



Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Γραμμικός Προγραμματισμός και Βελτιστοποίηση (Εργαστήριο 1)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Μάρτιος 2015

Γραφική επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού (ΠΓΠ) με MATLAB®

Σκοπός του εργαστηρίου είναι:

- η σχεδίαση της εφικτής περιοχής ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και
- η εύρεση της βέλτιστης λύσης του προβλήματος

- Δίνεται το παρακάτω ΠΓΠ με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

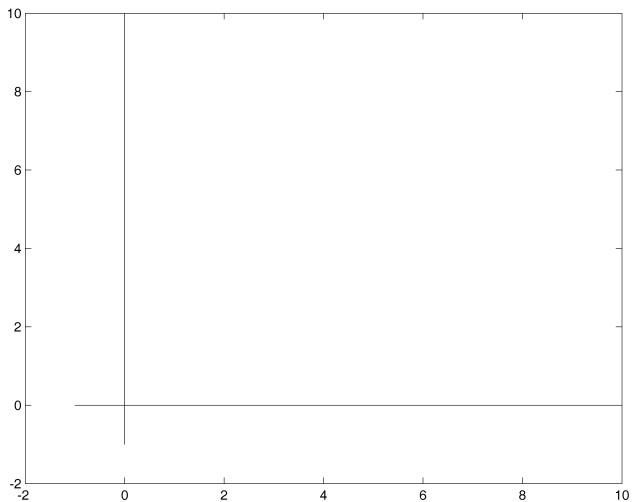
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Θέλουμε να βρούμε το ζεύγος (x_1, x_2) που πληροί τους περιορισμούς και μας επιστρέφει την μεγαλύτερη τιμή του z .

- Αρχικά, σχεδιάζουμε τους άξονες x και y και ειδικότερα το πρώτο τεταρτημόριο.
- Το εύρος των αξόνων επιλέγουμε να είναι $[-1, 10]$.

```
1 clc
2 clear
3 plot([-1, 10], [0, 0], 'k', [0, 0], [-1, 10], 'k')
```

Γραφική επίλυση ΠΓΠ



- Έπειτα, βρίσκουμε τα κατάλληλα σημεία των ευθειών (περιορισμών) για να τις σχεδιάσουμε.
- Επιλέγουμε τα σημεία με τετμημένες $x_1 = -1$ και $x_1 = 10$ για να σχεδιαστεί η ευθεία στο εύρος των αξόνων.

- Για τον πρώτο περιορισμό

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 - 15 = 0 \\ x_1 = -1 \end{array} \right\} \implies -3 + 5x_2 - 15 = 0 \implies x_2 = \frac{18}{5}$$

άρα $\left(-1, \frac{18}{5}\right)$

- Για να βρούμε τα σημεία τομής χρησιμοποιούμε την εντολή solve ως εξής

```
syms x1 x2  
[x, y]=solve('3*x1+5*x2-15', 'x1+1')
```

το οποίο επιστρέφει

```
x =  
-1  
y =  
18/5
```

- Για τον πρώτο περιορισμό

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 - 15 = 0 \\ x_1 = 10 \end{array} \right\} \implies 30 + 5x_2 - 15 = 0 \implies x_2 = -3$$

άρα $(10, -3)$

- Για να βρούμε τα σημεία τομής χρησιμοποιούμε την εντολή solve ως εξής

```
syms x1 x2  
[x, y]=solve('3*x1+5*x2-15', 'x1-10')
```

το οποίο επιστρέφει

```
x =  
    10  
y =  
    -3
```


- Για τον δεύτερο περιορισμό

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \\ x_1 = -1 \end{array} \right\} \implies -5 + 2x_2 - 10 = 0 \implies x_2 = \frac{15}{2}$$

άρα $\left(-1, \frac{15}{2}\right)$

- Για να βρούμε τα σημεία τομής χρησιμοποιούμε την εντολή solve ως εξής

```
syms x1 x2  
[x, y]=solve('5*x1+2*x2-10', 'x1+1')
```

το οποίο επιστρέφει

```
x =  
-1  
y =  
15/2
```

- Για τον δεύτερο περιορισμό

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \\ x_1 = 10 \end{array} \right\} \implies 50 + 2x_2 - 10 = 0 \implies x_2 = -20$$

άρα $(10, -20)$

- Για να βρούμε τα σημεία τομής χρησιμοποιούμε την εντολή solve ως εξής

```
syms x1 x2  
[x, y]=solve('5*x1+2*x2-10', 'x1-10')
```

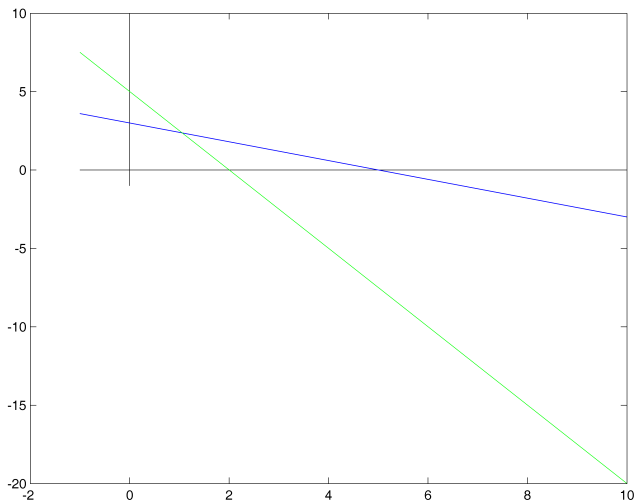
το οποίο επιστρέφει

```
x =  
    10  
y =  
   -20
```

- Σχεδιάζουμε τις ευθείες μαζί με τους άξονες

```
1 clc
2 clear
3 plot([-1, 10],[0, 0], 'k', [0, 0],[-1, 10], 'k')
4 hold on
5 plot([-1,10],[18/5,-3])
6 plot([-1,10],[15/2,-20], 'g')
7 hold off
```

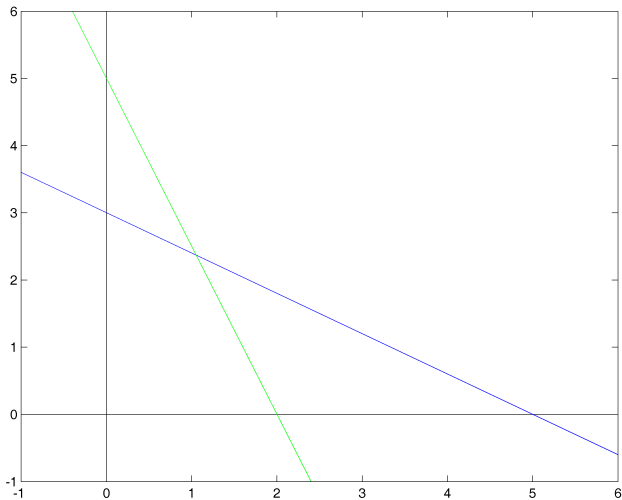
Γραφική επίλυση ΠΓΠ



- Με την εντολή `axis` καθορίζουμε το εύρος των αξόνων της γραφικής παράστασης

```
1 clc
2 clear
3 plot([-1, 10], [0, 0], 'k', [0, 0], [-1, 10], 'k')
4 hold on
5 plot([-1, 10], [18/5, -3])
6 plot([-1, 10], [15/2, -20], 'g')
7 axis([-1 6 -1 6])
8 hold off
```

Γραφική επίλυση ΠΓΠ



- Για να βρούμε το σημείο τομής

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 - 15 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \end{array} \right\} \implies \dots \implies \begin{array}{l} x_1 = \frac{20}{19} \\ x_2 = \frac{45}{19} \end{array}$$

- Για να βρούμε το σημείο τομής χρησιμοποιούμε την εντολή `solve` ως εξής

```
syms x1 x2
[x, y]=solve('3*x1+5*x2-15', '5*x1+2*x2-10')
```

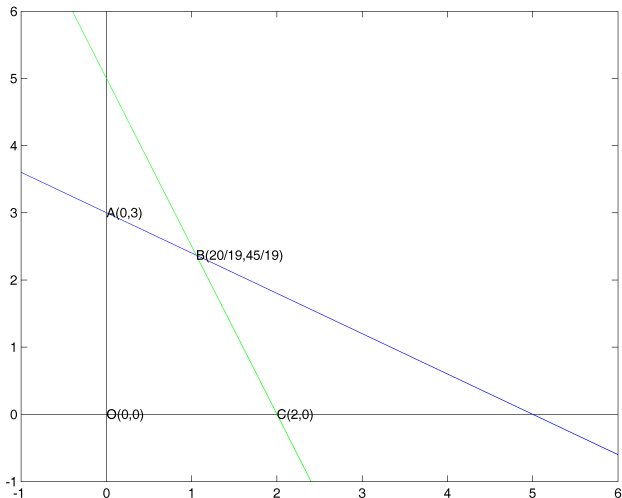
το οποίο επιστρέφει

```
x =
    20/19
y =
    45/19
```

- Με την εντολή `text` ονομάζουμε τα σημεία της γραφικής παράστασης

```
1  clc
2  clear
3  plot([-1, 10],[0, 0], 'k', [0, 0], [-1, 10], 'k')
4  hold on
5  plot([-1,10],[18/5,-3])
6  plot([-1,10],[15/2,-20], 'g')
7  axis([-1 6 -1 6])
8  text(0,0, 'O(0,0)')
9  text(0,3, 'A(0,3)')
10 text(20/19,45/19, 'B(20/19,45/19)')
11 text(2,0, 'C(2,0)')
12 hold off
```

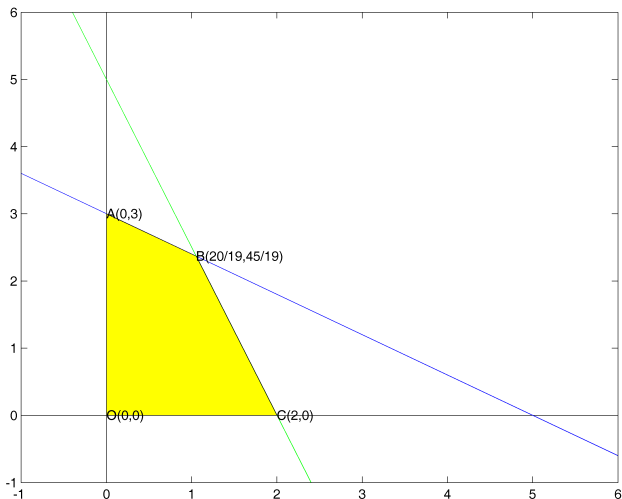

Γραφική επίλυση ΠΓΠ



- Με την εντολή `fill` “γεμίζουμε” με χρώμα μια κλειστή πολυγωνική περιοχή

```
1  clc
2  clear
3  plot([-1, 10],[0, 0], 'k',[0, 0],[-1, 10], 'k')
4  hold on
5  plot([-1,10],[18/5,-3])
6  plot([-1,10],[15/2,-20], 'g')
7  fill([0,0,20/19,2,0],[0,3,45/19,0,0], 'y')
8  axis([-1 6 -1 6])
9  text(0,0, 'O(0,0)')
10 text(0,3, 'A(0,3)')
11 text(20/19,45/19, 'B(20/19,45/19)')
12 text(2,0, 'C(2,0)')
13 hold off
```

Γραφική επίλυση ΠΓΠ



- Τέλος, ορίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση ως inline συνάρτηση του Matlab και υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε σημείο.

```
f=inline('5*x1+3*x2')
f(0,0)
ans =
    0
f(0,3)
ans =
    9
f(20/19,45/19)
ans =
    12.3684210526316
f(2,0)
ans =
    10
```

- Επομένως, το σημείο

$$\left(x_1 = \frac{20}{19}, x_2 = \frac{45}{19} \right)$$

είναι η λύση του ΠΓΠ

- με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = \frac{235}{19} = 12.3684210526316$$

- Δίνεται το παρακάτω ΠΓΠ με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 2x_1 + 2x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 7$$

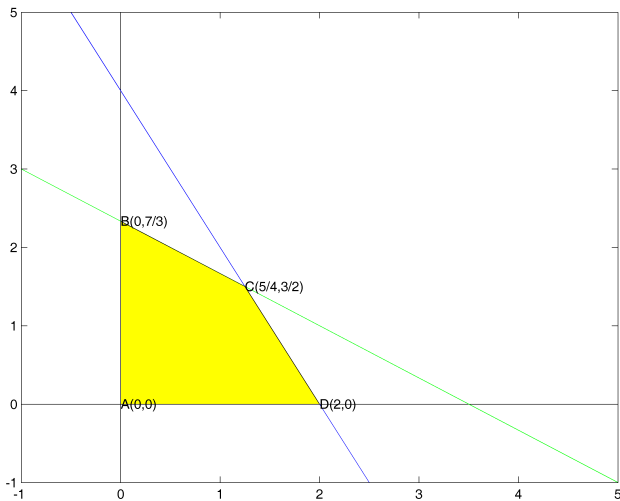
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Να σχεδιαστεί η εφικτή περιοχή του προβλήματος και να βρεθεί η λύση του.

- Δημιουργούμε το m-file

```
1  clc
2  clear
3  plot([-1, 10],[0, 0], 'k', [0, 0], [-1, 10], 'k')
4  hold on
5  plot([-1,10],[6,-16])
6  plot([-1,10],[3,-13/3], 'g')
7  fill([0 0 5/4 2 0],[0 7/3 3/2 0 0], 'y')
8  text(0,0, 'A(0,0)')
9  text(0,7/3, 'B(0,7/3)')
10 text(5/4,3/2, 'C(5/4,3/2)')
11 text(2,0, 'D(2,0)')
12 hold off
13 axis([-1 5 -1 5])
```

Άσκηση - Λύση



Άσκηση - Λύση

- Υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε σημείο.

```
f=inline('2*x1+2*x2')
f(0,0)
ans =
    0
f(0,7/3)
ans =
    4.666666666666667
f(5/4,3/2)
ans =
    5.5
f(2,0)
ans =
    4
```

- Επομένως, το σημείο

$$\left(x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{3}{2} \right)$$

είναι η λύση του ΠΓΠ

- με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = \frac{11}{2} = 5.5$$