Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 5)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων και ειδικότερα με την μέθοδο Διχοτόμησης, η οποία υλοποιείται προγραμματιστικά σε Matlab. Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων
    - Μέθοδος Διχοτόμησης
    - Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος
    - Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση
    - Μέθοδος Διχοτόμησης - Βελτίωση προγράμματος
    - Μέθοδος Διχοτόμησης - Παραδείγματα
    - Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

Μέθοδος Διχοτόμησης

- Υπολογισμός μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a, b]$ οπού ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Είσοδος
  - Η συνάρτηση $f(x)$
  - Το διάστημα $[a, b]$
  - Η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία $\left(tol = \frac{1}{2}10^{-k}\right)$
  - Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων
- Έξοδος
  - Η προσεγγιστική ρίζα
  - Μήνυμα αποτυχίας

Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, a, b, tol, n

ΒΗΜΑ 1 Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ πήγαινε στο βήμα 2
Διαφορετικά
ΕΞΟΔΟΣ: Δεν ισχύει το Θ. Bolzano στο αρχικό διάστημα, τερμάτισε

ΒΗΜΑ 2 Θέσε $i = 1$

ΒΗΜΑ 3 Όταν $i <= n$ εκτέλεσε τα βήματα $3 - 6$

ΒΗΜΑ 4 Θέσε $x = \dfrac{a+b}{2}$

ΒΗΜΑ 5 Αν $f(x) = 0$ ή $\dfrac{b-a}{2} < tol$ τότε
ΕΞΟΔΟΣ: το x είναι η λύση, τερμάτισε

Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος

ΒΗΜΑ 6 Αν $f(a) \cdot f(x) > 0$ τότε
    Θέσε $a = x$
Διαφορετικά
    Θέσε $b = x$

ΒΗΜΑ 7 Θέσε $i = i + 1$

ΒΗΜΑ 8 ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις, τερμάτισε

- Η μέθοδος διχοτόμησης πρέπει να εφαρμόζεται σε διαστήματα στα οποία υπάρχει ακριβώς μια ρίζα.
- Τον παραπάνω αλγόριθμο αν τον εφαρμόσουμε σε διάστημα με καμία ή 2 ή 4 ρίζες (γενικά άρτιο αριθμό ριζών) θα σταματήσει από το Βήμα 1.

Μέθοδος Διχοτόμησης - Αλγόριθμος

- Τον παραπάνω αλγόριθμο αν τον εφαρμόσουμε σε διάστημα με 3 ή 5 ρίζες (γενικά περιττό αριθμό ριζών) θα βρει μια από όλες τις ρίζες.

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

- Υλοποίηση της μεθόδου Διχοτόμησης σε συνάρτηση Matlab με while και break

```
function bisection(f,a,b,tol,n)
if f(a)*f(b)>0.0
   error('function has same sign at end
       points')
end
i = 1;
while i<=n
    x=(a+b)/2;
    if f(x)==0 || (b-a)/2<tol
        disp('The solution found')
        disp(x)
        break;
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

```
    end
    if f(a)*f(x)>0
        a=x;
    else
        b=x;
    end
    i = i + 1;
end
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Βελτίωση προγράμματος

- Είσοδος παραμέτρων από τον χρήστη - Δημιουργία συνάρτησης με έξοδο πίνακα

```
function out=bisect(f, a, b, tol, n)
```

  - Η συνάρτηση $f(x)$
  - Το διάστημα $[a, b]$
  - Η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία (tol)
  - Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων (n)

- Περισσότερες πληροφορίες στην έξοδο
  - Αριθμό βημάτων
  - Νέο διάστημα σε κάθε βήμα
  - Τιμή της ρίζας και της συνάρτησης $f(x)$ σε κάθε βήμα

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

- Υλοποίηση της μεθόδου Διχοτόμησης σε συνάρτηση Matlab

```
function out=bisect(f, a, b, tol, n)
if f(a)*f(b)>0.0
   error('function has same sign at end
      points')
end
a(1)=a;
b(1)=b;
i=1;
while i<=n
    x(i)=(a(i)+b(i))/2;
    if f(x(i))==0 || (b(i)-a(i))/2<tol
        break;
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

```
    end
    if f(a(i))*f(x(i))>0
        a(i+1)=x(i);
        b(i+1)=b(i);
    else
        a(i+1)=a(i);
        b(i+1)=x(i);
    end
    i=i+1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
    k=1:i;
end
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Υλοποίηση

```
out=[k', a(k)', b(k)', x(k)', f(x(k))'];
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

με τη μέθοδο Διχοτόμησης, στο διάστημα $[1, 3]$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.
Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  ```
  f=inline('x.^3-2*x-5')
  ```
- καλούμε την συνάρτηση `bisect` με τα κατάλληλα ορίσματα
  ```
  out=bisect(f, 1, 3, 1/2*10^-4, 50)
  ```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 1

```
>> f=inline('x.^3-2*x-5')

f =

     Inline function:
     f(x) = x.^3-2*x-5

>> out=bisect(f, 1, 3, 1/2*10^-4, 50)

out =

     1                  1                  3                  2                   -1
     2                  2                  3                2.5                5.625
     3                  2                2.5               2.25             1.890625
     4                  2               2.25              2.125          0.345703125
     5                  2              2.125             2.0625      -0.351318359375
     6             2.0625              2.125            2.09375   -0.008941650390625
     7            2.09375              2.125           2.109375    0.166835784912109
     8            2.09375           2.109375          2.1015625    0.078562259674072
     9            2.09375          2.1015625         2.09765625    0.034714281558990
    10            2.09375         2.09765625        2.095703125    0.012862332165241
    11            2.09375        2.095703125       2.0947265625   0.0019543478265404
    12            2.09375       2.0947265625      2.09423828125  -0.0034951491979882
    13      2.09423828125       2.0947265625     2.094482421875 -0.00077077520836610
    14     2.094482421875       2.0947265625     2.094604921875  0.00059169267296965
    15     2.094482421875     2.094604921875   2.0945434570312   -8.95646760454838e-005
    16    2.09454345703125     2.094604921875   2.09457397460938  0.000251058146290006
```

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 1

Από τον πίνακα `out` τον οποίο επιστρέφει η συνάρτηση `bisect` παρατηρούμε τα εξής:

- Για τον υπολογισμό της ρίζας εκτελέστηκαν 16 επαναλήψεις (πρώτη στήλη)
- Το αριστερό άκρο του διαστήματος $a_{16} = 2.09454345703125$ (δεύτερη στήλη)
- Το δεξιό άκρο του διαστήματος $b_{16} = 2.0946044921875$ (τρίτη στήλη)
- Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας είναι $x_{16} = 2.09457397460938$ (τέταρτη στήλη)
- Η τιμή της συνάρτησης είναι $f(x_{16}) = 0.000251058146290006$ (πέμπτη στήλη)

- Επομένως, η λύση στο πρόβλημα είναι $x_{16} = 2.09457397460938$

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 1

- Καλέστε την συνάρτηση με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων
- Καλέστε την συνάρτηση με διάστημα $[-30, 30]$
- Καλέστε την συνάρτηση με διάστημα $[10, 30]$

- Τι παρατηρείτε για τις παραπάνω κλήσεις της συνάρτησης `bisect`;

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 2

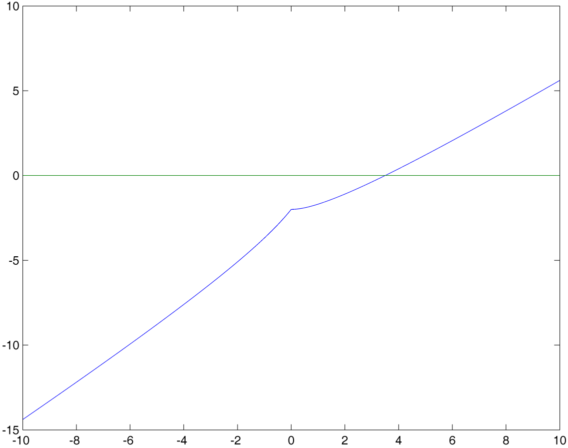
Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x - \ln(|x| + 1) - 2$ με τη μέθοδο Διχοτόμησης, με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- Για να βρούμε τη ρίζα της συνάρτησης θα πρέπει πρώτα να βρούμε ένα κατάλληλο διάστημα με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
- Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[-10, 10]$ και επιλέγουμε το κατάλληλο διάστημα[1].
- Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης επιλέγουμε το διάστημα $[3, 4]$.

---

[1] Στα πλαίσια του εργαστηρίου κατάλληλο διάστημα θα θεωρούμε το διάστημα $[a, a + 1]$ με $a \in \mathbb{Z}$

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 2



Σχήμα: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x - \ln(|x| + 1) - 2$

Μέθοδος Διχοτόμησης - Παράδειγμα 2

Σε Matlab θα έχουμε

- ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$
  ```
  f=inline('x-log(abs(x)+1)-2')
  ```
- σχεδιάζουμε την συνάρτηση $f(x)$ και τον άξονα $x'x$
  ```
  x=-10:0.001:10;
  plot(x, f(x), x, zeros(1,length(x)))
  ```
- καλούμε την συνάρτηση `bisect` με τα κατάλληλα ορίσματα
  ```
  out=bisect(f, 3, 4, 1/2*10^-4, 50)
  ```
- η λύση είναι $x_{15} = 3.50521850585938$

Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

- Το πλήθος των επαναλήψεων (n) της μεθόδου Διχοτόμησης συνδέεται με την ακρίβεια της λύσης σε δεκαδικά ψηφία (k) με τον τύπο

$$\frac{b-a}{2^n} < tol \Longrightarrow \frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

- Επομένως, μπορούμε να βρούμε είτε το n γνωρίζοντας το k, είτε το k γνωρίζοντας το n.

Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

- Για υπολογίσουμε το πλήθος των επαναλήψεων (n) της μεθόδου Διχοτόμησης με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων στο διάστημα $[a, b]$, λύνουμε ως προς n, επομένως έχουμε

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} \Longrightarrow \frac{2^n}{b-a} > 2 \cdot 10^k \Longrightarrow$$

$$2^n > (b-a) \cdot 2 \cdot 10^k \Longrightarrow$$

$$n > \log_2 \left((b-a) \cdot 2 \cdot 10^k \right)$$

Πλήθος Επαναλήψεων - Ακρίβεια

- Ενώ, για υπολογίσουμε την ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων (k) της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν n επαναλήψεις στο διάστημα $[a, b]$, λύνουμε ως προς k, επομένως έχουμε

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} \Longrightarrow 2 \cdot 10^k < \frac{2^n}{b-a} > \Longrightarrow$$

$$10^k < \frac{2^n}{2 \cdot (b-a)} \Longrightarrow$$

$$k < \log\left(\frac{2^n}{2 \cdot (b-a)}\right)$$

Πλήθος Επαναλήψεων - Παράδειγμα

Να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελέσει η μέθοδος Διχοτόμησης στο διάστημα $[1, 3]$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

- Σε Matlab θα έχουμε

```
>> log2((3-1)*2*10^4)
ans =

          15.2877123795494
```

- επειδή $n > \log_2\left((b-a)\cdot 2\cdot 10^k\right) = \log_2\left((3-1)\cdot 2\cdot 10^4\right) = 15.2877123795494$
- θα έχουμε $n = 16$.

Ακρίβεια - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν 10 επαναλήψεις στο διάστημα $[1, 3]$.

- Σε Matlab θα έχουμε

```
>> log10(2^10/(2*(3-1)))
ans =


              2.40823996531185
```

- επειδή $k < \log\left(\frac{2^n}{2\cdot(b-a)}\right) = \log\left(\frac{2^{10}}{2\cdot(3-1)}\right) = 2.40823996531185$
- θα έχουμε $k = 2$.

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + 5x - 10$$

- Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης με τη μέθοδο Διχοτόμησης, στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.
- Να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελέσει η μέθοδος Διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων.
- Να βρεθεί η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν 20 επαναλήψεις στο διάστημα $[0, 4]$.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_{20}.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης $f(x) = e^x - 5x + 1$ με τη μέθοδο Διχοτόμησης, στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε

```
>> f=inline('exp(x)+5*x-10')

f =

     Inline function:
     f(x) = exp(x)+5*x-10

>> out=bisect(f, 0, 4, 1/2*10^-6, 50)

out =

     1                  0                  4                  2        7.38905609893065
     2                  0                  2                  1       -2.28171817154095
     3                  1                  2                1.5        1.98168907033806
     4                  1                1.5               1.25      -0.259657042538159
     5               1.25                1.5              1.375       0.830076722920577
     6               1.25              1.375             1.3125       0.277950737941104
     7               1.25             1.3125            1.28125     0.00738833627217517
```

Άσκηση - Λύση

8	1.25	1.28125	1.265625	-0.126567138776458
9	1.265625	1.28125	1.2734375	-0.0596984445940976
10	1.2734375	1.28125	1.27734375	-0.0261824215879454
11	1.27734375	1.28125	1.279296875	-0.00940389788415175
12	1.279296875	1.28125	1.2802734375	-0.00100949628660274
13	1.2802734375	1.28125	1.28076171875	0.00318899091319835
14	1.2802734375	1.28076171875	1.280517578125	0.00108964006958701
15	1.2802734375	1.280517578125	1.2803955078125	4.004508383737e-005
16	1.2802734375	1.2803955078125	1.28033447265625	-0.000484732302886925
17	1.28033447265625	1.2803955078125	1.28036499023438	-0.000222345284953462
18	1.28036499023438	1.2803955078125	1.28038024902344	-9.11505194203244e-005
19	1.28038024902344	1.2803955078125	1.28038787841797	-2.5552822508601e-005
20	1.28038787841797	1.2803955078125	1.28039169311523	7.24610448443741e-006
21	1.28038787841797	1.28039169311523	1.2803897857666	-9.15336555706858e-006
22	1.2803897857666	1.28039169311523	1.28039073944092	-9.53632170563878e-007
23	1.28039073944092	1.28039169311523	1.28039121627808	3.14623574837469e-006

Η λύση είναι το $x_{23} = 1.28039121627808$

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελέσει η μέθοδος Διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 4]$ με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε

```
>> log2((4-0)*2*10^10)
ans =

          36.2192809488736
```

Άρα, $n = 37$ *επαναλήψεις.*

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων της μεθόδου Διχοτόμησης αν εκτελεστούν 20 επαναλήψεις στο διάστημα $[0, 4]$.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε

```
>> log10(2^20/(2*(4-0)))
ans =

         5.11750992628768
```

Άρα, $k = 15$ *η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων.*

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{10} *και* x_{20}

```
>>  -log10(2*abs(out(10,4)-out(9,4)))

ans =

          2.10720996964787

>> -log10(2*abs(out(20,4)-out(19,4)))

ans =

          5.11750992628768
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 2 και 5 δεκαδικά ψηφία αντίστοιχα.

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{10} *και* x_{20}

```
>> -log10(2*abs((out(10,4)-out(10,4))/out(9,4)))+1

ans =

          3.21218760440396

>> -log10(2*abs((out(20,4)-out(19,4))/out(19,4)))+1

ans =

          6.2248514802625
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 3 και 6 σημαντικά ψηφία αντίστοιχα.