Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

# Γραμμικός Προγραμματισμός και Βελτιστοποίηση (Εργαστήριο 3)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Μάρτιος 2015

## Μοντελοποίηση - Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

Σκοπός του εργαστηρίου είναι:

- η μοντελοποίηση των ΠΓΠ
- η επίλυση του ΠΓΠ με το ειδικό λογισμικό Lindo®
- η ανάγνωση των αποτελεσμάτων (αναφορών) του Lindo® και η εύρεση των παραμέτρων της ανάλυσης ευαισθησίας
- η σωστή ερμηνεία των παραμέτρων της ανάλυσης ευαισθησίας
- η λήψη αποφάσεων με βάση την ανάλυση ευαισθησίας

# Μοντελοποίηση

Μια εταιρεία κατασκευής κινητών τηλεφώνων πρόκειται να προγραμματίσει την ημερήσια παραγωγή της για τα μοντέλα Μ1 και Μ2.
Τα δύο μοντέλα χρειάζονται από 1 ώρα για την κατασκευή τους. Το Μ1 χρειάζεται 2 ώρες για τον προγραμματισμό του λογισμικού του ενώ το Μ2 χρειάζεται αντίστοιχα 1 ώρα. Το τμήμα κατασκευής διαθέτει 9 ώρες ημερησίως ενώ το τμήμα προγραμματισμού διαθέτει 16 ώρες ημερησίως.
Οι πωλήσεις των κινητών απαιτούν τα μοντέλα Μ1 να είναι τουλάχιστον διπλάσια από τα μοντέλα Μ2. Αν το κέρδος για κάθε κινητό Μ1 είναι 200€ και για κάθε κινητό Μ2 είναι 350€ να υποδειχθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για την γραμμή παραγωγής της εταιρείας που να μεγιστοποιεί τα κέρδη και να λυθεί.

# Μοντελοποίηση

Να υποδειχθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για την γραμμή παραγωγής της εταιρείας που να μεγιστοποιεί τα κέρδη.
Ορίζουμε
$x_1$ ο αριθμός παραγωγής των μοντέλων Μ1 και
$x_2$ ο αριθμός παραγωγής των μοντέλων Μ2.
Τότε το πρόβλημα γίνεται

$$\max\ z = 200x_1 + 350x_2 \quad (\text{σε } €)$$

με περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & \leq & 9 & (\text{τμήμα κατασκευής}) \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 16 & (\text{τμήμα προγραμματισμού}) \\ x_1 & - & 2x_2 & \geq & 0 & (\text{περιορισμός πωλήσεων}) \end{array}$$

με $x_1, x_2 \geq 0$

# Μοντελοποίηση

Να λυθεί.
Το Lindo® μας επιστρέφει

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      2250.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         6.000000          0.000000
        X2         3.000000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000        250.000000
        3)         1.000000          0.000000
        4)         0.000000        -50.000000
```

Επομένως, θα κατασκευαστούν 6 κινητά M1 και 3 κινητά M2.
Το καθαρό κέρδος είναι 2250 €

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

Μία οικογενειακή αγροτική επιχείρηση διαθέτει 410 στρέμματα καλλιεργήσιμης γης στην περιοχή των Σερρών, στην οποία καλλιεργεί καπνό και ρύζι.
Κάθε στρέμμα που καλλιεργείται με καπνό κοστίζει κατά μέσο όρο € 105,00 ενώ κάθε στρέμμα ρυζιού κοστίζει αντίστοιχα € 210,00.
Η επιχείρηση αυτή διαθέτει έναν προϋπολογισμό € 52.500,00 για την τρέχουσα χρονιά.
Επιπλέον, ο Αγροτικός Συνεταιρισμός Σερρών περιορίζει το πλήθος των στρεμμάτων, που μπορούν καλλιεργηθούν με ρύζι σε 100 και το κάθε στρέμμα καπνού αποδίδει κατά μέσο όρο € 300,00 καθαρό κέρδος ενώ το κάθε στρέμμα ρυζιού € 520,00.

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

1. Να διαμορφωθεί ένα πρότυπο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό του βέλτιστου τρόπου καλλιέργειας.
2. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος αυτού με το Lindo® (δηλαδή να βρεθεί πόση έκταση θα καλλιεργηθεί από το κάθε προϊόν και πόσο θα είναι το καθαρό κέρδος).
3. Θα μείνει ακαλλιέργητη έκταση και αν ναι, πόση;
4. Θα καλλιεργηθούν όλα τα επιτρεπόμενα στρέμματα ρυζιού;

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

5. Ένας γείτονας προσπαθεί να πείσει την επιχείρηση αυτή να νοικιάσει τη δική του γη προς € 100,00 το στρέμμα.
   Θα πρέπει να δεχθεί;
6. Η επιχείρηση σκέφτεται να νοικιάσει 80 στρέμματα από τον γείτονα με ενοίκιο 65 €/στρέμμα.
   Μπορεί να τα νοικιάσει χωρίς να αλλάξει η λύση του προβλήματος;
   Πόσο θα είναι το κέρδος της επιχείρησης;
7. Αν υποτεθεί ότι η επιχείρηση αυτή σκέφτεται να πάρει ένα δάνειο, ώστε να αυξήσει τον προϋπολογισμό της. Ο τόκος για το δάνειο αυτό είναι 25%.
   Συμφέρει να προχωρήσει στη σύναψη του δανείου;
8. Η επιχείρηση σκέφτεται να αυξήσει το κέρδος για κάθε στρέμμα ρυζιού σε 650,00 €.
   Θα αλλάξει η άριστη λύση του προβλήματος ή όχι;

1. Να διαμορφωθεί ένα πρότυπο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό του βέλτιστου τρόπου καλλιέργειας.

Ορίζουμε
$x_1$ τα στρέμματα που θα καλλιεργηθούν με καπνό και
$x_2$ τα στρέμματα που θα καλλιεργηθούν με ρύζι.
Τότε το πρόβλημα γίνεται

$$\max\ z = 300x_1 + 520x_2 \quad (\text{σε } €)$$

με περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & \leq & 410 & (\text{διαθέσιμα στρέμ.προς καλλιέργεια}) \\ 105x_1 & + & 210x_2 & \leq & 52500 & (\text{περιορισμός τζίρου}) \\ & & x_2 & \leq & 100 & (\text{περιορισμός για καλλιέργεια ρυζιού}) \end{array}$$

με $x_1, x_2 \geq 0$

2. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος αυτού με το Lindo® (δηλαδή να βρεθεί πόση έκταση θα καλλιεργηθεί από το κάθε προϊόν και πόσο θα είναι το καθαρό κέρδος).

Το Lindo® μας επιστρέφει

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      142800.0
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1       320.000000         0.000000
        X2        90.000000         0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000        80.000000
        3)         0.000000         2.095238
        4)        10.000000         0.000000
```

Επομένως, θα καλλιεργηθούν 320 στρέμματα καπνού και 90 στρέμματα ρυζιού.
Το καθαρό κέρδος είναι 142800 €

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

3. Θα μείνει ακαλλιέργητη έκταση και αν ναι, πόση;

Έχουμε

$$x_1 + x_2 = 320 + 90 = 410$$

όσα και τα διαθέσιμα στρέμματα της επιχείρησης, άρα δεν θα μείνει ακαλλιέργητη κάποια έκταση.

4. Θα καλλιεργηθούν όλα τα επιτρεπόμενα στρέμματα ρυζιού;

Όχι, δεν θα καλλιεργηθούν όλα τα επιτρεπόμενα στρέμματα ρυζιού διότι

$$x_2 = 90 < 100$$

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

5. Ένας γείτονας προσπαθεί να πείσει την επιχείρηση αυτή να νοικιάσει τη δική του γη προς € 100,00 το στρέμμα. Θα πρέπει να δεχθεί;

Η δυϊκή τιμή του πρώτου περιορισμού (διαθέσιμα στρέμ.προς καλλιέργεια) είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_1} = 80$$

δηλαδή, για κάθε ένα στρέμμα παραπάνω που θα καλλιεργηθεί το κέρδος είναι 80 €.
Επομένως, επειδή $80 < 100$ δεν πρέπει να δεχθεί την πρόταση.

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

6. Η επιχείρηση σκέφτεται να νοικιάσει 80 στρέμματα από τον γείτονα με ενοίκιο 65 €/στρέμμα. Μπορεί να τα νοικιάσει χωρίς να αλλάξει η λύση του προβλήματος;

Το Lindo® μας επιστρέφει

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT          ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF            INCREASE         DECREASE
       X1      300.000000        220.000000        40.000000
       X2      520.000000         80.000000       220.000000
                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT          ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS            INCREASE         DECREASE
        2      410.000000         90.000000        10.000000
        3    52500.000000       1050.000000      9450.000000
        4      100.000000          INFINITY        10.000000
```

Τα στρέμματα μπορούμε να τα αυξήσουμε κατά 90 (Εύρος εφικτότητας πρώτου περιορισμού) άρα, η επιχείρηση μπορεί να τα νοικιάσει χωρίς να αλλάξει η λύση του προβλήματος

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

6. Η επιχείρηση σκέφτεται να νοικιάσει 80 στρέμματα από τον γείτονα με ενοίκιο 65 €/στρέμμα. Πόσο θα είναι το κέρδος της επιχείρησης;

Η δυϊκή τιμή του πρώτου περιορισμού (διαθέσιμα στρέμ.προς καλλιέργεια) είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_1} = 80$$

δηλαδή, για κάθε ένα στρέμμα παραπάνω που θα καλλιεργηθεί το κέρδος είναι $80 - 65 = 15$ €.
Επομένως, η επιχείρηση θα έχει 80 στρέμματα $\times 15$€/στρέμμα $=$ 1200 € κέρδος.
Άρα, συνολικά θα έχει 142800+1200=144000 € κέρδος.

7. Αν υποτεθεί ότι η επιχείρηση αυτή σκέφτεται να πάρει ένα δάνειο, ώστε να αυξήσει τον προϋπολογισμό της. Ο τόκος για το δάνειο αυτό είναι 25%. Συμφέρει να προχωρήσει στη σύναψη του δανείου;

Η δυϊκή τιμή του δεύτερου περιορισμού (περιορισμός τζίρου) είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_2} = 2.095238$$

δηλαδή, για κάθε ένα 1 € παραπάνω που θα προστεθεί στον προϋπολογισμό το κέρδος είναι 2.095238 €.
Για κάθε 1 € που θα δανειστεί η επιχείρηση θα πρέπει να καταβάλει 1.25 € Επομένως, η επιχείρηση θα έχει 2.095238 - 1.25 = 0.845238 € κέρδος.

# Προβλήματα Ανάλυσης Ευαισθησίας

8. Η επιχείρηση σκέφτεται να αυξήσει το κέρδος για κάθε στρέμμα ρυζιού σε 650,00 €. Θα αλλάξει η άριστη λύση του προβλήματος ή όχι;

Η επιτρεπόμενη αύξηση για τον αντικειμενικό συντελεστή $c_2$ είναι 80.
Επομένως, θα αλλάξει η άριστη λύση του προβλήματος, επειδή 650-520=130>80.