Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 8)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός αυτού εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής παραγώγισης και τις διάφορες μεθόδους υλοποίησής της μέσα από το Matlab. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Παραγώγιση
    - Διαφορές
    - Πρώτη παράγωγος με προς τα εμπρός διαφορές
    - Πρώτη παράγωγος με προς τα πίσω διαφορές

Αριθμητική Παραγώγιση

- Υπολογισμός Αριθμητικής τιμής της Παραγώγου σε σημείο x_0.
- Είσοδος
  - τα δοθέντα σημεία
- Έξοδος
  - η αριθμητική τιμή της παραγώγου στο σημείο x_0

Διαφορές

- Δίνεται ο πίνακας τιμών

x	0	1	2	3	4
y	-3	2	3	6	17

Έχουμε 5 σημεία αρά θα υπολογίσουμε διαφορές μέχρι τέταρτης τάξης.

Διαφορές

Δημιουργούμε πίνακα τιμών των διαφορών

x_i	f_i	$1^{ης}$ τάξης	$2^{ης}$ τάξης	$3^{ης}$ τάξης	$4^{ης}$ τάξης
0	-3				
		5			
1	2		-4		
		1		6	
2	3		2		0
		3		6	
3	6		8		
		11			
4	17				

Διαφορές

- Υπολογισμός των διαφορών, σε Matlab θα έχουμε

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
d1=diff(y)

d1 =

     5     1     3    11

d2=diff(y,2)

d2 =

    -4     2     8
```

Διαφορές

```
>> d3=diff(y,3)

d3 =

     6     6

>> d4=diff(y,4)

d4 =

     0
```

Πρώτη παράγωγος ($\Delta - NG$)

Για $s = 0$ υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο στο $x = x_0$. Επομένως, με βάση το n έχουμε

- Για $n = 1$
$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_0$$
- Για $n = 2$
$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right]$$
- Για $n = 3$
$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right]$$

Πρώτη παράγωγος ($\Delta - NG$)

- Για $n = k$, με k περιττό

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \ldots + \frac{1}{k}\Delta^k f_0\right]$$

ή ισοδύναμα, με k άρτιο

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \ldots - \frac{1}{k}\Delta^k f_0\right]$$

- Η αριθμητική παραγώγιση με το πολυώνυμο $\Delta - NG$ χρησιμοποιείται στα αρχικά σημεία παρεμβολής.

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

Με το πολυώνυμο $\Delta - NG$ έχουμε

- Για $x_0 = 0$ έχουμε μέχρι Δ^4 διαφορές, άρα

$$\begin{aligned} f'(0) &\simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0\right] \\ &= 5 - \frac{1}{2}(-4) + \frac{1}{3}6 - \frac{1}{4}0 = 9 \end{aligned}$$

- σε Matlab θα έχουμε

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(1:5);
d1=diff(y0);
d2=diff(y0,2);
d3=diff(y0,3);
d4=diff(y0,4);
res=1/1*(d1(1)-1/2*(d2(1))+1/3*(d3(1))-1/4*(
   d4(1)))

res=
        9
```

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

- Για $x_0 = 1$ έχουμε μέχρι Δ^3 διαφορές, άρα

$$f'(1) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right] = 1 - \frac{1}{2}2 + \frac{1}{3}6 = 2$$

- σε Matlab θα έχουμε

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(2:5);
d1=diff(y0);
d2=diff(y0,2);
d3=diff(y0,3);
res=1/1*(d1(1)-1/2*(d2(1))+1/3*(d3(1)))


res=
```

```
        2
```

- Για $x_0 = 2$ έχουμε μέχρι Δ^2 διαφορές, άρα

$$f'(2) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right] = 3 - \frac{1}{2}8 = -1$$

- σε Matlab θα έχουμε

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(3:5);
d1=diff(y0);
d2=diff(y0,2);
res=1/1*(d1(1)-1/2*(d2(1)))
```

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

```
res=
         -1
```

- Για $x_0 = 3$ έχουμε μέχρι Δ^1 διαφορές, άρα

$$f'(3) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_0 = 11$$

- σε Matlab θα έχουμε

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(4:5);
d1=diff(y0);
res=1/1*(d1(1))
```

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

```
res=
          11
```

- Για $x_0 = 4$ δεν έχουμε προς τα εμπρός διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο.

Πρώτη παράγωγος ($\nabla - NG$)

Για $s = 0$ υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο στο $x = x_n$. Επομένως, με βάση το n έχουμε

- Για $n = 1$
$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\nabla f_n$$
- Για $n = 2$
$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n\right]$$
- Για $n = 3$
$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n\right]$$

Πρώτη παράγωγος ($\nabla - NG$)

- Για $n = k$

$$f'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \ldots + \frac{1}{k}\nabla^k f_n\right]$$

- Η αριθμητική παραγώγιση με το πολυώνυμο $\nabla - NG$ χρησιμοποιείται στα τελευταία σημεία παρεμβολής.

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

Με το πολυώνυμο $\nabla - NG$ έχουμε

- Για $x_n = 0$ δεν έχουμε προς τα πίσω διαφορές και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο.
- Για $x_n = 1$ έχουμε μέχρι ∇^1 διαφορές, άρα

$$f'(1) \simeq \frac{1}{h}\nabla f_n = 5$$

- σε Matlab θα έχουμε

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(1:2);
d1=diff(y0);
res=1/1*(d1(end))

res=
        5
```

- Για $x_n = 2$ έχουμε μέχρι ∇^2 διαφορές, άρα

$$f'(2) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n\right] = 1 + \frac{1}{2}(-4) = -1$$

- σε Matlab θα έχουμε

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(1:3);
d1=diff(y0);
d2=diff(y0,2);
res=1/1*(d1(end)+1/2*(d2(end)))

res=
        -1
```

- Για $x_n = 3$ έχουμε μέχρι ∇^3 διαφορές, άρα

$$f'(3) \simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n\right] = 3 + \frac{1}{2}2 + \frac{1}{3}6 = 6$$

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

- σε Matlab θα έχουμε

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(1:4);
d1=diff(y0);
d2=diff(y0,2);
d3=diff(y0,3);
res=1/1*(d1(end)+1/2*(d2(end))+1/3*(d3(end))
   )

res=
         6
```

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

- Για $x_n = 4$ έχουμε μέχρι ∇^4 διαφορές, άρα

$$\begin{aligned} f'(4) &\simeq \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \frac{1}{4}\nabla^4 f_n\right] \\ &= 11 + \frac{1}{2}8 + \frac{1}{3}6 + \frac{1}{4}0 = 17 \end{aligned}$$

- σε Matlab θα έχουμε

```
x=[0,1,2,3,4]
y=[-3,2,3,6,17]
y0=y(1:5);
d1=diff(y0);
d2=diff(y0,2);
d3=diff(y0,3);
```

Πρώτη παράγωγος - Παράδειγμα

```
res=1/1*(d1(end)+1/2*(d2(end))+1/3*(d3(end))
   +1/4*(d4(end)))

res=
        17
```

Άσκηση

Δίνεται ο πίνακας τιμών

x	0	2	4	6	8	10
y	-3	1	3	5	7	9

- Να υπολογιστούν οι τιμές $f'(2), f'(4), f'(6), f'(8)$.
  - *Απάντηση:* $f'(2) =, f'(4) =, f'(6) =, f'(8) =$