ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής, Υπολογιστών και Τηλεπικοινωνιών – Σέρρες

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Οκτώβριος 2019

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον
Πέμπτη Σειρά Διαφανειών

1. Παρεμβολή

2. Πολυωνυμική Παρεμβολή
   - Γενική μέθοδος
   - Πολυώνυμο Taylor
   - Πολυώνυμο Παρεμβολής Lagrange
   - Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton
   - Παρεμβολή με τμηματικά Πολυώνυμα
     - Γραμμικά Splines
     - Κυβικά Splines

Εισαγωγή

Ορισμός

Παρεμβολή είναι το πρόβλημα προσαρμογής μιας κατάλληλης και εύχρηστης συνάρτησης f σε ένα σύνολο σημείων ή στις τιμές μιας συνάρτησης g, έτσι ώστε η συνάρτηση f να έχει τις ίδιες τιμές με τις αντίστοιχες τιμές των δεδομένων ή με τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης g. Δηλαδή, για τα σημεία (x_i, y_i) με $i = 0, 1, \ldots, n$ να ισχύει $f(x_i) = y_i$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$ ή $f(x_i) = g(x_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Εφαρμογή σε πολλά επιστημονικά πεδία
  - Προβλήματα φυσικής
  - Προβλήματα μηχανικής
  - Οικονομικά προβλήματα

Εισαγωγή

- Μέθοδοι Παρεμβολής
  - Πολυωνυμική
    - Η παρεμβαλλόμενη συνάρτηση έχει μόνο πολυωνυμικούς όρους.
  - Τριγωνομετρική
    - Η παρεμβαλλόμενη συνάρτηση έχει μόνο τριγωνομετρικούς όρους.
  - Εκθετική
    - Η παρεμβαλλόμενη συνάρτηση έχει μόνο εκθετικούς όρους.
  - Μεικτή
    - Η παρεμβαλλόμενη συνάρτηση έχει οποιουδήποτε τύπου όρους.

Πολυωνυμική Παρεμβολή

- Γενική μέθοδος.
- Πολυώνυμο Taylor.
- Παρεμβολή με πολυώνυμα Lagrange.
- Παρεμβολή με το πολυώνυμο Newton.
- Παρεμβολή με τμηματικά πολυώνυμα (Splines).

Πολυωνυμική Παρεμβολή - Γενική μέθοδος

- Εύρεση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (πολυώνυμο παρεμβολής) η οποία να διέρχεται από ένα σύνολο γνωστών σημείων (Σημεία παρεμβολής).
- Αν ο αριθμός των σημείων είναι $n+1$ τότε το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι n βαθμού και το ζητούμενο πολυώνυμο είναι μοναδικό.

Γενική μέθοδος

- Έστω το πολυώνυμο n βαθμού

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

  το οποίο διέρχεται από τα σημεία (x_i, y_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Επαληθεύουμε τα σημεία στο πολυώνυμο και έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0 \\
a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 &= y_1 \\
&. \\
&. \\
a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 &= y_n
\end{aligned}$$

Γενική μέθοδος

- Δημιουργήσαμε ένα σύστημα με $n+1$ εξισώσεις και $n+1$ αγνώστους.
- Άγνωστοι του συστήματος είναι οι συντελεστές a_i του πολυωνύμου.
- Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

  ο οποίος ονομάζεται πίνακας *Vandermonde*.
- Το σύστημα έχει λύση

$$a = V^{-1} \cdot y$$

Γενική μέθοδος

Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$V = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$V = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

και ονομάζεται *ορίζουσα Vandermonde*. Το σύστημα έχει πάντα λύση.

Γενική μέθοδος - Παράδειγμα

- Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(3,6)$. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής το οποίο διέρχεται από τα παραπάνω σημεία (με τη γενική μέθοδο).

Έχουμε 3 σημεία αρά θα βρούμε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ($n = 2$).
Υπολογισμός του πίνακα Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1^2 & 1^1 & 1 \\ 2^2 & 2^1 & 1 \\ 3^2 & 3^1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Γενική Μέθοδος - Παράδειγμα

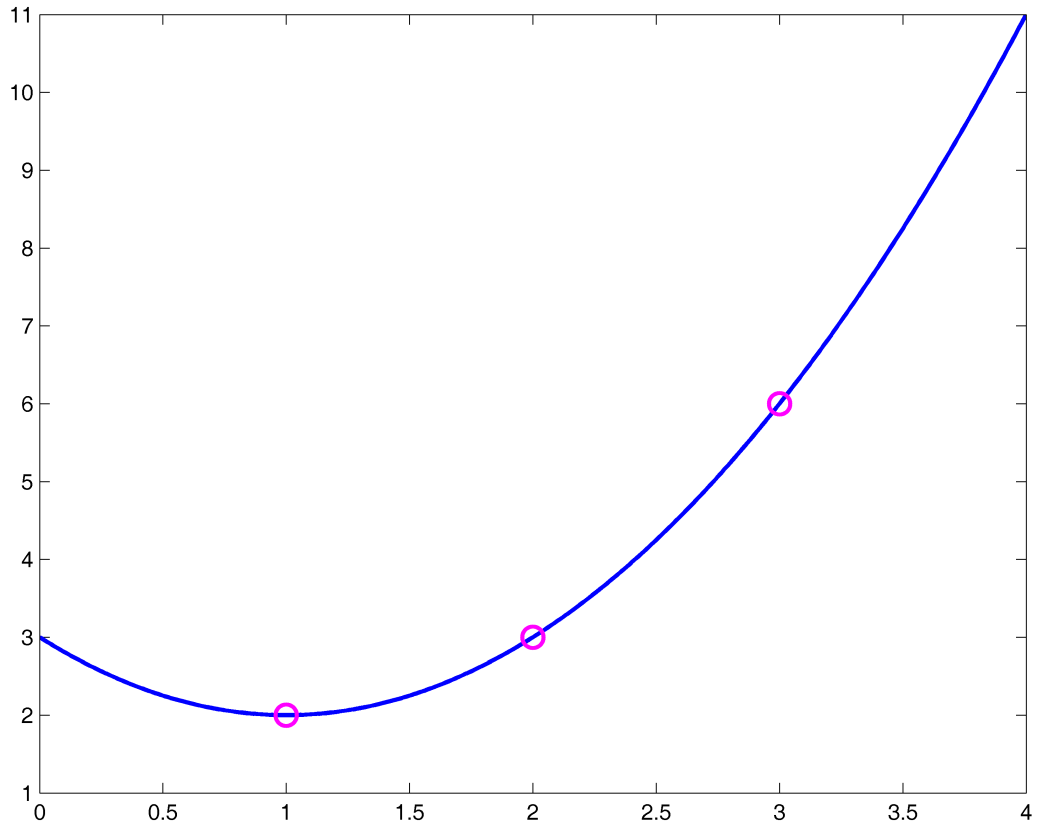
Υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνύμου

$$a = V^{-1} \cdot y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

τα οποία είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου παρεμβολής, δηλαδή,

$$p(x) = x^2 - 2x + 3$$

Γενική Μέθοδος - Παράδειγμα



Σχήμα: Το πολυώνυμο παρεμβολής που διέρχεται από τα σημεία παρεμβολής.

Πολυώνυμο Taylor

- Το πολυώνυμο Taylor είναι ένα πολυώνυμο το οποίο παρεμβάλλει μια συνάρτηση f γύρω από ένα σημείο x_0.
- Το πολυώνυμο Taylor δίνεται από τον τύπο

$$T_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} T_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + \\ + f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!} + \ldots \end{aligned}$$

Πολυώνυμο Taylor - Σφάλμα

- Το πολυώνυμο Taylor $T_k(x)$ έχει ως ανώτατο σφάλμα την μέγιστη τιμή του όρου $(k+1)$.
- Δηλαδή,

$$E_k(x) = T_{k+1}(x) - T_k(x) = f^{(k+1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \Leftrightarrow$$

$$E_k(x) = \left| f^{(k+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \right|$$

με $\xi \in (x_0, x)$

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Taylor $T_3(x)$ για την συνάρτηση
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$$
στο σημείο $x_0 = 0$.
- Να προσεγγίσετε την ποσότητα $\sqrt{1.1}$ με τη βοήθεια του πολυωνύμου $T_3(x)$ και να υπολογίσετε το άνω φράγμα του σφάλματος $E_3(x)$.

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα

Υπολογίζουμε τις παραγώγους και τις αντίστοιχες τιμές τους στο x_0

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$$

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα

Το πολυώνυμο Taylor $T_3(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + f^{(3)}(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} \\
T_3(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + f''(0)\frac{(x - 0)^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{(x - 0)^3}{3!} \\
T_3(x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3
\end{aligned}
$$

Επομένως, η τιμή $\sqrt{1.1}$ θα ισούται

$$\sqrt{1.1} = f(0.1) \simeq T_3(0.1) = 1.0488125$$

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα

Το πολυώνυμο Taylor $T_3(x)$ έχει ως ανώτατο σφάλμα

$$E_3(x) = \left| f^{(4)}(\xi) \frac{(x - x_0)^4}{4!} \right| = \left| f^{(4)}(\xi) \frac{(x - 0)^4}{24} \right| = \left| f^{(4)}(\xi) \frac{x^4}{24} \right|$$

με $\xi \in (0, x)$.
Επομένως, για τον υπολογισμό της τιμής $\sqrt{1.1}$ το σφάλμα θα ισούται

$$E_3(0.1) = \left| f^{(4)}(\xi) \frac{0.1^4}{24} \right| \leq 3.91 \times 10^{-6}$$

διότι,

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1 + x)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16\sqrt{1 + x}^7}$$

με

$$\left| f^{(4)}(\xi) \right| = \max_{x \in [0, 0.1]} \left| f^{(4)}(x) \right| \overset{x=0}{=} \frac{15}{16}$$

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα

Αν με το πολυώνυμο Taylor $T_3(x)$ υπολογίσουμε τιμές οι οποίες απομακρύνονται από το x_0 έχουμε

$$\sqrt{2} = f(1) \simeq T_3(1) = 1.4375 \quad \text{με} \quad \sqrt{2} = 1.4142135623731$$

και

$$\sqrt{3} = f(2) \simeq T_3(2) = 2 \quad \text{με} \quad \sqrt{3} = 1.73205080756888$$

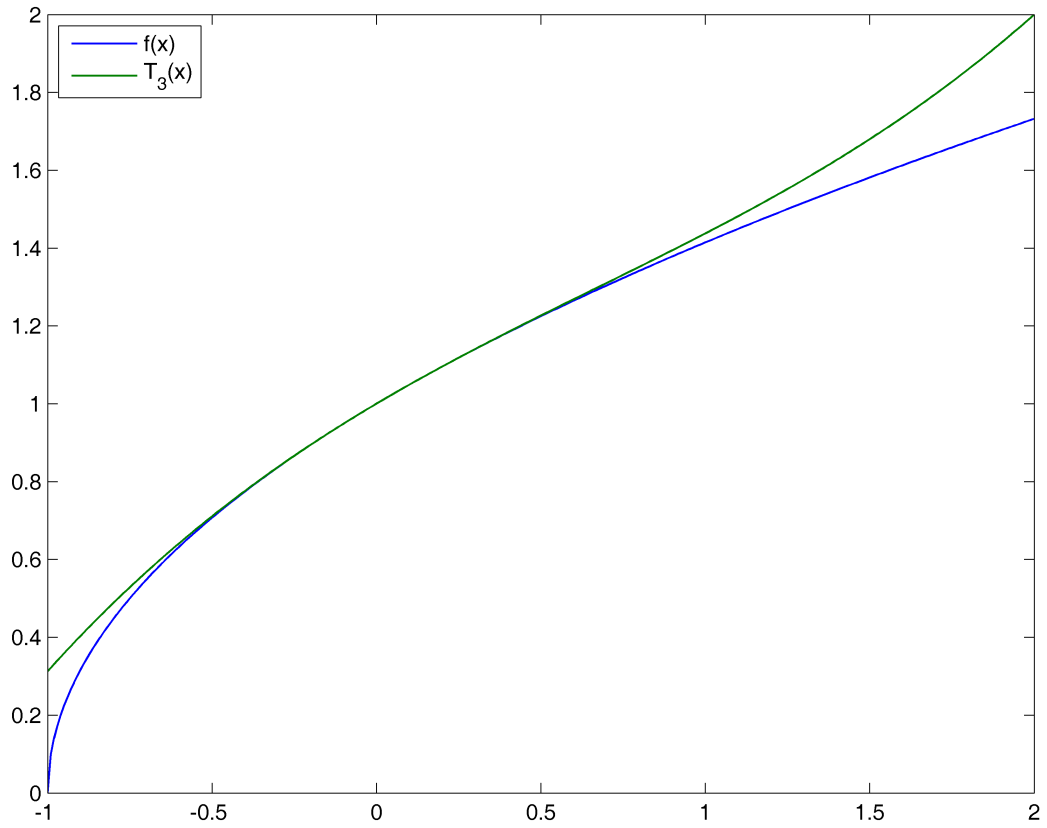
και αντίστοιχα

$$E_3(1) = \left| f^{(4)}(\xi) \frac{1^4}{24} \right| \leq 0.0390625$$

και

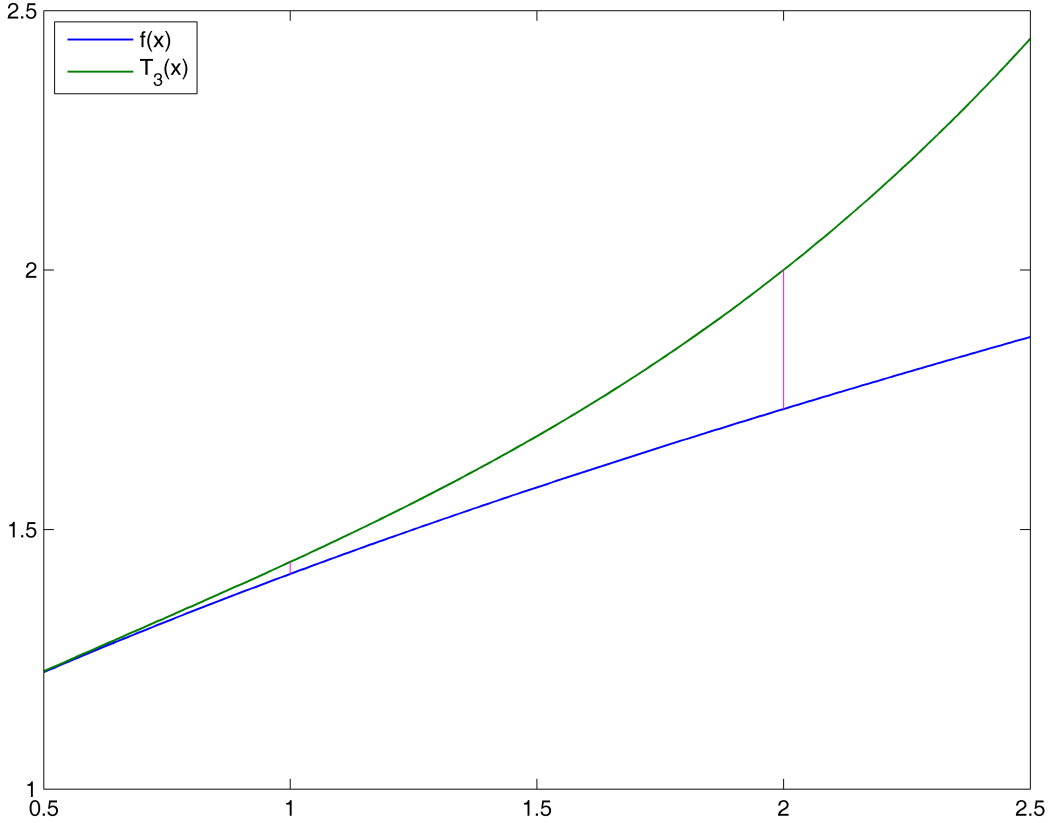
$$E_3(2) = \left| f^{(4)}(\xi) \frac{2^4}{24} \right| \leq 0.625$$

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα



Σχήμα: Γραφική παράσταση του πολυωνύμου Taylor και της συνάρτησης γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα



Σχήμα: Σφάλμα μεταξύ των τιμών $f(1)$ με $T_3(1)$ και $f(2)$ με $T_3(2)$.

Πολυώνυμο Taylor - Παράδειγμα

Ενώ, αν υπολογίσουμε το πολυώνυμο Taylor $T_3(x)$ με $x_0 = 3$ έχουμε

$$f(3) = 2,\ f'(3) = \frac{1}{4},\ f''(3) = -\frac{1}{32},\ f^{(3)}(3) = \frac{3}{256}$$

το πολυώνυμο θα γίνει

$$Q_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{64}(x-3)^2 + \frac{1}{512}(x-3)^3$$

επομένως,

$$\sqrt{3} = f(2) \simeq Q_3(2) = 1.732421875 \quad \text{με} \quad \sqrt{3} = 1.73205080756888$$

και

$$E_3(2) = \left| f^{(4)}(\xi)\frac{1^4}{24} \right| \leq 0.0390625$$

Πολυώνυμο Taylor - Εφαρμογές

- Τιμές εκθετικής συνάρτησης με $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

- Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων με $x_0 = 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Πολυώνυμο Παρεμβολής Lagrange

- Έστω τα σημεία (x_i, y_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Τα πολυώνυμα Lagrange δίνονται από τον τύπο

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \end{aligned}$$

- και το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange δίνεται από τον τύπο

$$P_n^L(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right]$$

Πολυώνυμο Παρεμβολής Lagrange

- ή ισοδύναμα

$$
\begin{aligned}
P_n^L(x) &= \sum_{i=0}^{n} [y_i \cdot L_i(x)] \\
P_n^L(x) &= y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \ldots + y_n \cdot L_n(x)
\end{aligned}
$$

- με σφάλμα για την παρεμβαλλόμενη τιμή x^*

$$
E(x^*) = f(x^*) - P_n^L(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x^* - x_i)
$$

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα

- Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
να υπολογιστεί το πολυώνυμο $P_2^L(x)$ στα σημεία παρεμβολής $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$.

Ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f για τα παραπάνω σημεία είναι

i	0	1	2
x	2	2.5	4
y	$f(2) = \frac{1}{2}$	$f(2.5) = \frac{2}{5}$	$f(4) = \frac{1}{4}$

Έχουμε 3 σημεία αρά θα βρούμε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ($n = 2$).

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα

Υπολογίζουμε τα πολυώνυμα L_i

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} \\
&= \frac{1}{2}(2x^2-13x+20) \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} \\
&= \frac{1}{3}(-4x^2+24x-32) \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} \\
&= \frac{1}{6}(2x^2-9x+10)
\end{aligned}
$$

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα

Επομένως, το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι

$$P_2^L(x) = \sum_{i=0}^{2} [y_i \cdot L_i(x)] = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x)$$

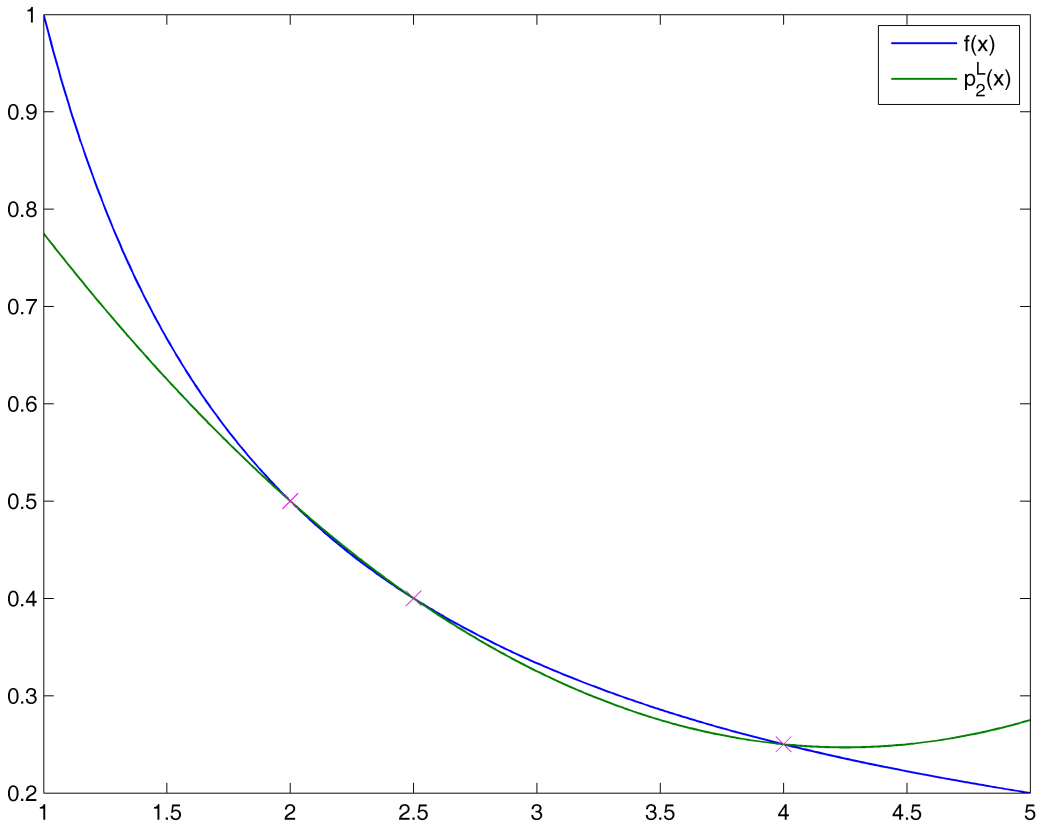
δηλαδή,

$$P_2^L(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2x^2 - 13x + 20) + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}(2x^2 - 9x + 10)$$

Άρα,

$$P_2^L(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα



Σχήμα: Γραφική παράσταση του πολυωνύμου Lagrange και της συνάρτησης f.

Πολυώνυμο Lagrange - Εφαρμογές

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση f με το πολυώνυμο παρεμβολής $P_2^L(x)$ στα σημεία παρεμβολής $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$ μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά

- παρεμβαλλόμενες τιμές της f
- παρεμβαλλόμενες τιμές της παραγώγου της f
- την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος

Για παράδειγμα

$$f(3) \simeq P_2^L(3) = 0.325 \quad \text{με} \quad f(3) = 0.333333$$

επίσης

$$f'(3) \simeq \left(P_2^L(3)\right)' = -0.125 \quad \text{με} \quad f(3) = -0.111111$$

και

$$\int_{1.5}^{3} f(x)dx \simeq \int_{1.5}^{3} P_2^L(x)dx = 0.684375 \quad \text{με} \quad \int_{1.5}^{3} f(x)dx = ln(2)$$

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα (2)

- Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(3,6)$. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange το οποίο διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

Ο πίνακας τιμών των παραπάνω σημείων είναι

i	0	1	2
x	1	2	3
y	2	3	6

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα (2)

Υπολογίζουμε τα πολυώνυμα L_i

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \\
&= \frac{x^2-5x+6}{2} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \\
&= \frac{x^2-4x+3}{-1} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\
&= \frac{x^2-3x+2}{2}
\end{aligned}
$$

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα (2)

Επομένως, το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι

$$P_2^L(x) = \sum_{i=0}^{2} [y_i \cdot L_i(x)] = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x)$$

δηλαδή,

$$P_2^L(x) = 2 \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{2} + 3 \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{-1} + 6 \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

Άρα,

$$P_2^L(x) = x^2 - 2x + 3$$

Πολυώνυμο Lagrange - Παράδειγμα (2)

- Στο Παράδειγμα (2) αντικαταστήσαμε τα διακριτά σημεία με μια πολυωνυμική συνάρτηση μέσω της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε
  - Παρεμβαλλόμενες τιμές
  - Την παράγωγο σε παρεμβαλλόμενες τιμές
  - Το ορισμένο ολοκλήρωμα σε παρεμβαλλόμενο διάστημα

Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton

- Έστω τα σημεία (x_i, y_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Το πολυώνυμο Newton δίνεται από τον τύπο

$$P_n^N(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x_2] + \\ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

- Οι διηρημένες διαφορές $f[.]$ υπολογίζονται αναδρομικά από τους τύπους

$$\begin{aligned} f[x_i, x_j] &= \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i} \\ f[x_i, x_j, x_k] &= \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \end{aligned}$$

Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton

- ή ισοδύναμα δημιουργούμε πίνακα τιμών των διηρημένων διαφορών

x_0	f_0			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$		
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	f_3			

Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton

- Το πολυώνυμο παρεμβολής Newton έχει τα εξής χαρακτηριστικά:
  - Οι διηρημένες διαφορές είναι ο πιο αποδοτικός τρόπος για να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής.
  - Οι διηρημένες διαφορές είναι ανεξάρτητες από τα παρεμβαλλόμενα x, συνεπώς, οι υπολογισμοί πολλών παρεμβαλλόμενων τιμών είναι πιο εύκολη.
  - Η προσθήκη νέων τιμών για των υπολογισμό των διηρημένων διαφορών δεν επηρεάζει τις ήδη υπολογισμένες τιμές.

Πολυώνυμο Newton - Παράδειγμα

- Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(3,6)$. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton το οποίο διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

Ο πίνακας τιμών των παραπάνω σημείων είναι

i	0	1	2
x	1	2	3
y	2	3	6

Έχουμε 3 σημεία αρά θα βρούμε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ($n = 2$).

Πολυώνυμο Newton - Παράδειγμα

Δημιουργούμε τον πίνακα τιμών των διηρημένων διαφορών

x_0	f_0		
		$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$	
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$	
x_2	f_2		

δηλαδή,

1	2		
		$\frac{3-2}{2-1} = 1$	
2	3		$\frac{3-1}{3-1} = 1$
		$\frac{6-3}{3-2} = 3$	
3	6		

Πολυώνυμο Newton - Παράδειγμα

Επομένως, το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι

$$P_2^N(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x_2]$$

δηλαδή,

$$P_2^N(x) = 2 + (x - 1) \cdot 1 + (x - 1)(x - 2) \cdot 1$$

Άρα,

$$P_2^N(x) = x^2 - 2x + 3$$

Πολυώνυμο Newton - Παράδειγμα (2)

- Στο προηγούμενο παράδειγμα εισάγουμε ένα ακόμη σημείο παρεμβολής, $\Delta(4, 17)$. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton το οποίο διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

Ο πίνακας τιμών των παραπάνω σημείων είναι

i	0	1	2	3
x	1	2	3	4
y	2	3	6	17

Έχουμε 4 σημεία αρά θα βρούμε πολυώνυμο τρίτου βαθμού ($n = 3$).

Πολυώνυμο Newton - Παράδειγμα (2)

Δημιουργούμε τον πίνακα τιμών των διηρημένων διαφορών

1	2			
		$\frac{3-2}{2-1} = 1$		
2	3		$\frac{3-1}{3-1} = 1$	
		$\frac{6-3}{3-2} = 3$		$\frac{4-1}{4-1} = 1$
3	6		$\frac{11-3}{4-2} = 4$	
		$\frac{17-6}{4-3} = 11$		
4	17			

Πολυώνυμο Newton - Παράδειγμα (2)

Επομένως, το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι

$$P_3^N(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x_2] + \\ + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

δηλαδή,

$$P_3^N(x) = 2 + (x - 1) \cdot 1 + (x - 1)(x - 2) \cdot 1 + (x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot 1$$

Άρα,

$$P_3^N(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 3$$

Παρεμβολή με τμηματικά Πολυώνυμα

- Η παρεμβολή με τμηματικά πολυώνυμα (Splines) βασίζεται στην παρεμβολή ανά δύο διαδοχικών παρεμβαλλόμενων σημείων.
- Η παρεμβολή με τμηματικά πολυώνυμα υλοποιείται κυρίως με δυο τρόπους:
  - Με τα γραμμικά τμηματικά πολυώνυμα (Γραμμικά Splines).
  - Με τα κυβικά τμηματικά πολυώνυμα (Cubic Splines).

Γραμμικά Splines

- Έστω τα σημεία (x_i, y_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Τα σημεία μπορεί να προέρχονται, είτε από μεμονωμένες δειγματοληπτικές τιμές, είτε από μια συνάρτηση f οπού θα ισχύει $f(x_i) = y_i$.
- Τα γραμμικά Splines δίνονται από τον τύπο

$$S_k(x) = y_k + d_k \cdot (x - x_k) \quad \text{με} \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

και $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Όπου

$$d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Γραμμικά Splines

- Πιο αναλυτικά τα γραμμικά Splines μπορούμε να τα γράψουμε

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + d_0 \cdot (x - x_0) & \text{με} \quad x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + d_1 \cdot (x - x_1) & \text{με} \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \quad \vdots \\ y_{n-1} + d_{n-1} \cdot (x - x_{n-1}) & \text{με} \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

- Για τα γραμμικά Splines ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$S(x_i) = y_i \text{ ή } S(x_i) = f(x_i)$$

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

Γραμμικά Splines - Παράδειγμα

- Έστω ο πίνακας τιμών

x	0	1	2	3
y	0	0.5	2	1.5

Να βρεθεί το γραμμικό Spline το οποίο αντιστοιχεί στα παραπάνω σημεία.

Αρχικά, υπολογίζουμε τα d_k για $k = 0, 1, 2$ επομένως,

$$d_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.5 - 0}{1 - 0} = 0.5\,,\ d_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0.5}{2 - 1} = 1.5$$

και

$$d_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{1.5 - 2}{3 - 2} = -0.5$$

Γραμμικά Splines - Παράδειγμα

Έπειτα, υπολογίζουμε το $S(x)$, επομένως

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + d_0 \cdot (x - x_0) & \text{με} \quad x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + d_1 \cdot (x - x_1) & \text{με} \quad x \in [x_1, x_2] \\ y_2 + d_2 \cdot (x - x_2) & \text{με} \quad x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

δηλαδή,

$$S(x) = \begin{cases} 0 + 0.5 \cdot (x - 0) & \text{με} \quad x \in [0, 1] \\ 0.5 + 1.5 \cdot (x - 1) & \text{με} \quad x \in [1, 2] \\ 2 - 0.5 \cdot (x - 2) & \text{με} \quad x \in [2, 3] \end{cases}$$

άρα

$$S(x) = \begin{cases} 0.5x & \text{με} \quad x \in [0, 1] \\ 1.5x - 1 & \text{με} \quad x \in [1, 2] \\ -0.5x + 3 & \text{με} \quad x \in [2, 3] \end{cases}$$

Γραμμικά Splines - Εφαρμογές

- Με τα γραμμικά Splines μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά
  - παρεμβαλλόμενες τιμές της f,
  - παρεμβαλλόμενες τιμές της παραγώγου της f εκτός από τα σημεία στα άκρα των διαστημάτων,
  - την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος.

Για παράδειγμα

$$f(0.5) \simeq S_0(0.5) = 0.25$$

επίσης

$$f'(1.5) \simeq S_1'(1.5) = 1.5$$

και

$$\int_{0.5}^{1.5} f(x)dx \simeq \int_{0.5}^{1} S_0(x)dx + \int_{1}^{1.5} S_1(x)dx = 0.625$$

Κυβικά Splines

- Έστω τα σημεία (x_i, y_i) με $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
- Τα σημεία μπορεί να προέρχονται, είτε από μεμονωμένες δειγματοληπτικές τιμές, είτε από μια συνάρτηση f οπού θα ισχύει $f(x_i) = y_i$.
- Τα κυβικά Splines δίνονται από τον τύπο

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{με} \quad x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & \text{με} \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \qquad \vdots \\ S_{n-1}(x) & \text{με} \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

με $S_i(x)$ πολυώνυμα τρίτου βαθμού.

Κυβικά Splines

- Για τα κυβικά Splines ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$
\begin{aligned}
S(x_i) &= f(x_i) \\
S_i(x_{i+1}) &= S_{i+1}(x_{i+1}) \\
S_i'(x_{i+1}) &= S_{i+1}'(x_{i+1}) \\
S_i''(x_{i+1}) &= S_{i+1}''(x_{i+1})
\end{aligned}
$$

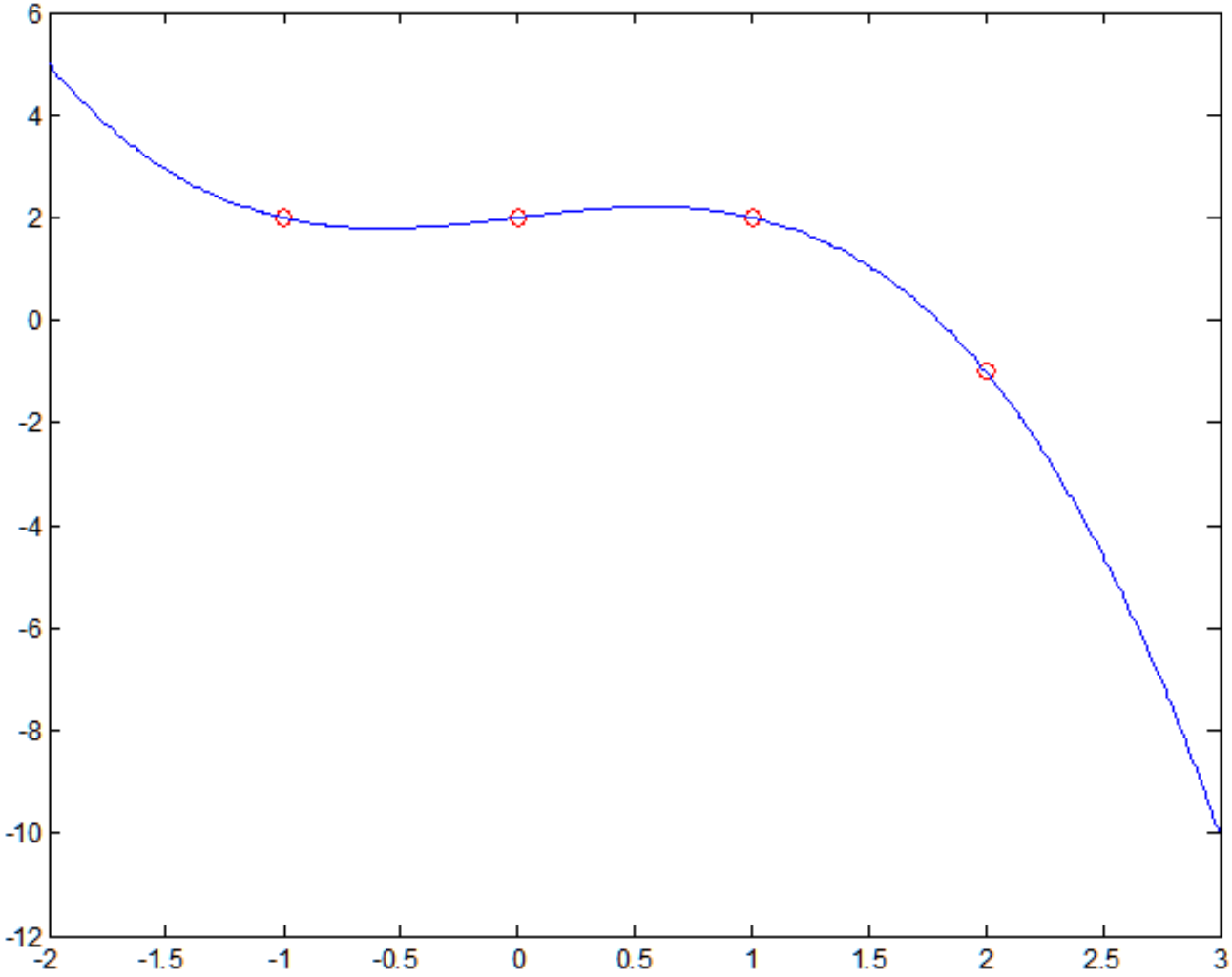
και στα άκρα του διαστήματος μια από τις δυο συνοριακές συνθήκες

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad \text{ή} \quad S'(x_0) = f'(x_0) \wedge S'(x_n) = f'(x_n)$$

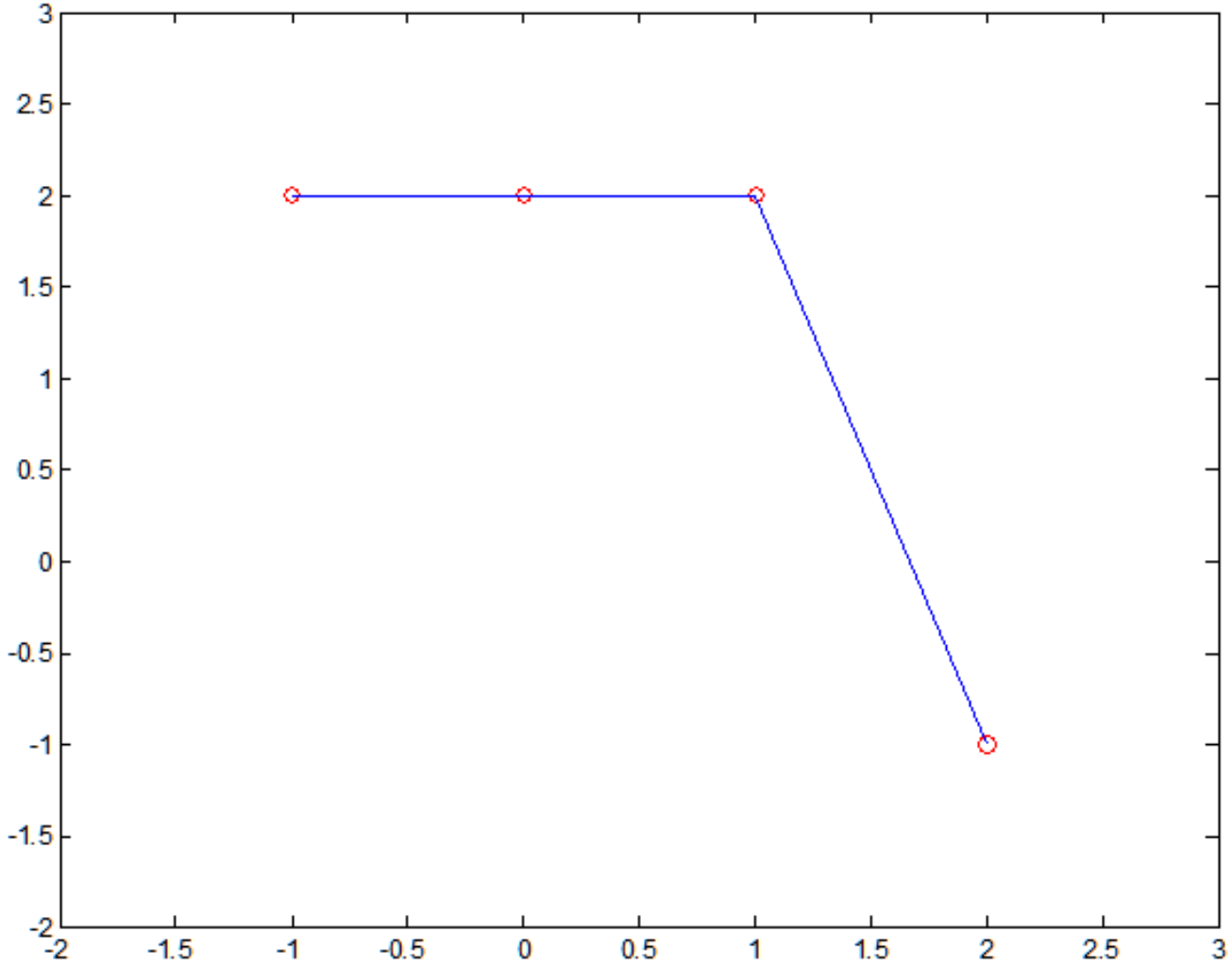
Παρεμβολή

- $x = [-1\ 0\ 1\ 2]$
- $y = [2\ 2\ 2\ -1]$
- Παρεμβολή με πολυώνυμο τρίτου βαθμού
- Παρεμβολή με γραμμικά spline
- Παρεμβολή με κυβικά spline

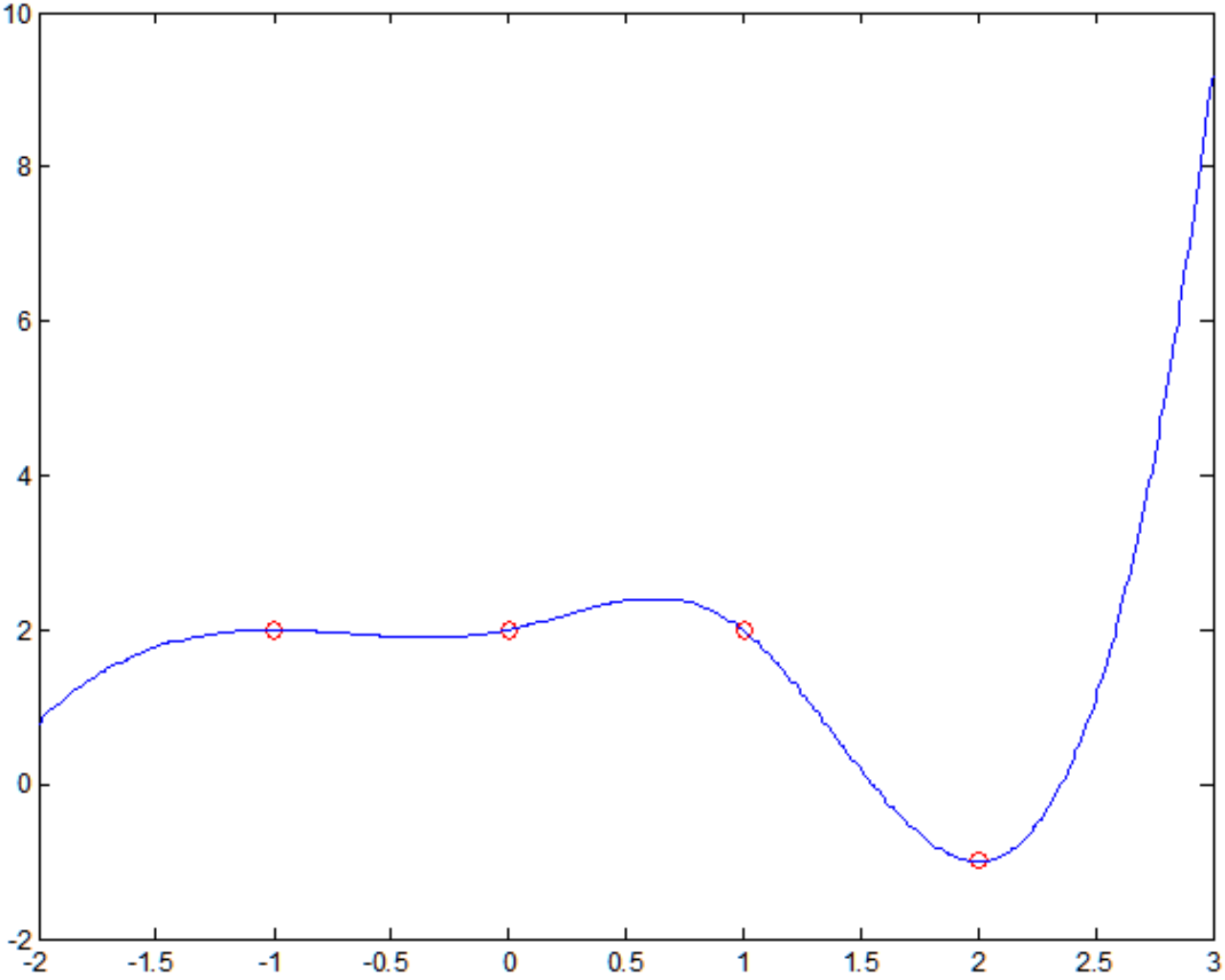
Παρεμβολή



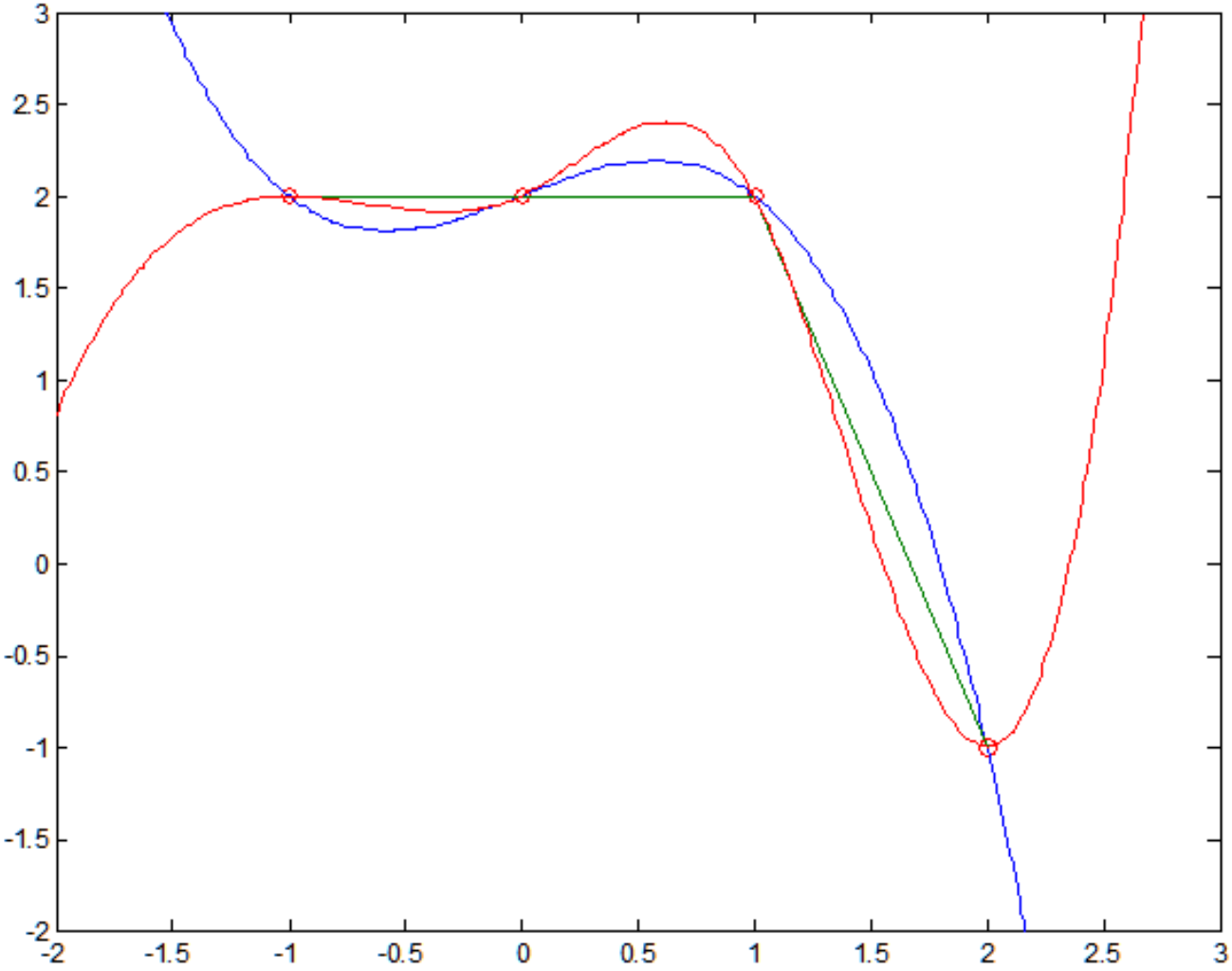
Παρεμβολή



Παρεμβολή



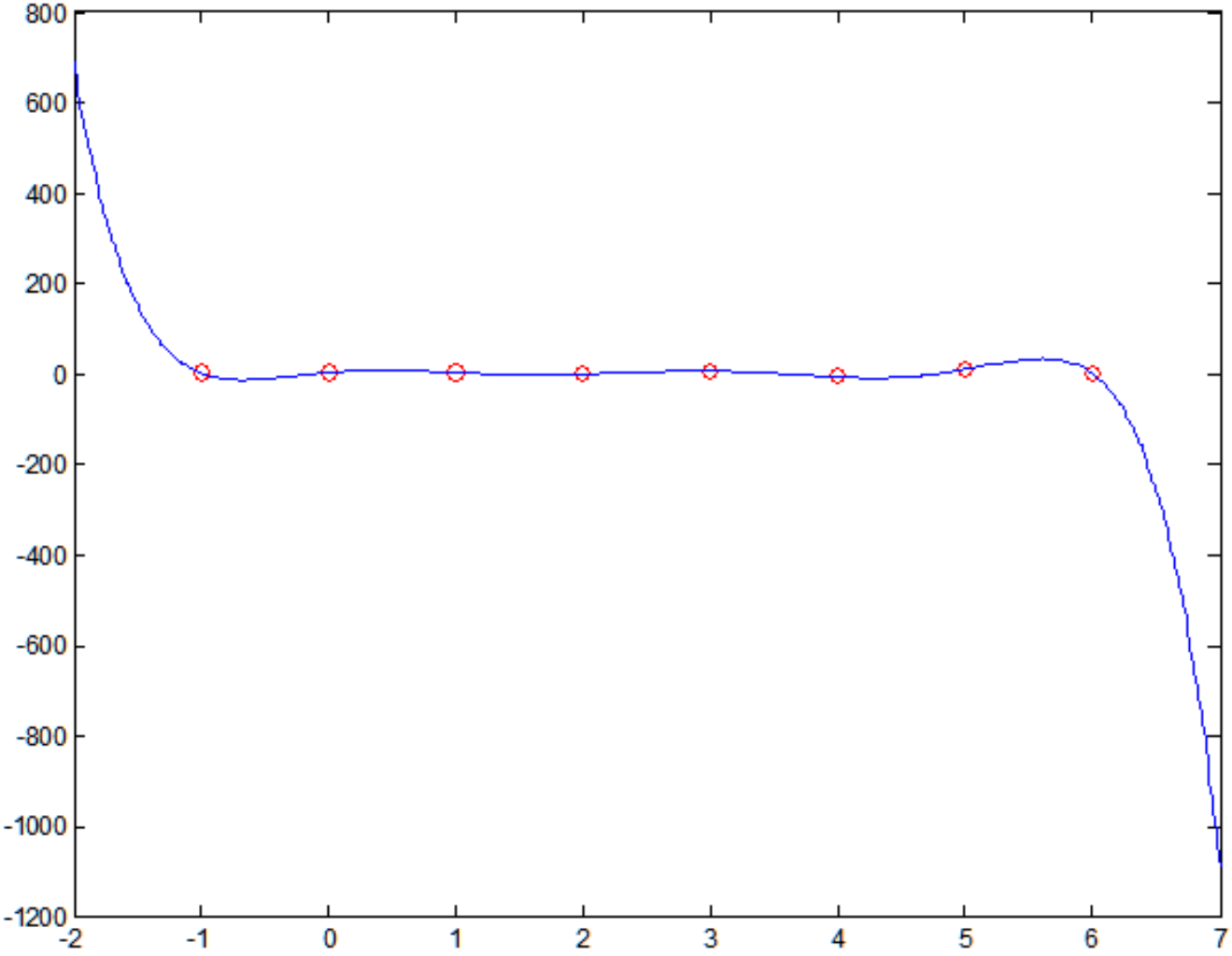
Παρεμβολή



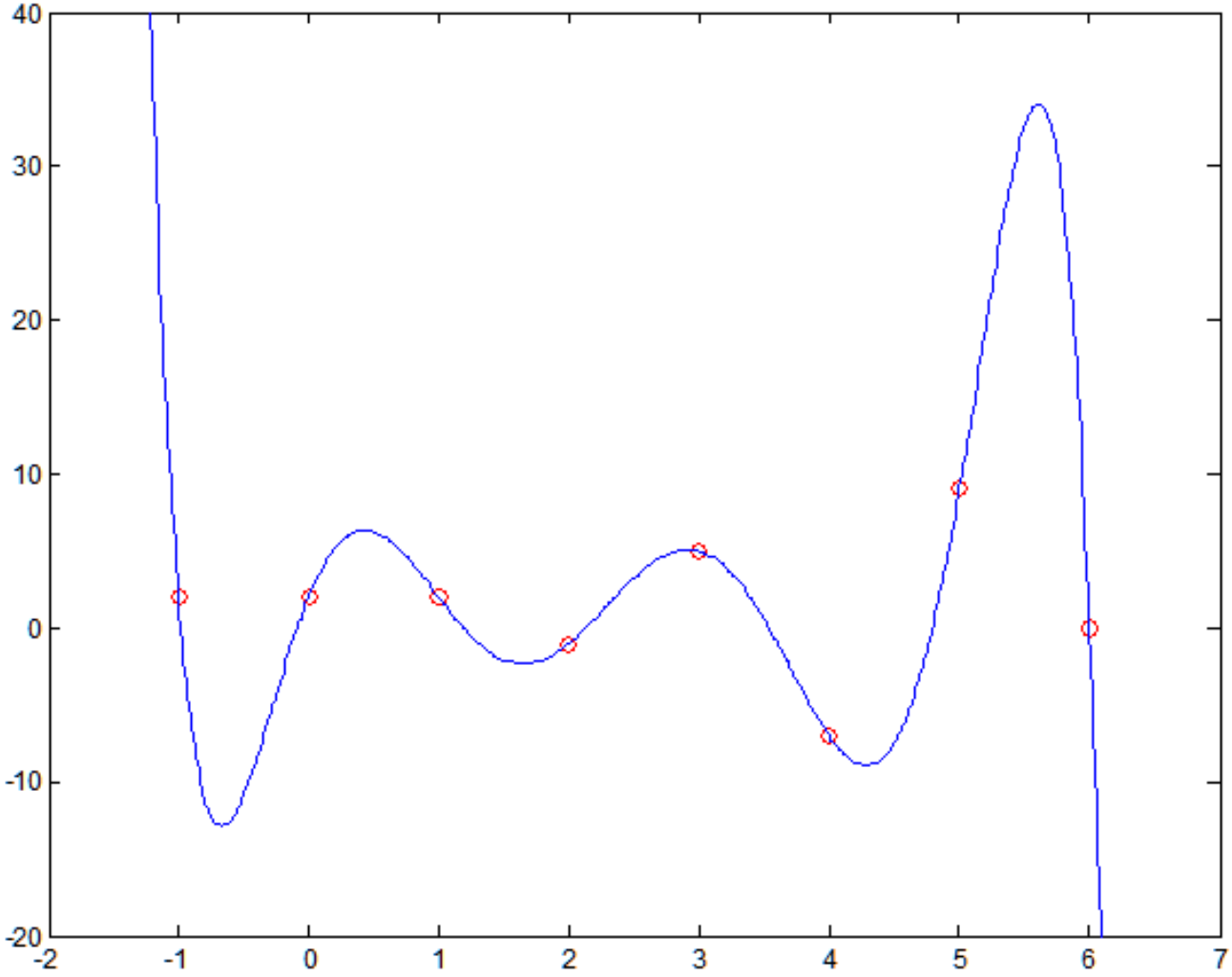
Παρεμβολή

- $x = [-1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$
- $x = [2\ 2\ 2\ -1\ 5\ -7\ 9\ 0]$
- Παρεμβολή με πολυώνυμο έβδομου βαθμού
- Παρεμβολή με γραμμικά spline
- Παρεμβολή με κυβικά spline

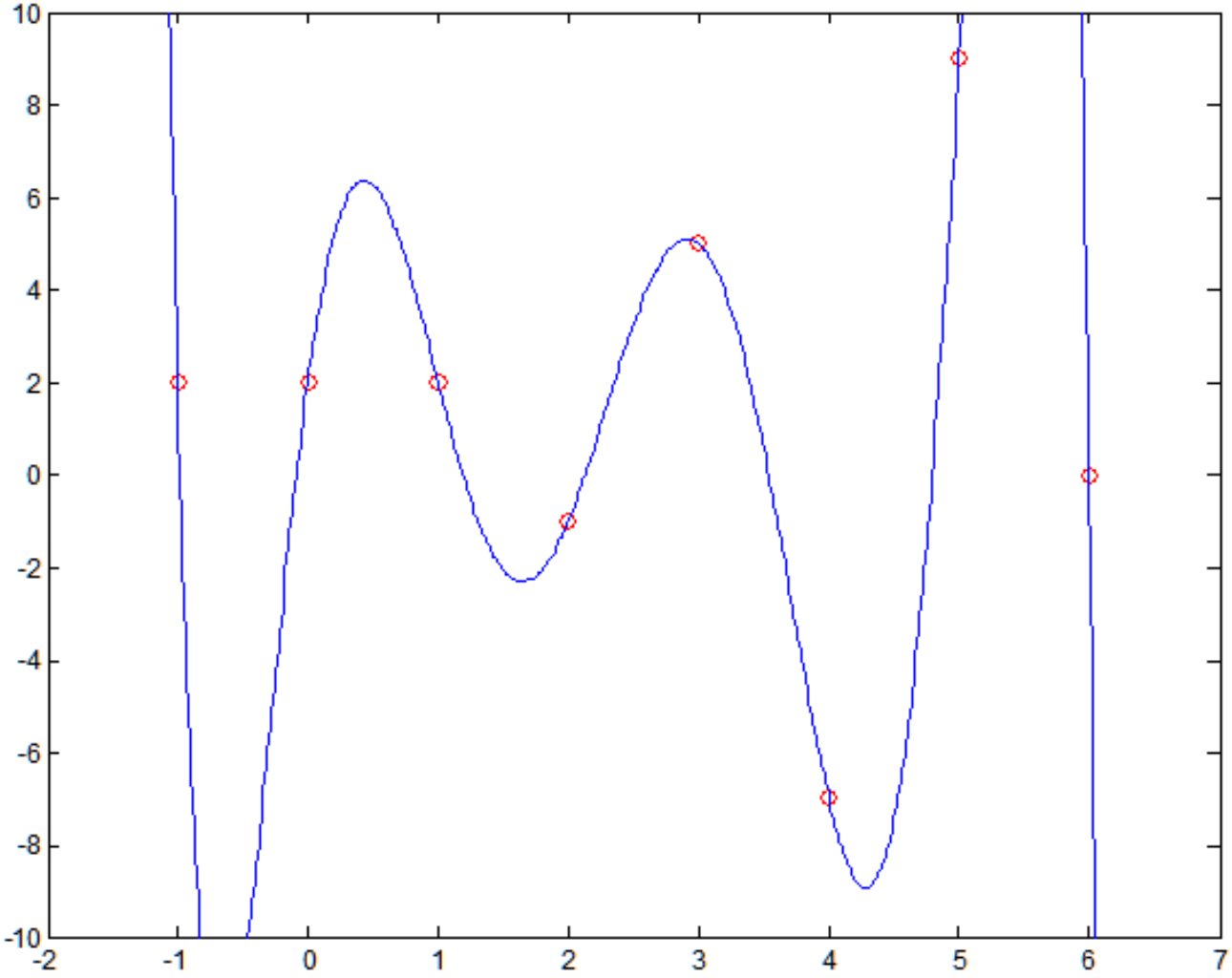
Παρεμβολή



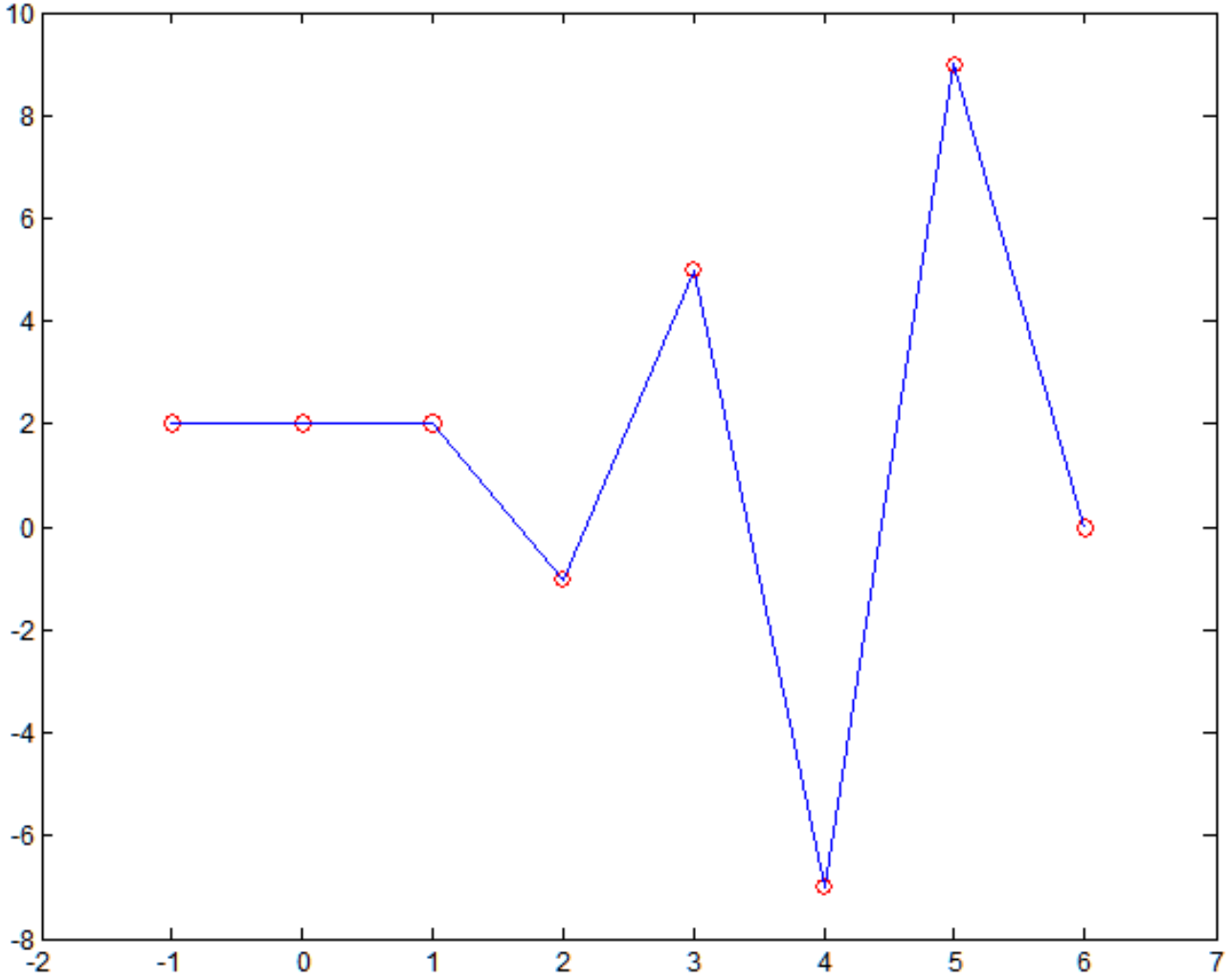
Παρεμβολή



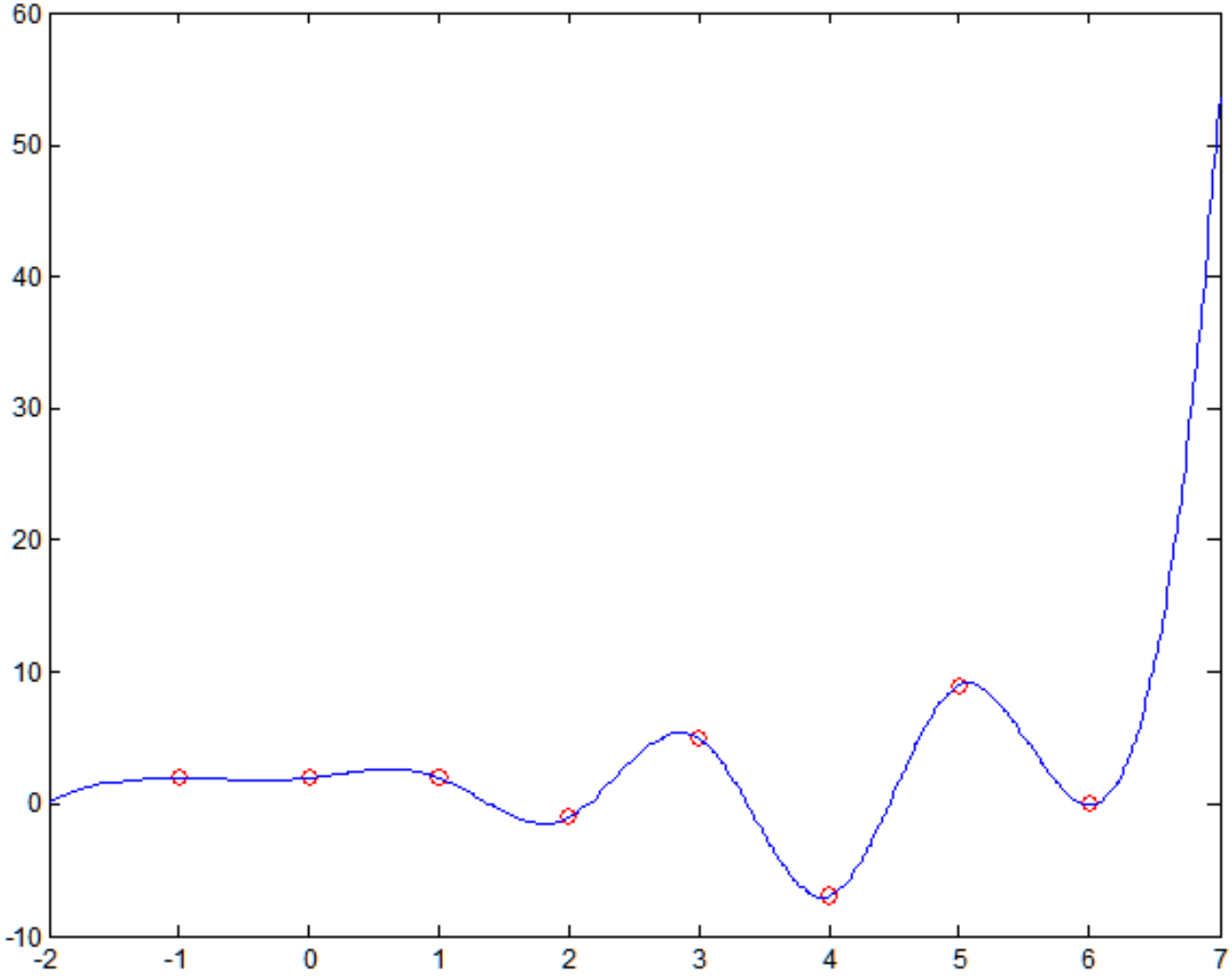
Παρεμβολή



Παρεμβολή



Παρεμβολή



Παρεμβολή