Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Γραμμικός Προγραμματισμός και Βελτιστοποίηση (Εργαστήριο 5)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Μάρτιος 2015

Ακέραιος Προγραμματισμός

Σκοπός του εργαστηρίου είναι:

- η κατανόηση των προβλημάτων του Ακέραιου Προγραμματισμού
- τα βήματα της μεθόδου επίλυσης Κλάδου-Φράγματος
- η επίλυση των προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού με την βοήθεια του Lindo®

Ακέραιος Προγραμματισμός - Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 10x_1 + 16x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 70x_1 & + & 80x_2 & \leq & 2400 \\ 40x_1 & + & 70x_2 & \leq & 1800 \\ 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 900 \\ 130x_1 & + & 100x_2 & \leq & 4600 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{με} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

- Λύνουμε το πρόβλημα και έχουμε την λύση

$$\begin{array}{l} x_1 = 14.117647 \\ x_2 = 17.647058 \end{array} \quad \text{και} \quad z = 423.5294$$

- Το άνω φράγμα της ακέραιας λύσης μας είναι ΑΦ=423.5294
- Επιλέγουμε μια από τις δυο μεταβλητές, έστω την x_2 και την περιορίζουμε με το κάτω φράγμα και με το άνω φράγμα της.
- Δηλαδή, $x_2 \leq 17$ και $x_2 \geq 18$.
- Στο αρχικό πρόβλημα προσθέτουμε τον κάθε ένα περιορισμό ξεχωριστά και το ξαναλύνουμε.

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

Στην περίπτωση (1) το πρόβλημα γίνεται

$$\max \quad z = 10x_1 + 16x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 70x_1 & + & 80x_2 & \leq & 2400 \\ 40x_1 & + & 70x_2 & \leq & 1800 \\ 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 900 \\ 130x_1 & + & 100x_2 & \leq & 4600 \\ & & x_2 & \leq & 17 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{με} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

το οποίο έχει την λύση

$$\begin{array}{c} x_1 = 14.857142 \\ x_2 = 17 \end{array} \quad \text{και} \quad z = 420.5714$$

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

Στην περίπτωση (2) το πρόβλημα γίνεται

$$\max \quad z = 10x_1 + 16x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 70x_1 & + & 80x_2 & \leq & 2400 \\ 40x_1 & + & 70x_2 & \leq & 1800 \\ 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 900 \\ 130x_1 & + & 100x_2 & \leq & 4600 \\ & & x_2 & \geq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{με} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

το οποίο έχει την λύση

$$\begin{array}{r} x_1 = 13.5 \\ x_2 = 18 \end{array} \quad \text{και} \quad z = 423$$

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

- Διαλέγουμε την λύση που είναι πιο κοντά στο αρχικό ΑΦ
- Δηλαδή, την περίπτωση (2) και ορίζουμε ΑΦ=423
- Επιλέγουμε την άλλη μεταβλητή (η επιλογή γίνεται εναλλάξ), την x_1 και την περιορίζουμε με το κάτω φράγμα και με το άνω φράγμα της.
- Δηλαδή, $x_1 \leq 13$ και $x_1 \geq 14$.
- Στο αρχικό πρόβλημα προσθέτουμε τον κάθε ένα περιορισμό ξεχωριστά και το ξαναλύνουμε.

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να βρεθεί σε κάθε περίπτωση ακέραια λύση.
- Σε κάθε νέα περίπτωση η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μικρότερη ή ίση της προηγούμενης.
- Η μεγαλύτερη ακέραια λύση ορίζεται ως το κάτω φράγμα (ΚΦ).
- Η διαδικασία σταματά όταν το ΑΦ είναι μικρότερο από το ΚΦ.
- Η μέθοδος Κλάδου-Φράγματος μπορεί να αναπαρασταθεί με δυαδικό δέντρο

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 14.117647 \\
x_2 &= 17.647058 \\
z &= 423.5294 \text{ (ΑΦ)}
\end{aligned}
$$

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

$$x_1 = 14.117647$$
$$x_2 = 17.647058$$
$$z = 423.5294$$

$x_2 \leq 17$

$x_2 \geq 18$

$$x_1 = 14.857142$$
$$x_2 = 17$$
$$z = 420.5714$$

$$x_1 = 13.5$$
$$x_2 = 18$$
$$z = 423 \text{ (ΑΦ)}$$

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

- $x_1 = 14.117647$, $x_2 = 17.647058$, $z = 423.5294$
  - $x_2 \leq 17$: $x_1 = 14.857142$, $x_2 = 17$, $z = 420.5714$
  - $x_2 \geq 18$: $x_1 = 13.5$, $x_2 = 18$, $z = 423$
    - $x_1 \leq 13$: $x_1 = 13$, $x_2 = 18.285715$, $z = 422.5714$ (ΑΦ)
    - $x_1 \geq 14$: *No Feasible Solution*

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

$x_1 = 14.117647$
$x_2 = 17.647058$
$z = 423.5294$

$x_2 \le 17$

$x_1 = 14.857142$
$x_2 = 17$
$z = 420.5714$

$x_2 \ge 18$

$x_1 = 13.5$
$x_2 = 18$
$z = 423$

$x_1 \le 13$

$x_1 = 13$
$x_2 = 18.285715$
$z = 422.5714$

$x_2 \le 18$

$x_1 = 13$
$x_2 = 18$
$z = 418$ (ΚΦ)

$x_2 \ge 19$

$x_1 = 11.75$
$x_2 = 19$
$z = 421.5$ (ΑΦ)

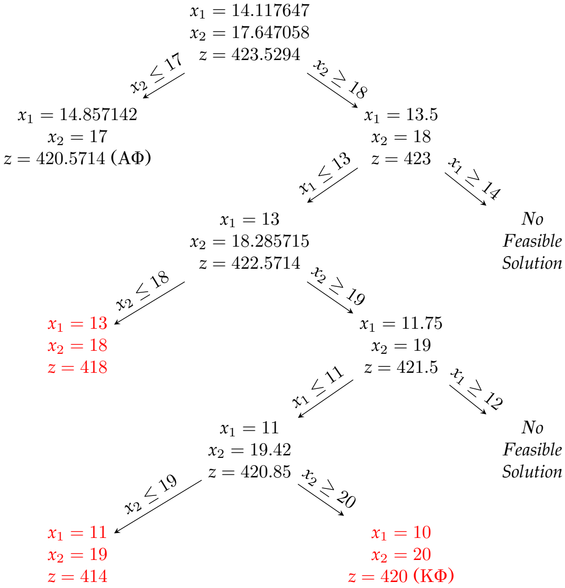
$x_1 \ge 14$

No Feasible Solution

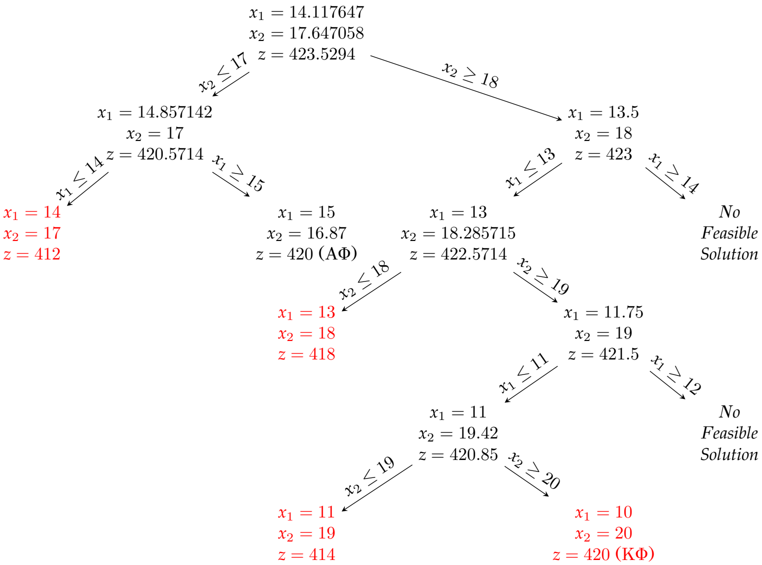
Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

- $x_1 = 14.117647$, $x_2 = 17.647058$, $z = 423.5294$
  - $x_2 \leq 17$: $x_1 = 14.857142$, $x_2 = 17$, $z = 420.5714$
  - $x_2 \geq 18$: $x_1 = 13.5$, $x_2 = 18$, $z = 423$
    - $x_1 \leq 13$: $x_1 = 13$, $x_2 = 18.285715$, $z = 422.5714$
      - $x_2 \leq 18$: $x_1 = 13$, $x_2 = 18$, $z = 418$ (ΚΦ)
      - $x_2 \geq 19$: $x_1 = 11.75$, $x_2 = 19$, $z = 421.5$
        - $x_1 \leq 11$: $x_1 = 11$, $x_2 = 19.42$, $z = 420.85$ (ΑΦ)
        - $x_1 \geq 12$: *No Feasible Solution*
    - $x_1 \geq 14$: *No Feasible Solution*

Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος



Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος



Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος

Η ακέραια λύση του προβλήματος είναι το κάτω φράγμα του δέντρου

$$\begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_2 = 20 \end{matrix} \quad \text{με} \quad z = 420$$

Για να λύσουμε απευθείας το πρόβλημα στο Lindo® γράφουμε

```
max 10x1+16x2
st
70x1+80x2<2400
40x1+70x2<1800
30x1+20x2<900
130x1+100x2<4600
end
GIN x1
GIN x2
```