Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Γραμμικός Προγραμματισμός και Βελτιστοποίηση (Εργαστήριο 2)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Μάρτιος 2015

Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού (ΠΓΠ) με το Lindo®

Σκοπός του εργαστηρίου είναι:

- η παρουσίαση του ειδικού λογισμικού Lindo®
- Η εισαγωγή ενός ΠΓΠ στον Editor του Lindo®
- η ανάγνωση των αποτελεσμάτων (αναφορών) του Lindo®

- Στον editor του Lindo® γράφουμε το ΠΓΠ ως εξής:
  - Στην πρώτη γραμμή γράφουμε την αντικειμενική συνάρτηση
  - Ακολουθεί το τμήμα των περιορισμών το οποίο περικλείεται από την δήλωση `st` ή `subject to` και την δήλωση `end`
  - Στο τέλος δηλώνουμε τον τύπο των μεταβλητών.
    Ο προκαθορισμένος τύπος μεταβλητών είναι πραγματικές μη αρνητικές ($x_i \geq 0$) και το τμήμα αυτό είναι προαιρετικό.

Εισαγωγή στο Lindo®

- Δίνεται το παρακάτω ΠΓΠ με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Το παραπάνω ΠΓΠ γράφεται στον Editor του Lindo® :

```
max 5x1+3x2
st
3x1+5x2<15
5x1+2x2<10
end
```

Εισαγωγή στο Lindo®

- Η δήλωση της αντικειμενικής συνάρτησης ξεκινά με τη δήλωση `max` ή τη δήλωση `min`.
- Για την πράξη του πολλαπλασιασμού δεν απαιτείται κάποιος τελεστής.
- Η πράξη της διαίρεσης δεν ορίζεται.
- Οι τελεστές $>$ και $<$ έχουν την έννοια $\geq$ και $\leq$ αντίστοιχα.
- Στην δήλωση του τύπου των μεταβλητών έχουμε τις παρακάτω επιλογές
    - `free`, μεταβλητή ελεύθερη προσήμου
    - `int`, δυαδική μεταβλητή ($x_i \in \{0, 1\}$)
    - `gin`, ακέραια μη αρνητική μεταβλητή

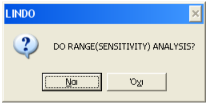
- Για παράδειγμα το παρακάτω ΠΓΠ

```
max 5x1+3x2
st
3x1+5x2<15
5x1+2x2<10
end
int x1
gin x2
```

- Το Lindo® θα το λύσει ως πρόβλημα μεικτού Γραμμικού Προγραμματισμού (συνδυασμός ακέραιου με δυαδικού προγραμματισμού)

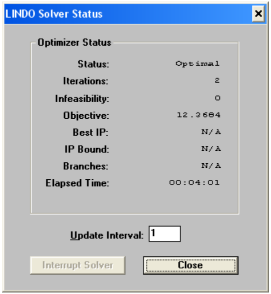
Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- Αρχικά, γράφουμε στον Editor το ΠΓΠ.
- Έπειτα, επιλέγουμε από το Menu Solve την επιλογή Solve (Ctrl+S)
- Εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου για το αν θέλουμε να γίνει ανάλυση ευαισθησίας ή όχι



Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- Είτε επιλέξουμε ναι είτε όχι εμφανίζεται και το παράθυρο LINDO Solver Status το οποίο μας δίνει για την λύση του ΠΓΠ



- Στην περίπτωση που επιλέξουμε **όχι** στο παράθυρο διαλόγου εμφανίζεται στο Reports Window η λύση του ΠΓΠ

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      12.36842

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         1.052632          0.000000
        X2         2.368421          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.263158
        3)         0.000000          0.842105

 NO. ITERATIONS=       2
```

Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- Στη γραμμή `1)` έχουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (`OBJECTIVE FUNCTION VALUE`).
- Στις στήλες `VARIABLE` και `VALUE` έχουμε τις μεταβλητές και τις αντίστοιχες τιμές τους.
- Στις γραμμές `2)` και `3)` και στη στήλη `DUAL PRICES` έχουμε τις δυϊκές τιμές των περιορισμών.
  - Η γραμμή `2)` αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό και η γραμμή `3)` αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό
- Στο τέλος έχουμε τον αριθμό των επαναλήψεων.

Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- Έχουμε την δυνατότητα να ονομάσουμε την κάθε γραμμή και αντί του αύξοντα αριθμού στο Reports Window να εμφανίζεται το όνομα των περιορισμών αντίστοιχα.
- Στον Editor γράφουμε

```
max 5x1+3x2
st
a) 3x1+5x2<15
b) 5x1+2x2<10
end
```

Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- θα εμφανιστεί

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      12.36842

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         1.052632          0.000000
       X2         2.368421          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       A)         0.000000          0.263158
       B)         0.000000          0.842105

NO. ITERATIONS=       2
```

Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- Ενώ, στην περίπτωση που επιλέξουμε **ναι** στο παράθυρο διαλόγου εμφανίζεται στο Reports Window η λύση του ΠΓΠ και η ανάλυση ευαισθησίας

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
       X1       5.000000         2.500000         3.200000
       X2       3.000000         5.333333         1.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE         DECREASE
        2      15.000000        10.000000         9.000000
        3      10.000000        15.000001         4.000000
```

Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- Στο πρώτο μέρος έχουμε το εύρος αριστότητας `OBJ COEFFICIENT RANGES.`
  Για κάθε μεταβλητή `VARIABLE` έχουμε
  - την τρέχουσα τιμή του αντικειμενικού συντελεστή `CURRENT COEF`
  - την επιτρεπόμενη αύξηση `ALLOWABLE INCREASE`
  - την επιτρεπόμενη μείωση `ALLOWABLE DECREASE`
- Στο δεύτερο μέρος έχουμε το εύρος εφικτότητας `RIGHTHAND SIDE RANGES.`
  Για κάθε περιορισμό (γραμμή) `ROW` έχουμε
  - την τρέχουσα τιμή του δεξιού μέλους του περιορισμού `CURRENT RHS`
  - την επιτρεπόμενη αύξηση `ALLOWABLE INCREASE`
  - την επιτρεπόμενη μείωση `ALLOWABLE DECREASE`

Επίλυση ΠΓΠ με το Lindo®

- Επομένως το ΠΓΠ με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

έχει λύση

- $\begin{array}{l} x_1 = 1.052632 \\ x_2 = 2.368421 \end{array}$ και $z = 12.36842$

- Ο πρώτος περιορισμός έχει δυϊκή τιμή $\dfrac{\Delta z}{\Delta b_1} = 0.263158$
- Ο δεύτερος περιορισμός έχει δυϊκή τιμή $\dfrac{\Delta z}{\Delta b_2} = 0.842105$
- Το εύρος αριστότητας του πρώτου αντικειμενικού συντελεστή είναι $c_1 \in [5 - 3.2, 5 + 2.5] = [1.8, 7.5]$
- Το εύρος αριστότητας του δεύτερου αντικειμενικού συντελεστή είναι $c_2 \in [3 - 1, 3 + 5.33333] = [2, 8.33333]$
- Το εύρος εφικτότητας του δεξιού μέλους του πρώτου περιορισμού είναι $b_1 \in [15 - 9, 15 + 10] = [6, 25]$
- Το εύρος εφικτότητας του δεξιού μέλους του δεύτερου περιορισμού είναι $b_2 \in [10 - 4, 10 + 15] = [6, 25]$

Ειδικές Περιπτώσεις - Lindo®

- Δίνεται το ΠΓΠ με αντικειμενική συνάρτηση

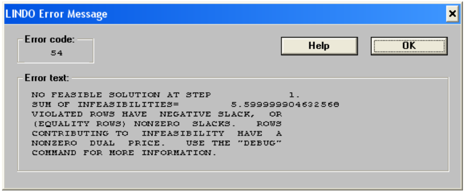
$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Το παράθυρο διαλόγου μας ενημερώνει ότι το ΠΓΠ δεν έχει εφικτή περιοχή



Ειδικές Περιπτώσεις - LINDO®

- Δίνεται το ΠΓΠ με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 2x_1 + 2x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & \geq & -1 \\ -\frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Το παράθυρο διαλόγου μας ενημερώνει ότι το ΠΓΠ έχει μη φραγμένη εφικτή περιοχή