Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 6)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων και ειδικότερα με την επαναληπτική μέθοδο Newton, η οποία υλοποιείται προγραμματιστικά σε Matlab. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων
   - Μέθοδος Newton
   - Μέθοδος Newton - Αλγόριθμος
   - Μέθοδος Newton - Υλοποίηση
   - Μέθοδος Newton - Παραδείγματα

Μέθοδος Newton

- Υπολογισμός μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ με αρχική τιμή x_0.
- Είσοδος
  - Η συνάρτηση $f(x)$
  - Η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$
  - Η αρχική τιμή x_0
  - Η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία $\left(tol = \frac{1}{2}10^{-k}\right)$
  - Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων
- Έξοδος
  - Η προσεγγιστική ρίζα
  - Μήνυμα αποτυχίας

Μέθοδος Newton - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, $f'(x)$, x_0, tol, n

ΒΗΜΑ 1 Θέσε $i = 2$, $x(1) = x_0$

ΒΗΜΑ 2 Όταν $i <= n$ εκτέλεσε τα βήματα $3 - 5$

ΒΗΜΑ 3 Θέσε $x(i) = x(i-1) - \dfrac{f(x(i-1))}{f'(x(i-1))}$

ΒΗΜΑ 4 Αν $f(x(i)) = 0$ ή $|x(i) - x(i-1)| < tol$ τότε
ΕΞΟΔΟΣ: το $x(i)$ είναι η λύση, τερμάτισε

ΒΗΜΑ 5 Θέσε $i = i + 1$

ΒΗΜΑ 6 ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις, τερμάτισε

Μέθοδος Newton - Υλοποίηση

- Υλοποίηση της μεθόδου Newton σε συνάρτηση Matlab

```
function out=newton(f, df, x1, tol, n)
x(1)=x1;
i=2;
while i<=n
    x(i)=x(i-1)-f(x(i-1))/df(x(i-1));
    if f(x(i))==0 || abs(x(i)-x(i-1))<tol
        break;
    end
    i = i + 1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
```

Μέθοδος Newton - Υλοποίηση

```
    k=1:i;
end
out=[k', x(k)', f(x(k))'];
```

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x - 5$ με τη μέθοδο Newton, με αρχική τιμή 1 με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  `f=inline('x.^3-2*x-5')`
- ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$
  `df=inline('3*x.^2-2')` [1]
- καλούμε την συνάρτηση `newton` με τα κατάλληλα ορίσματα
  `out=newton(f, df, 1, 1/2*10^-8, 50)`

[1] Την παράγωγο συνάρτηση μπορούμε να την ορίσουμε και με αυτοματοποιημένο τρόπο

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

```
>> f=inline('x.^3-2*x-5')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.^3-2*x-5

>> df=inline('3*x.^2-2')

df =

     Inline function:
     df(x) = 3*x.^2-2

>> out=newton(f, df, 1, 1/2*10^-8, 50)

out =
```

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

1	1	-6
2	7	324
3	4.76551724137931	93.6945987125343
4	3.34870275948028	25.854311546l301
5	2.53159964100251	6.1618145700487
6	2.17391588493923	0.925899647287488
7	2.09788368644176	0.0372620055958821
8	2.09455771585006	6.95840817304116e-005
9	2.09455148156421	2.44225084600203e-010
10	2.09455148154233	-8.88178419700125e-016

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 1

Από τον πίνακα `out` τον οποίο επιστρέφει η συνάρτηση `newton` παρατηρούμε τα εξής:

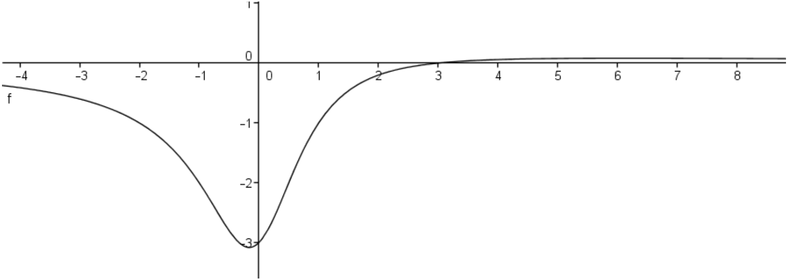
- Για τον υπολογισμό της ρίζας εκτελέστηκαν 10 επαναλήψεις (πρώτη στήλη)
- Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας είναι $x_{10} = 2.09455148154233$ (δεύτερη στήλη)
- Η τιμή της συνάρτησης είναι $f(x_{10}) = -8.88178419700125 \times 10^{-016}$ (τρίτη στήλη)

- Επομένως, η λύση στο πρόβλημα είναι $x_{10} = 2.09455148154233$

Ειδική περίπτωση

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1}$ με τη μέθοδο Newton, με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- η παραπάνω συνάρτηση έχει προφανή ρίζα το 3
- έχει ιδιόμορφη γραφική παράσταση



- πλησιάζει στο μηδέν όταν το $x \to \infty$ και $x \to -\infty$

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 2

Επομένως, σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  ```
  f=inline('(x-3)./(x.^2+1)')
  ```
- ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$
  ```
  syms x
  df=inline(diff((x-3)./(x.^2+1)))
  ```
  [2]
  ή σε άλλες εκδόσεις του Matlab
  ```
  df=inline(diff(sym(f)))
  ```
  [3]

---

[2] Υπολογίζει την παράγωγο μιας συμβολικής έκφρασης και μας επιστρέφει inline function

[3] Υπολογίζει την παράγωγο μιας inline function και μας επιστρέφει inline function

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 2

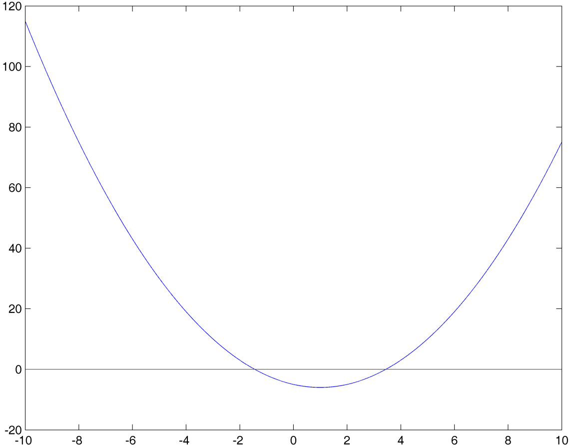
- καλούμε την συνάρτηση `newton` με τα κατάλληλα ορίσματα, με αρχική τιμή 2
  `out=newton(f, df, 2, 1/2*10^-8, 50)`
  μας επιστρέφει $x_7 = 3$
- ενώ, με αρχική τιμή 5
  `out=newton(f, df, 5, 1/2*10^-8, 50)`
  μας επιστρέφει $x_{50} = -66009503473437\!9$, δηλαδή, εκτελέστηκε ο μέγιστος αριθμός των επαναλήψεων

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η θετική ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$ με τη μέθοδο Newton, με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- Για να βρούμε την θετική ρίζα της συνάρτησης θα πρέπει πρώτα να βρούμε μια κατάλληλη αρχική τιμή με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
- Σχεδιάζουμε την την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[-10, 10]$ και επιλέγουμε την κατάλληλη αρχική τιμή.
- Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης επιλέγουμε αρχική τιμή το 4.

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 3



Σχήμα: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η θετική ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$ με τη μέθοδο Newton, με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
```
f=inline('x.^2-2*x-5')
```
- ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$
```
syms x
df=inline(diff(x.^2-2*x-5))
```
- καλούμε την συνάρτηση `newton` με τα κατάλληλα ορίσματα
```
newton(f, df, 4, 1/2*10^-8, 50)
```
$x_6 = 3.44948974278318$

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + 5x - 10$$

- Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης με τη μέθοδο Newton, με αρχική τιμή $x_0 = 0$ με ακρίβεια 12 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_6 και x_7.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_6 και x_7.