάθε διαφοράς και ε το μεμονωμένο σφάλμα

x_i	f_i	$1^{\eta\varsigma}$ τάξης	$2^{\eta\varsigma}$ τάξης	$3^{\eta\varsigma}$ τάξης	$4^{\eta\varsigma}$ τάξης
x_{k-2}	X		X		$X+\varepsilon$
		X		$X+\varepsilon$	
x_{k-1}	X		$X+\varepsilon$		$X-4\varepsilon$
		$X+\varepsilon$		$X-3\varepsilon$	
x_k	$X+\varepsilon$		$X-2\varepsilon$		$X+6\varepsilon$
		$X-\varepsilon$		$X+3\varepsilon$	
x_{k+1}	X		$X+\varepsilon$		$X-4\varepsilon$
		X		$X-\varepsilon$	
x_{k+2}	X		X		$X+\varepsilon$

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 1

- Δίνεται ο πίνακας τιμών της $f(x)$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	3	6	11

  Να υπολογιστεί το μεμονωμένο σφάλμα ε το οποίο υπάρχει στην τιμή $f(1)$ εάν γνωρίζουμε ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Εφόσον η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, οι διαφορές δεύτερης τάξης θα είναι ίσες μεταξύ τους και οι διαφορές τρίτης τάξης και μεγαλύτερες θα είναι ίσες με το μηδέν.

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 1

Υπολογίζουμε τις προς τα εμπρός διαφορές και την μετάδοση του σφάλματος (κόκκινο)

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	3				
		1			
1	4		-2		
		-1		6	
2	3		4		-8
		3		-2	
3	6		2		
		5			
4	11				

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 1

Γνωρίζουμε ότι σε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$\Delta^2 f_i = c$$

επομένως, από την διαφορά $\Delta^2 f_2 = 2$ που δεν έχει σφάλμα έχουμε $c = 2$.
Ενώ, για τις άλλες διαφορές έχουμε

$$\Delta^2 f_1 = c + \varepsilon \Rightarrow 4 = 2 + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 2$$

και

$$\Delta^2 f_0 = c - 2\varepsilon \Rightarrow -2 = 2 - 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 2$$

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 1

Επίσης, γνωρίζουμε ότι σε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$\Delta^3 f_i = 0$$

επομένως, για τις άλλες διαφορές έχουμε

$$\Delta^3 f_0 = 0 + 3\varepsilon \Rightarrow 6 = 0 + 3\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 2$$

και

$$\Delta^3 f_1 = 0 - \varepsilon \Rightarrow -2 = 0 - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 2$$

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 2

- Δίνεται ο πίνακας τιμών της $f(x)$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	11	6	7	2	3	6	11

  Να υπολογιστεί το μεμονωμένο σφάλμα ε, εάν γνωρίζουμε ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Εφόσον η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, οι διαφορές δεύτερης τάξης θα είναι ίσες μεταξύ τους και οι διαφορές τρίτης τάξης και μεγαλύτερες θα είναι ίσες με το μηδέν.

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 2

Υπολογίζουμε τις προς τα εμπρός διαφορές

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
-2	11			
		-5		
-1	6		6	
		1		-12
0	7		-6	
		-5		12
1	2		6	
		1		-4
2	3		2	
		3		0
3	6		2	
		5		
4	11			

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 2

Γνωρίζουμε ότι σε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$\Delta^3 f_i = 0$$

επομένως, για τις άλλες διαφορές έχουμε

$$\Delta^3 f_2 = 0 - \varepsilon \Rightarrow -4 = 0 - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 4$$

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 3

- Δίνεται ο πίνακας τιμών της $f(x)$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	11	6	2	5	3	6	11

  Να υπολογιστούν τα σφάλματα ε_1 και ε_2, τα οποία υπάρχουν στις τιμές $f(0)$ και $f(1)$ αντίστοιχα, εάν γνωρίζουμε ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Εφόσον η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, οι διαφορές δεύτερης τάξης θα είναι ίσες μεταξύ τους και οι διαφορές τρίτης τάξης και μεγαλύτερες θα είναι ίσες με το μηδέν.

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 3

Υπολογίζουμε τις προς τα εμπρός διαφορές

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
-2	11			
		-5		
-1	6		1	
		-4		6
0	2		7	
		3		-12
1	5		-5	
		-2		10
2	3		5	
		3		-3
3	6		2	
		5		
4	11			

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 3

Γνωρίζουμε ότι σε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$\Delta^2 f_i = c$$

επομένως,

$$\Delta^2 f_4 = 2 \Rightarrow c = 2$$

άρα,

$$\Delta^2 f_0 = c + \varepsilon_1 \Rightarrow 1 = 2 + \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = -1$$

και

$$\Delta^2 f_3 = c + \varepsilon_2 \Rightarrow 5 = 2 + \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = 3$$

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 4

- Δίνεται ο πίνακας τιμών της $f(x)$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	2	2	5	6

  Να υπολογιστούν τα σφάλματα ε_1 και ε_2, τα οποία υπάρχουν στις τιμές $f(0)$ και $f(2)$ αντίστοιχα, εάν γνωρίζουμε ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Εφόσον η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, οι διαφορές δεύτερης τάξης θα είναι ίσες μεταξύ τους και οι διαφορές τρίτης τάξης και μεγαλύτερες θα είναι ίσες με το μηδέν.

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 4

Υπολογίζουμε τις προς τα εμπρός διαφορές

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	6			
		-4		
0	2		4	
		0		-1
1	2		3	
		3		-5
2	5		-2	
		1		
3	6			

Μετάδοση Σφάλματος - Παράδειγμα 4

Γνωρίζουμε ότι σε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$\Delta^3 f_i = 0$$

επομένως,

$$\Delta^3 f_0 = 0 + 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow -1 = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

και

$$\Delta^3 f_1 = 0 - \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 \Rightarrow -5 = -\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2$$

από τα οποία θα έχουμε

$$\varepsilon_1 = -1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 = 2$$