Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 9)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Σκοπός Εργαστηρίου - Περιεχόμενα

Σκοπός αυτού του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης και τις διάφορες μεθόδους υλοποίησης της αριθμητικής ολοκλήρωσης μέσα από το Matlab. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Ολοκλήρωση
2. Κανόνας Τραπεζίου
   - Κανόνας Τραπεζίου - Υλοποίηση
   - Κανόνας Τραπεζίου - Παραδείγματα
3. Κανόνας Simpson
   - Κανόνας Simpson - Υλοποίηση
   - Κανόνας Simpson - Παραδείγματα
4. Συνδυαστική Άσκηση

Αριθμητική Ολοκλήρωση

- Με την αριθμητική ολοκλήρωση υπολογίζεται η τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος.
- Η αριθμητική ολοκλήρωση μπορεί να εφαρμοστεί είτε σε συνάρτηση είτε σε ένα σύνολο σημείων που προέρχονται από δειγματοληψία.

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Στην πρώτη προσέγγιση έχουμε

- Είσοδος
  - τη συνάρτηση
  - το διάστημα
  - το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί η αριθμητική ολοκλήρωση
- Έξοδος
  - η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

Στην δεύτερη προσέγγιση έχουμε

- Είσοδος
  - τις τετμημένες και τις τεταγμένες των σημείων
- Έξοδος
  - η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

Κανόνας Τραπεζίου

Έστω μια συνάρτηση f. Η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

προσεγγίζεται από τον κανόνα του τραπεζίου σύμφωνα με τον τύπο

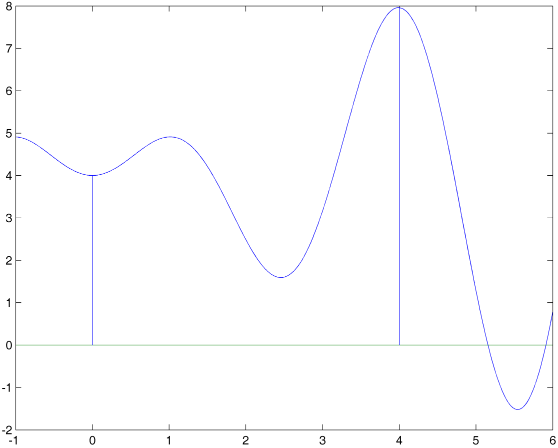
$$I = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2 \cdot f_1 + \ldots + 2 \cdot f_{n-1} + f_n\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

όπου n το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί ο τύπος και

$$h = \frac{b-a}{n}$$

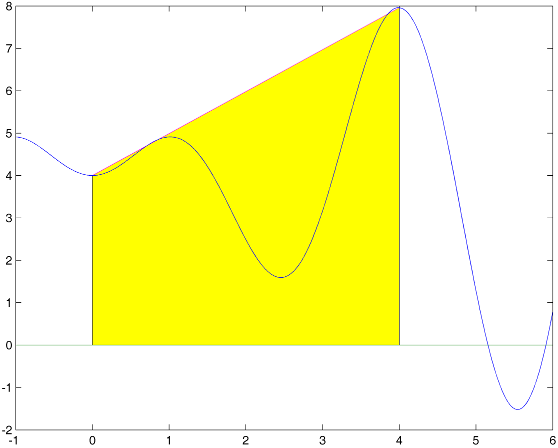
το βήμα των ισαπεχόντων σημείων.

Κανόνας Τραπεζίου



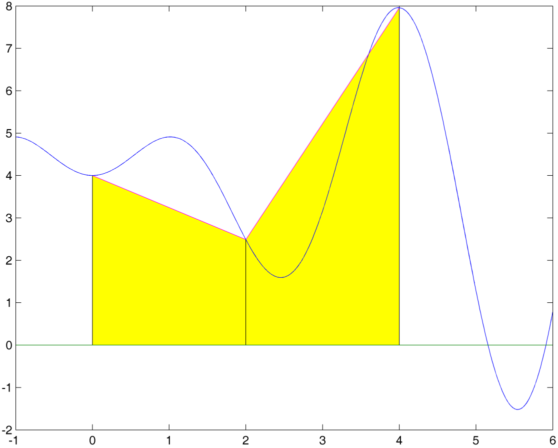
Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Τραπεζίου



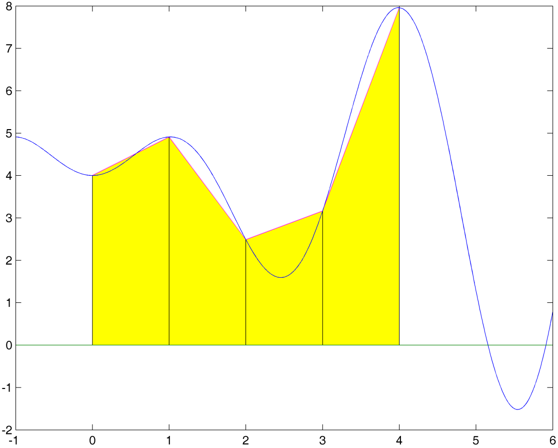
Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 1$

Κανόνας Τραπεζίου



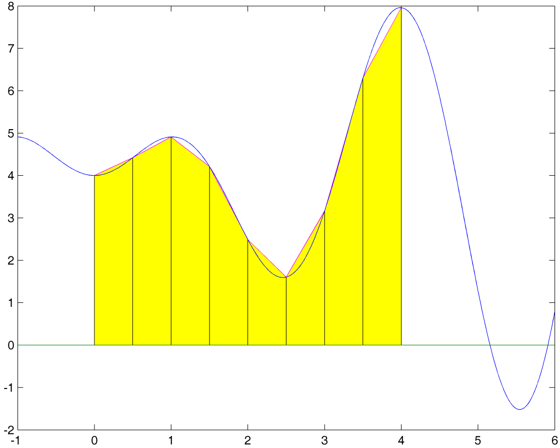
Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 2$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 4$

Κανόνας Τραπεζίου



Σχήμα: Κανόνας Τραπεζίου για $n = 8$

Κανόνας Τραπεζίου - Υλοποίηση

- Υλοποίηση πρώτης προσέγγισης σε συνάρτηση Matlab

```
function I=trapeziou(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
S=f(a);
for i=1:n-1
    x=a+h*i;
    S=S+2*f(x);
end
S=S+f(b);
I=h*S/2;
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του τραπεζίου για $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 100$, $n = 1000$.
Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =


     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4

```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

```
>> trapeziou(f,0,4,1)

ans =
         23.9148659729871

>> trapeziou(f,0,4,2)

ans =
         16.9302230052618

>> trapeziou(f,0,4,4)

ans =
         16.5361624348598
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 1

```
>> trapeziou(f,0,4,100)

ans =
          16.5383163693361

>> trapeziou(f,0,4,1000)

ans =
          16.5383393964196
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του τραπεζίου για $n = 500$ και να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.
Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4

```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

```
>> I1=trapeziou(f,0,4,500)

I1 =

          16.53833869789

>> I2=trapeziou(f,0,4,499)

I2 =

        16.5383386941534
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

- συγκρίνουμε τις τιμές ως προς τα δεκαδικά ψηφία τους σύμφωνα με τον τύπο

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-k} \Longrightarrow k < -\log\left(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|\right)$$

  όπου k το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.

-
```
>> -log10(2*abs(I1-I2))

ans =

           8.1264968625927
```

Κανόνας Τραπεζίου - Παράδειγμα 2

επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot |I_{500} - I_{499}|\right) = 8.1264968625927$$

θα έχουμε

$$k = 8$$

Επομένως, η προσεγγιστική λύση I_{500} έχει ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων.

Κανόνας Τραπεζίου - Άσκηση

- Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^3 e^{x^2} dx$$

με τον κανόνα του τραπεζίου για $n = 100$.

  - *Απάντηση (1448.18921586593)*

- Να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.

  - *Απάντηση (0 δ.ψ.)*

Κανόνας Simpson

Έστω μια συνάρτηση f. Η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

προσεγγίζεται από τον κανόνα του Simpson σύμφωνα με τον τύπο

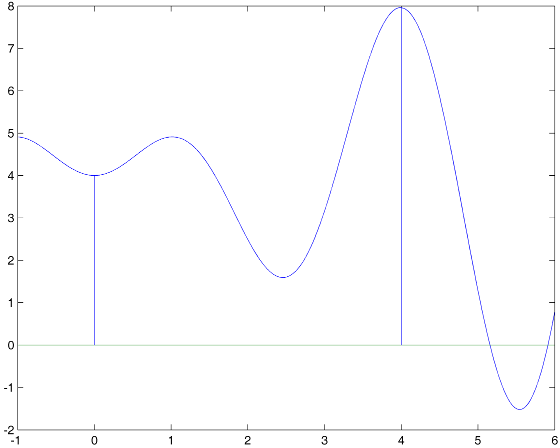
$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}\big(f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + \ldots + 2 \cdot f_{2n-2} + 4 \cdot f_{2n-1} + f_{2n}\big) \\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n}\right) \end{aligned}$$

όπου n το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα εφαρμοστεί ο τύπος και

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

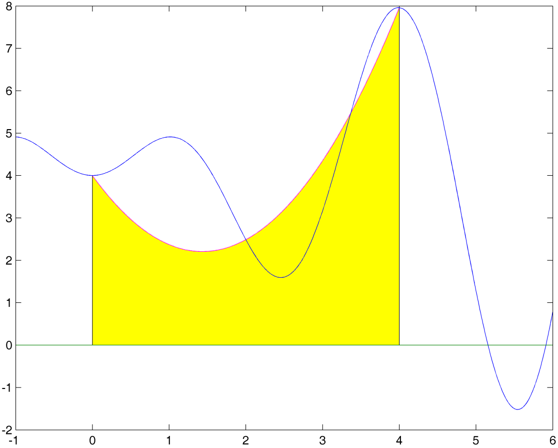
το βήμα των ισαπέχοντων σημείων.

Κανόνας Simpson



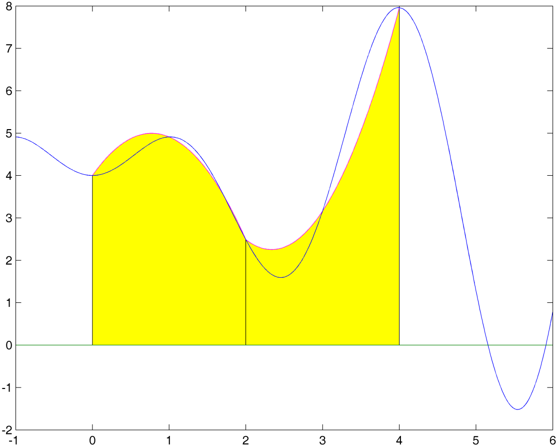
Σχήμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 f(x)dx$

Κανόνας Simpson



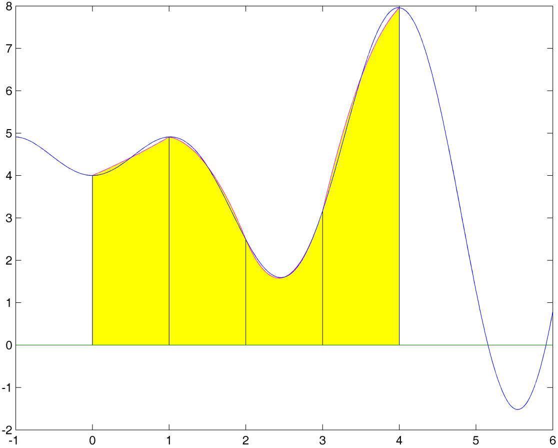
Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 1$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 2$

Κανόνας Simpson



Σχήμα: Κανόνας Simpson για $n = 4$

Κανόνας Simpson - Υλοποίηση

- Υλοποίηση πρώτης προσέγγισης σε συνάρτηση MATLAB

```
function I=simpson(f,a,b,n)
h=(b-a)/(2*n);
S=f(a);
for i=1:n
    x=a+h*(2*i-1);
    S=S+4*f(x);
end
for i=1:n-1
    x=a+h*(2*i);
    S=S+2*f(x);
end
S=S+f(b);
I=h*S/3;
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του Simpson για $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 100$, $n = 1000$.
Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4

```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

```
>> simpson(f,0,4,1)

ans =
          14.6020086826867

>> simpson(f,0,4,2)

ans =
          16.4048089113925

>> simpson(f,0,4,4)

ans =
          16.5350927538544
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 1

```
>> simpson(f,0,4,100)

ans =
           16.538339622856

>> simpson(f,0,4,1000)

ans =
          16.5383396292724
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 (x \cdot \sin(2x) + 4)dx$$

με τον κανόνα του Simpson για $n = 500$ και να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.
Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> f=inline('x.*sin(2*x)+4')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.*sin(2*x)+4

```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

```
>> I1=simpson(f,0,4,500)

I1 =

          16.5383396292628

>> I2=simpson(f,0,4,499)

I2 =

          16.5383396292627
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

- συγκρίνουμε τις τιμές ως προς τα δεκαδικά ψηφία τους σύμφωνα με τον τύπο

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-k} \Longrightarrow k < -\log\left(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|\right)$$

όπου k το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.

-
```
>> -log10(2*abs(I1-I2))

ans =

          12.6712885414875
```

Κανόνας Simpson - Παράδειγμα 2

επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot |I_{500} - I_{499}|\right) = 12.6712885414875$$

θα έχουμε

$$k = 12$$

Επομένως, η προσεγγιστική λύση I_{500} έχει ακρίβεια 12 δεκαδικών ψηφίων.

Κανόνας Simpson - Άσκηση

- Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^3 e^{x^2}\,dx$$

  με τον κανόνα του Simpson για $n = 100$.

  - *Απάντηση (1444.54569643943)*

- Να βρεθεί η ακρίβεια του αποτελέσματος σε δεκαδικά ψηφία.

  - *Απάντηση (3 δ.ψ.)*

Συνδυαστική Άσκηση

- Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^3 e^{x^2} dx$$

  με τον κανόνα του τραπεζίου και του Simpson για $n = 500$.
  - *Απάντηση:*
    - *Μέθοδος τραπεζίου: 1444.69097472801*
    - *Μέθοδος simpson: 1444.54512381156*

- Να βρεθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων σε δεκαδικά ψηφία.
  - *Απάντηση:*
    - *Μέθοδος τραπεζίου: 2.93170469768348 (2 δ.ψ)*
    - *Μέθοδος simpson: 7.8305603204051 (7 δ.ψ)*

- Ποια είναι η πιο ακριβής μέθοδος;
  - *Απάντηση: Η μέθοδος simpson*