

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε
Προγραμματιστικό Περιβάλλον
(Εργαστήριο 7)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός του εβδόμου αυτού εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της παρεμβολής και τις διάφορες μεθόδους υλοποίησής της μέσα από το MATLAB. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

- 1 Πολυωνυμική Παρεμβολή
 - Γενική Μέθοδος
 - Παρεμβολή - Συνάρτηση `interp1`
 - Παρεμβολή - Συνάρτηση `polyfit`

2 Polynomial Functions

Πολυωνυμική Παρεμβολή

- Υπολογισμός Πολυωνύμου Παρεμβολής n βαθμού που διέρχεται από $n + 1$ σημεία.
- Είσοδος
 - ▶ τα $n + 1$ σημεία
- Έξοδος
 - ▶ το πολυώνυμο παρεμβολής n βαθμού

Γενική Μέθοδος

Έστω τα σημεία

$$(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Υπολογισμός του πίνακα Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

- Υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνύμου με βάση τον τύπο

$$p = V^{-1} \cdot y$$

οπού y το διάνυσμα στήλη των τεταγμένων των σημείων.

Γενική Μέθοδος - Παράδειγμα

Έστω τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(3, 2)$.

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής το οποίο διέρχεται από τα παραπάνω σημεία (με τη γενική μέθοδο).

- Υπολογισμός του πίνακα Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1^2 & 1^1 & 1 \\ 2^2 & 2^1 & 1 \\ 3^2 & 3^1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνύμου, σε MATLAB θα έχουμε

```
y=[1; 3; 2];  
V=[1, 1, 1; 4, 2, 1; 9, 3, 1];  
p=inv(V)*y
```

Γενική Μέθοδος - Παράδειγμα

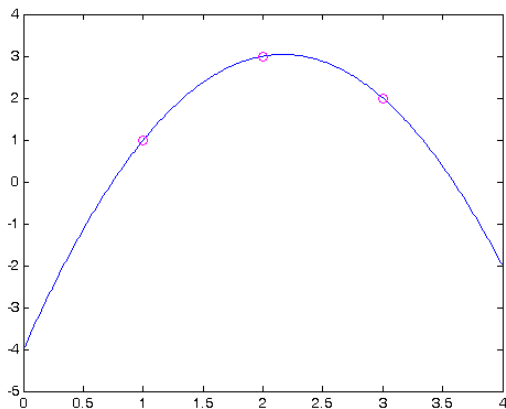
- Οι παραπάνω εντολές μας επιστρέφουν

```
p=  
-1.5  
 6.5  
-4
```

- τα οποία είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου, δηλαδή,

$$p(x) = -1.5x^2 + 6.5x - 4$$

Γενική Μέθοδος - Παράδειγμα



Σχήμα: Πολυωνυμική Παρεμβολή

Γενική Μέθοδος - Άσκηση

Έστω τα σημεία $A(0, -4)$, $B(1, -2)$, $\Gamma(3, 14)$ και $\Delta(4, 40)$.

- Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής το οποίο διέρχεται από τα παραπάνω σημεία (με τη γενική μέθοδο).

▶ Απάντηση:

$$\left(V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \right)$$

Παρεμβολή - Συνάρτηση `interp1`

- Η πολυωνυμική παρεμβολή μπορεί να υλοποιηθεί με τη συνάρτηση `interp1`.
- `interp1(x, y, xi)`
 - ▶ x, y οι τετμημένες και οι τεταγμένες των δοθέντων σημείων
 - ▶ xi η παρεμβαλλόμενη τιμή
 - ▶ Η παραπάνω σύνταξη υλοποιεί γραμμική παρεμβολή
- Η σύνταξη `interp1(x, y, xi, 'cubic')` υλοποιεί παρεμβολή με πολυώνυμα τρίτου βαθμού (κυβική παρεμβολή)
- Η σύνταξη `interp1(x, y, xi, 'spline')` υλοποιεί παρεμβολή με κυβικά splines

Συνάρτηση interp1 - Παράδειγμα

Έστω τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(3, 2)$. Να βρεθούν οι τιμές του y

- για $x = 1.5$ με γραμμική παρεμβολή
- για $x = 2.9$ με γραμμική παρεμβολή, με κυβική παρεμβολή και με παρεμβολή με κυβικά splines

Σε MATLAB θα έχουμε

```
>> x=[1, 2, 3];  
>> y=[1, 3, 2];  
>> interp1(x,y,1.5)
```

```
ans =  
     2
```

Συνάρτηση interp1 - Παράδειγμα

```
>> interp1(x,y,2.9)
```

```
ans =
```

```
2.1
```

```
>> interp1(x,y,2.9,'cubic')
```

```
ans =
```

```
2.2305
```

```
>> interp1(x,y,2.9,'spline')
```

```
ans =
```

```
2.235
```

Συνάρτηση interp1 - Άσκηση

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών

| | | | | | |
|-----|----|---|---|---|---|
| x | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | -1 | 3 | 5 | 2 | 7 |

Να βρεθούν οι τιμές του y

- για $x = 2.7$ με γραμμική παρεμβολή
 - ▶ Απάντηση: ($y = 1.8$)
- για $x = 5.8$ με γραμμική παρεμβολή και με κυβική παρεμβολή
 - ▶ Απάντηση: ($y = 6$ και $y = 5.328$)

Παρεμβολή - Συνάρτηση `polyfit`

- Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής με τη συνάρτηση `polyfit`.
- `polyfit(x, y, n)`
 - ▶ x, y οι τετμημένες και οι τεταγμένες των δοθέντων σημείων
 - ▶ n ο βαθμός του πολυωνύμου παρεμβολής
 - ▶ Στην περίπτωση που ο βαθμός n δεν είναι ίσος με το πλήθος των σημείων -1 , τότε η συνάρτηση υλοποιεί προσέγγιση.

Συνάρτηση `polyfit` - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(3, 2)$.

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

Σε `MATLAB` θα έχουμε

```
x=[1, 2, 3];  
y=[1, 3, 2];  
p=polyfit(x,y,2)
```

- Οι παραπάνω εντολές μας επιστρέφουν

```
p =  
    -1.5         6.5        -4
```

- τα οποία είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου, δηλαδή,

$$p(x) = -1.5x^2 + 6.5x - 4$$

Polynomial Functions

- `polyval(p, x)` υπολογισμός της τιμής του πολυωνύμου p για την δοθείσα τιμή x
- `polyder(p)` υπολογισμός της παραγώγου συνάρτησης (πολυώνυμο) του πολυωνύμου p
- `polyint(p)` υπολογισμός της αρχικής συνάρτησης (πολυώνυμο) του πολυωνύμου p
- `conv(p1, p2)` υπολογισμός του γινομένου των πολυωνύμων $p1$ και $p2$

Παράδειγμα

Για το πολυώνυμο του προηγούμενου παραδείγματος να βρεθούν οι παρακάτω παραστάσεις

- $p(1.7)$
- $p'(2)$

Σε MATLAB θα έχουμε

- από το προηγούμενο παράδειγμα

```
>> x=[1, 2, 3];  
>> y=[1, 3, 2];  
>> p=polyfit(x,y,2)
```

```
p =  
      -1.5      6.5     -4
```


Παράδειγμα

```
>> polyval(p,1.7)
```

```
ans =
```

```
2.715
```

```
>> dp=polyder(p)
```

```
dp =
```

```
-3
```

```
6.5
```

```
>> polyval(dp,2)
```

```
ans =
```

```
0.4999999999999999
```

Άσκηση

Έστω τα σημεία $A(0, -4)$, $B(1, -2)$, $\Gamma(3, 14)$ και $\Delta(4, 40)$.

- Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής το οποίο διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.
 - ▶ *Απάντηση:* $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$
- Να υπολογιστεί η τιμή $p''(2)$.
 - ▶ *Απάντηση:* $p''(2) = 8$