Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 4)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων και συγκεκριμένα με την γενική επαναληπτική μέθοδο, η οποία υλοποιείται προγραμματιστικά σε Matlab.
Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων
    - Επαναληπτική Μέθοδος
    - Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων
    - Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων
    - Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

Επαναληπτική Μέθοδος

- Υπολογισμός μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ με χρήση ενός αναδρομικού τύπου της μορφής

$$x_n = g(x_{n-1})$$

- Για να δημιουργήσουμε τον αναδρομικό τύπο πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να γραφεί με τη μορφή $x = g(x)$.
- Για παράδειγμα, θέλουμε να βρούμε την ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$.
- Δημιουργούμε τον αναδρομικό τύπο

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 2 + 2x \Rightarrow x(x+2) = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{2+2x}{x+2}$$

Επομένως, ο αναδρομικός τύπος είναι

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

Επαναληπτική Μέθοδος - Παράδειγμα

Να βρεθούν οι 10 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$.

- Στον Editor γράφουμε

```
clear
clc
x(1)=1;
for i=2:10
    x(i)=(2+2*x(i-1))/(2+x(i-1));
end
k=1:length(x);
out=[k', x(k)']
```

Επαναληπτική Μέθοδος - Παράδειγμα

- Εκτελούμε και στο Command Window έχουμε

```
out =

                          1                              1
                          2               1.33333333333333
                          3                            1.4
                          4               1.41176470588235
                          5               1.41379310344828
                          6               1.41414141414141
                          7               1.41420118343195
                          8               1.41421143847487
                          9               1.41421319796954
                         10               1.41421349985132
```

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων

- Μια αριθμητική μέθοδος μας επιστρέφει σε κάθε βήμα μια προσέγγιση της λύσης.
- Αν η αριθμητική μέθοδος συγκλίνει, τότε η μέθοδος προσεγγίζει την λύση.
- Η ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων μας δείχνει πόσο καλά προσεγγίζει η μέθοδος την λύση σε σχέση με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.
- Η ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων δίνεται από τον τύπο

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2} 10^{-k}$$

όπου k το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων

- Λύνουμε ως προς k και έχουμε

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-k} \Rightarrow 2 \cdot |x_n - x_{n-1}| < 10^{-k} \Rightarrow$$

$$\log(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|) < \log\left(10^{-k}\right) \Rightarrow \log(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|) < -k \Rightarrow$$

$$k < -\log(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|)$$

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_8 του τύπου

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$.

- Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

```
out =

                   1                      1
                   2       1.33333333333333
                   3                    1.4
                   4       1.41176470588235
                   5       1.41379310344828
                   6       1.41414141414141
                   7       1.41420118343195
                   8       1.41421143847487
                   9       1.41421319796954
                  10       1.41421349985132
```

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_{10}, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs(out(10,2)-out(9,2)))

ans =

          6.21913310223154
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot |x_{10} - x_9|\right) = 6.21913310223154$$

θα έχουμε

$$k = 6$$

δηλαδή, η τιμη x_{10} έχει ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων.

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_8, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs(out(8,2)-out(7,2)))

ans =

          4.68803252210793
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2\cdot|x_8 - x_7|\right) = 4.68803252210793$$

θα έχουμε

$$k = 4$$

δηλαδή, η τιμή x_8 έχει ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων

- Μια αριθμητική μέθοδος μας επιστρέφει σε κάθε βήμα μια προσέγγιση της λύσης.
- Αν η αριθμητική μέθοδος συγκλίνει, τότε η μέθοδος προσεγγίζει την λύση.
- Η ακρίβεια σημαντικών ψηφίων μας δείχνει πόσο καλά προσεγγίζει η μέθοδος την λύση σε σχέση με το πλήθος των σημαντικών ψηφίων.
- Η ακρίβεια σημαντικών ψηφίων δίνεται από τον τύπο

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \frac{1}{2}10^{-(k-1)}$$

όπου k το πλήθος των σημαντικών ψηφίων.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων

- Λύνουμε ως προς k και έχουμε

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \frac{1}{2}10^{-(k-1)} \Rightarrow 2 \cdot \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < 10^{-(k-1)} \Rightarrow$$

$$\log\left(2 \cdot \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) < \log\left(10^{-(k-1)}\right) \Rightarrow$$

$$\log\left(2 \cdot \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) < -(k-1) \Rightarrow$$

$$k - 1 < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) \Rightarrow$$

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) + 1$$

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων-Παράδειγμα

Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_8 του τύπου

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$.

- Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

```
out =

                     1                        1
                     2         1.33333333333333
                     3                      1.4
                     4         1.41176470588235
                     5         1.41379310344828
                     6         1.41414141414141
                     7         1.42011834319500
                     8         1.41421143847487
                     9         1.41421319796954
                    10         1.41421349985132
```

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων-Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_{10}, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs((out(10,2)-out(9,2))/out(9,2)))+1

ans =

          7.36964798815789
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x_{10}-x_9}{x_9}\right|\right) + 1 = 7.36964798815789$$

θα έχουμε

$$k = 7$$

δηλαδή, η τιμη x_{10} έχει ακρίβεια 7 σημαντικών ψηφίων.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων-Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_8, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs((out(8,2)-out(7,2))/out(7,2)))+1

ans =

          5.8385437184424
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2\cdot\left|\frac{x_8-x_7}{x_7}\right|\right)+1 = 5.8385437184424$$

θα έχουμε

$$k = 5$$

δηλαδή, η τιμη x_8 έχει ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων.

Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

Να βρεθούν οι τιμές των x_n μέχρι να ισχύει το κριτήριο τερματισμού

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-4}$$

δηλαδή, η προσεγγιστική λύση να έχει ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

Οι τιμές των x_n δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$.

Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

- Στον Editor γράφουμε

```
clear
clc
x(1)=1;
i=2;
done=0;
while done==0
    x(i)=(2+2*x(i-1))/(2+x(i-1));
    if abs(x(i)-x(i-1))<(1/2*10^-4)
        done=1;
    else
        i=i+1;
    end
end
k=1:length(x);
out=[k', x(k)']
```

Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

- Εκτελούμε και στο Command Window έχουμε

```
out =

                         1                         1
                         2          1.33333333333333
                         3                       1.4
                         4          1.41176470588235
                         5          1.41379310344828
                         6          1.41414141414141
                         7          1.41420118343195
                         8          1.41421143847487
```

Άσκηση

- Να βρεθούν οι 20 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο
$$x_n = \frac{3 + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$$
με αρχική τιμή $x_1 = 2$.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.

Άσκηση - Λύση

Να βρεθούν οι 20 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{3 + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 2$.

- Απάντηση:
- *Στον Editor γράφουμε*

```
clear
clc
x(1)=2;
for i=2:20
    x(i)=(3+x(i-1))/(1+x(i-1));
end
k=1:length(x);
out=[k', x(k)']
```

Άσκηση - Λύση

- *Εκτελούμε και στο Command Window έχουμε*

```
>>out =


          1                   2
          2    1.66666666666667
          3                1.75
          4    1.72727272727273
          5    1.73333333333333
          6    1.73170731707317
          7    1.73214285714286
          8    1.73202614379085
          9    1.73205741626794
         10    1.73204903677758
         11    1.73205128205128
         12    1.73205068043172
         13    1.73205084163518
         14    1.73205079844084
```

Άσκηση - Λύση

```
15        1.73205081001473
16        1.73205080691351
17        1.73205080774448
18        1.73205080752182
19        1.73205080758149
20        1.7320508075655
```

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{15} και x_{20}

```
>>  -log10(2*abs(out(15,2)-out(14,2)))

ans =

          7.63549073463583

>> -log10(2*abs(out(20,2)-out(19,2)))

ans =

           10.495227442818
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 7 *και* 10 *δεκαδικά ψηφία αντίστοιχα.*

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{15} και x_{20}

```
>> -log10(2*abs((out(15,2)-out(14,2))/out(14,2)))+1

ans =

           8.8740513597069

>> -log10(2*abs((out(20,2)-out(19,2))/out(19,2)))+1

ans =

           11.733788070181
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 8 *και* 11 *σημαντικά ψηφία αντίστοιχα.*