ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής, Υπολογιστών και Τηλεπικοινωνιών – Σέρρες

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Οκτώβριος 2019

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον
Δεύτερη Σειρά Διαφανειών

1. Τύποι σφαλμάτων
2. Σφάλματα αποκοπής
3. Σφάλματα στρογγυλοποίησης
4. Αριθμητική Ακρίβεια
   - Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων
   - Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων
5. Διαδιδόμενο σφάλμα
6. Κατάσταση προβλημάτων
7. Ευστάθεια αλγορίθμων

Τύποι σφαλμάτων

- Απόλυτο σφάλμα

$$\varepsilon = |x^* - x|$$

- Απόλυτο σχετικό σφάλμα

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x^* - x}{x} \right| \cdot 100\%$$

όπου

$$x^* \quad \text{Προσεγγιστική Λύση}$$

και

$$x \quad \text{Πραγματική Λύση}$$

Τύποι σφαλμάτων

Διαφορές των τύπων σφαλμάτων

- Παράδειγμα 1
  έστω $x^* = 101m$ και $x = 100m$ επομένως θα έχουμε

$$\varepsilon = 101 - 100 = 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_r = \frac{101 - 100}{100} = 0.01 = 1\%$$

- Παράδειγμα 2
  έστω $x^* = 10001m$ και $x = 10000m$ επομένως θα έχουμε

$$\varepsilon = 10001 - 10000 = 1$$

και

$$\varepsilon_r = \frac{10001 - 10000}{10000} = 0.0001 = 0.01\%$$

Σφάλματα αποκοπής

- Σφάλμα αποκοπής *(truncation error)* είναι το σφάλμα που δημιουργείται από την αποκοπή όρων σε αλγοριθμικές διαδικασίες
- Παραδείγματα (Τύπος Taylor)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_0) + \ldots$$

με εφαρμογή στους υπολογισμούς των

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

Σφάλματα αποκοπής

- Για τον υπολογισμό του $e^1 = e \simeq 2.71828182845905$ έχουμε

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = \frac{16}{6} = 2.666666666$$

με τρεις όρους,

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} = \frac{65}{24} = 2.70833333333333$$

με τέσσερις όρους,

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} = \frac{326}{120} = 2.71666666666667$$

με πέντε όρους.

Σφάλματα στρογγυλοποίησης

- Σφάλμα στρογγυλοποίησης (*round-off error*) είναι το σφάλμα που δημιουργείται από την στρογγυλοποίηση k δεκαδικών ψηφίων
- Παραδείγματα

$$\pi = 3.1215923\ldots$$
$$\frac{4}{3} = 1.3333333\ldots$$

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων

- Το άνω φράγμα του σφάλματος στρογγυλοποίησης *(round-off error)* είναι

$$\varepsilon = |x^* - x| \leq \frac{1}{2}10^{-k} \tag{1}$$

  όπου k ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων.
- Δυο αριθμοί που η διαφορά τους είναι μικρότερη από το παραπάνω σφάλμα, έχουν ακρίβεια μεταξύ τους k δεκαδικά ψηφία.

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 3.141592$ και $y = 3.14$.

Λύνουμε την σχέση (1) ως προς k και έχουμε

$$|x^* - x| < \frac{1}{2}10^{-k} \Rightarrow 2 \cdot |x^* - x| < 10^{-k} \Rightarrow$$
$$\log(2 \cdot |x^* - x|) < \log\left(10^{-k}\right) \Rightarrow \log(2 \cdot |x^* - x|) < -k \Rightarrow$$
$$k < -\log(2 \cdot |x^* - x|) \tag{2}$$

Επομένως,

$$k < -\log(2 \cdot |3.141592 - 3.14|) = 2.49702694093436$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $k = 2$.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων

- Δυο αριθμοί έχουν ακρίβεια k σημαντικών ψηφίων όταν η διαφορά τους (αφού στρογγυλοποιηθούν σε k σημαντικά ψηφία) είναι ίση με μηδέν.
- Δηλαδή, όταν για το σχετικό σφάλμα των δύο αριθμών ισχύει

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x^* - x}{x} \right| \leq 0.5 \times 10^{-(k-1)} \tag{3}$$

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων -Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 3.141592$ και $y = 3.14$.

Λύνουμε τη σχέση (3) ως προς k και έχουμε

$$\left|\frac{x^* - x}{x}\right| < \frac{1}{2}10^{-(k-1)} \Rightarrow 2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right| < 10^{-(k-1)} \Rightarrow$$

$$\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) < \log\left(10^{-(k-1)}\right) \Rightarrow$$

$$\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) < -(k-1) \Rightarrow$$

$$k - 1 < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) \Rightarrow$$

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x^* - x}{x}\right|\right) + 1 \tag{4}$$

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων -Παράδειγμα

Επομένως,

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{3.14 - 3.141592}{3.141592}\right|\right) + 1 = 3.99395658900758$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $k = 3$.

Αριθμητική Ακρίβεια - Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά και σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 999999$ και $y = 999996$.

Από τον (2) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot |999996 - 999999|\right) = -0.778151250383644$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, δεν έχουμε ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία.
Από τον (4) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{999996 - 999999}{999999}\right|\right) + 1 = 6.22184831532166$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ακρίβεια 6 σημαντικά ψηφία.

Αριθμητική Ακρίβεια - Παράδειγμα

- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά και σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές $x = 0.000012$ και $y = 0.000009$.

Από τον (2) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot |0.000009 - 0.000012|\right) = 5.22184874961636$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ακρίβεια 5 δεκαδικά ψηφία.
Από τον (4) έχουμε

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{0.000009 - 0.000012}{0.000012}\right|\right) + 1 = 1.30102999566398$$

Επειδή $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ακρίβεια 1 σημαντικό ψηφίο.

Διαδιδόμενο σφάλμα

Το Διαδιδόμενο σφάλμα

- έχει καταστροφική ακύρωση σημαντικών ψηφίων.
- παρατηρείται στις περιπτώσεις υπολογισμού πράξεων μικρών θετικών αριθμών με μεγάλους θετικούς αριθμούς.
- παρατηρείται στις περιπτώσεις υπολογισμού πράξεων με μεγάλους κατά απόλυτη τιμή αριθμούς.

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Έστω το σύστημα $(b, t, L, U) = (10, 5, -10, 10)$ και οι αριθμοί $x = 451852000$ και $y = -451851000$. Να υπολογιστεί το άθροισμα τους στο παραπάνω σύστημα.

Το άθροισμα των δυο είναι $x + y = 1000$.
Μετατρέπουμε τους αριθμούς στο σύστημα

$$fl(x) = (.45185) \times 10^9, \quad fl(y) = -(.45185) \times 10^9$$

επομένως,

$$fl(x) + fl(y) = 0 \text{ !!!!}$$

άρα και το άθροισμα

$$z = fl\big(fl(x) + fl(y)\big) = 0$$

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Έστω το σύστημα $(b, t, L, U) = (10, 10, -10, 10)$ και οι αριθμοί $x = \sqrt{7892}$ με $fl(x) = .8883692926 \times 10^2$ και $y = \sqrt{7891}$ με $fl(y) = .8883130079 \times 10^2$. Να υπολογιστεί η διαφορά τους στο παραπάνω σύστημα.

Η διαφορά τους ισούται με

$$fl(x) - fl(y) = .5628470000 \times 10^{-2}$$

Μπορούμε να αποφύγουμε το πρόβλημα με χρήση ταυτοτήτων, δηλαδή,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

επομένως θα έχουμε

$$x - y = .5628468294 \times 10^{-2}$$

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Υπολογισμός ημιαθροίσματος δυο αριθμών. Έστω, $a = 0.981$, $b = 0.983$ και $t = 3$.

Για να υπολογίσουμε το ημιάθροισμα $x = \frac{1}{2}(a+b)$ αρχικά υπολογίζουμε το άθροισμα

$$a + b = 0.981 + 0.983 = 1.964 \quad \text{άρα} \quad fl(a+b) = 0.196 \times 10^1$$

επομένως

$$x = \frac{1}{2} fl(a+b) = 0.980 \text{ !!!!!}$$

Διαδιδόμενο σφάλμα - Παράδειγμα

- Υπολογισμός ημιαθροίσματος δυο αριθμών. Έστω, $a = 0.981$, $b = 0.983$ και $t = 3$.

Μπορούμε να αποφύγουμε το πρόβλημα που παρουσιάζεται στον τύπο $x = \frac{1}{2}(a+b)$ υπολογίζοντάς το με άλλο τρόπο, δηλαδή, $x = a + \frac{1}{2}(b-a)$. Αρχικά υπολογίζουμε τη διαφορά

$$b - a = 0.983 - 0.981 = 0.002 \quad \text{άρα} \quad fl(b-a) = 0.2 \times 10^{-2}$$

επομένως

$$x = a + \frac{1}{2} fl(b-a) = 0.981 + 0.001 = 0.982$$

Παράδειγμα σε Matlab

- Έστω ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 10^{10} & 10^{11} & 10^{-10} & 10^{-11} & -11 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί το άθροισμα των στοιχείων του.

Στον Editor του Matlab γράφουμε

```
n=10;
a=[10^(n),10^(n+1),10^(-n),10^(-n-1),-11*10^(n)]
sum(a)
```

εκτελούμε και μας επιστρέφει

```
ans =

     0
```

Παράδειγμα σε Matlab

Αν γράψουμε τα στοιχεία του πίνακα με διαφορετική σειρά θα έχουμε διαφορετικό αποτέλεσμα.
Στον Editor του Matlab γράφουμε

```
n=10;
a=[10^(n),10^(n+1),-11*10^(n),10^(-n),10^(-n-1)]
sum(a)
```

εκτελούμε και μας επιστρέφει

```
ans =

                    1.1e-010
```

Παράδειγμα

- Υπολογισμός αθροίσματος

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k}$$

- Το παραπάνω άθροισμα μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-1} = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$S_9 = 2 - \frac{1}{9+1} = 1.9\,, \quad S_{99} = 2 - \frac{1}{99+1} = 1.99\,, \quad S_{99999} = 1.99999$$

Παράδειγμα

- Υπολογισμός αθροίσματος

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k}$$

n	$S_n(t = 10)$
9	1.900000000
99	1.990000003
999	1.999000003
9999	1.999899972

n	$\tilde{S}_n(t = 10)$
9	1.900000000
99	1.990000000
999	1.999000000
9999	1.999900000

Παράδειγμα σε Matlab

- Δημιουργούμε δυο συναρτήσεις σε Matlab

```
function y=sn1(n)
y=1;
for k=1:n
    y=y+1/(k^2+k);
end
```

και

```
function y=sn2(n)
y=0;
for k=n:-1:1
    y=y+1/(k^2+k);
end
y=y+1;
```

Παράδειγμα σε Matlab I

τις καλούμε και μας επιστρέφουν

```
>> sn1(9999)
ans =

                    1.9999
>> sn2(9999)
ans =

                    1.9999
>> sn1(999999)
ans =

          1.99999899999991
>> sn2(999999)
```

Παράδειγμα σε Matlab II

```
ans =

                  1.999999
>> sn1(99999999)
ans =

          1.99999999098622
>> sn2(99999999)
ans =

                 1.99999999
```

Κατάσταση προβλημάτων

- Καλής κατάστασης
  - Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως καλής κατάστασης, όταν για οποιαδήποτε διαταραχή στα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ανάλογη διαταραχή στη λύση του προβλήματος.
- Κακής κατάστασης
  - Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως κακής κατάστασης, όταν για οποιαδήποτε διαταραχή στα δεδομένα του προβλήματος έχουμε δυσανάλογη διαταραχή στη λύση του προβλήματος.

Κατάσταση προβλημάτων

- Κακής κατάστασης
  - Πολυωνυμική εξίσωση του Wilkinson

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) = 0 \Rightarrow$$
$$x^{20} + a_{19}x^{19} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

  - Συστήματα εξισώσεων

$$\begin{array}{l|l} x + 2y = 3 & x + 2y = 3 \\ 0.5x + 1.001y = 1.5 & 0.499x + 1.001y = 1.5 \\ (x, y) = (3, 0) & (x, y) = (1, 1) \end{array}$$

Ευστάθεια αλγορίθμων

- Ευσταθή (stable)
  - Ένας αλγόριθμος είναι ευσταθής όταν για οποιαδήποτε δεδομένα συγκλίνει στη λύση.
- Ασταθή (unstable)
  - Ένας αλγόριθμος είναι ασταθής όταν υπάρχουν δεδομένα για τα οποία δεν συγκλίνει στη λύση