Τεχνολογικο Εκπαιδευτικο Ιδρυμα Κεντρικης Μακεδονιας - Σερρες
Τμημα Μηχανικων Πληροφορικης

Γραμμικός Προγραμματισμός & Βελτιστοποίηση

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Καθηγητής Εφαρμογών

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης (ή ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης), η οποία εξαρτάται από ένα σύνολο μεταβλητών απόφασης, με την προϋπόθεση ότι τηρούνται κάποιοι περιορισμοί ως προς τις τιμές των μεταβλητών αυτών, οι οποίοι εκφράζονται μέσα από ένα σύνολο γραμμικών ισοτήτων και/ή ανισοτήτων. Ο πιο διαδεδομένος τρόπος αναπαράστασης (καλείται γενική μορφή-general form) ενός γραμμικού προβλήματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Μαθηματική αναπαράσταση του Π.Γ.Π.
  Αντικειμενική συνάρτηση

$$max \text{ ή } min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Αν και η γεωμετρική ερμηνεία των προβλημάτων είναι αρκετά σημαντική δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλα τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και αυτό γιατί στην πράξη τα περισσότερα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού έχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές.
- Η κύρια μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι η μέθοδος Simplex , ένας αλγόριθμος αριστοποίησης ο οποίος χαρακτηρίζεται από ένα αριθμό επαναλαμβανόμενων βημάτων τα οποία μπορούν να κωδικοποιηθούν στον Η/Υ.
- Προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex σε ένα π.γ.π. είναι ο μετασχηματισμός του στην τυπική του μορφή.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

Ορισμός

Ένα π.γ.π. είναι σε τυπική μορφή αν

- είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
- όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς τους σταθερούς ορούς (δεξιά μέλη περιορισμών)
- όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Άρα η τυπική μορφή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η εξής:
  Αντικειμενική συνάρτηση

$$max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$$

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Για να μπορέσουμε να λύσουμε ένα π.γ.π. θα πρέπει πρώτα να το μετατρέψουμε στην τυπική του μορφή
- Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να αναχθεί στην τυπική μορφή με την χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Περιθώριες μεταβλητές
- Περιορισμοί που εκφράζονται με ανισώσεις μπορούν να μετατραπούν σε εξισώσεις με την εισαγωγή νέων μη αρνητικών μεταβλητών οι οποίες μπορούν να μετατρέψουν τις ανισώσεις σε εξισώσεις. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται περιθώριες.
- Υπάρχουν δύο είδη περιθώριων μεταβλητών οι χαλαρές και οι πλεονασματικές.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Χαλαρή μεταβλητή
- Σε ένα περιορισμό της μορφής $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n \leq b_i$ θεωρούμε μια νέα μεταβλητή $x_r \geq 0$, η οποία προστίθεται στο πρώτο μέλος της ανισότητας ώστε να έχουμε την ισότητα:

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n + x_r = b_i$$

  με $x_r \geq 0$.
- Πιο απλά, προσθέτουμε μια νέα μη αρνητική μεταβλητή στο πρώτο μέλος έτσι ώστε τα δυο μέλη να γίνουν ίσα.
- Θα ονομάζουμε την $x_r \geq 0$ μια περιθώρια χαλαρή μεταβλητή.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

Για παράδειγμα ένας περιορισμός της μορφής

$$x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 6$$

θα γραφεί στην μορφή

$$x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 6$$

όπου η $x_4 \geq 0$ είναι μια χαλαρή μεταβλητή.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Πλεονασματική μεταβλητή
- Σε ένα περιορισμό της μορφής $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n \geq b_i$ θεωρούμε μια νέα μεταβλητή $x_s \geq 0$, η η οποία αφαιρείται από το πρώτο μέλος της ανισότητας ώστε να έχουμε την ισότητα:

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n - x_s = b_i$$

  με $x_s \geq 0$.
- Πιο απλά, αφαιρούμε μια νέα μη αρνητική μεταβλητή στο πρώτο μέλος έτσι ώστε τα δυο μέλη να γίνουν ίσα.
- Θα ονομάζουμε την $x_r \geq 0$ μια περιθώρια πλεονασματική μεταβλητή.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

Για παράδειγμα ένας περιορισμός της μορφής

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10$$

θα γραφεί στην μορφή

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 10$$

όπου η $x_4 \geq 0$ είναι μια πλεονασματική μεταβλητή.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Μετασχηματισμός προβλήματος ελαχιστοποίησης
- Όταν ζητάμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

τότε θέτουμε $f(x) = -g(x)$ και μεγιστοποιούμε την συνάρτηση $g(x)$.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Μετασχηματισμός προβλήματος ελαχιστοποίησης
- Επομένως θα ισχύει

$$\min(f(x)) = -\max(g(x)) - \max(-f(x))$$

δηλαδή,

$$-\max(-f(x)) = -\max(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n)$$

- Για παράδειγμα η $\min(x_1 + 2x_2 + 5x_3)$ θα γίνει

$$-\max(-x_1 - 2x_2 - 5x_3)$$

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο
- Αυτές οι μεταβλητές $x_i \in \mathbb{R}$ δεν υπόκεινται στον περιορισμό $x_i \geq 0$.
  Στην περίπτωση αυτή θέτουμε

$$x_i = x_i' - x_i''$$

  όπου $x_i', x_i'' \geq 0$.
- Μεταβλητές αρνητικές
- Αν η μεταβλητή x_i είναι μη θετική ($x_i < 0$), θέτουμε

$$x_i = -x_i'$$

  όπου $x_i' \geq 0$.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

Για παράδειγμα εάν έχω τον περιορισμό

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$$

με $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$ και x_3 αγνώστου πρόσημου, τότε θέτω $x_2 = -x_2'$ και $x_3 = x_3' - x_3''$ και ο περιορισμός γίνεται

$$x_1 - 3x_2' + 5x_3' - 5x_3'' = 10$$

όπου $x_1, x_2', x_3', x_3'' \geq 0$.

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π.

- Αρνητικοί σταθεροί όροι (δεξιά μέλη) σε περιορισμούς
- Εάν σε κάποιο περιορισμό ο σταθερός όρος είναι αρνητικός τότε πολλαπλασιάζοντας με (-1) γίνεται θετικός.
- Δηλαδή ο περιορισμός

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -10$$

θα γίνει

$$-x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 10$$

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π. - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται το Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\min(2x_1 + x_2 - x_3)$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 11 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & \geq & 8 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Να γραφεί στην τυπική του μορφή.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- Ένα π. γ. π. μπορεί να γραφεί με την βοήθεια πινάκων ως εξής:

$$z = \max\left(f(x)\right) = c^T x$$
$$A \cdot x = b$$
$$x_i \geq 0 \quad b_j \geq 0$$

- Στην τυπική μορφή του προβλήματος το σύστημα $Ax = b$ έχει n μεταβλητές και m γραμμικές εξισώσεις με $m < n$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ορισμός

Βασική λύση είναι μία λύση που προκύπτει αν θέσουμε $n - m$ μεταβλητές ίσες με το μηδέν και λύσουμε ως προς τις υπόλοιπες m μεταβλητές υπό τον όρο το γραμμικό σύστημα που προκύπτει να περιλαμβάνει m από τις στήλες (διανύσματα) του πίνακα A έτσι ώστε τα διανύσματα αυτά να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- Δηλαδή ο πίνακας A να περιέχει έναν υποπίνακα διάστασης mxm που ονομάζεται βασικός πίνακας και συμβολίζεται με B.
- Ο αριθμός των βασικών λύσεων ενός π. γ. π. είναι πεπερασμένος και το πολύ

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ορισμός

Βασική εφικτή λύση είναι μία βασική λύση όπου όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

- Για να βρούμε το σύνολο των βασικών λύσεων ενός π. γ. π. πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα
  - Υπολογισμός πλήθους βασικών λύσεων
  - Επίλυση των συστημάτων που προκύπτουν από τον μηδενισμό των $n - m$ μεταβλητών για όλους τους συνδυασμούς
  - Διαχωρισμός των εφικτών βασικών λύσεων

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν οι βασικές λύσεις του συστήματος

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$
$$2x_1 - 7x_3 + x_4 = 9$$

με $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- Με την βοήθεια των βασικών λύσεων, έχουμε έναν αλγεβρικό τρόπο λύσης για προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Η μεθοδολογία αυτού του τρόπου υλοποιείται με τα παρακάτω βήματα:
  1. Μετατροπή στην τυπική μορφή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
  2. Εύρεση όλων των βασικών λύσεων του προβλήματος.
  3. Εντοπισμός μεταξύ αυτών, των βασικών εφικτών λύσεων.
  4. Εύρεση της βασικής εφικτής λύσης (βασικών εφικτών λύσεων) η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι έχουμε πολλές περιπτώσεις, ακόμη και για μικρού μεγέθους προβλήματα.
- π.χ. για $n = 20$ μεταβλητές και $m = 10$ περιορισμούς έχουμε το πολύ

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = 184756$$

βασικές λύσεις, οι οποίες είναι αδύνατον να βρεθούν με την παραπάνω μέθοδο λύσης

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

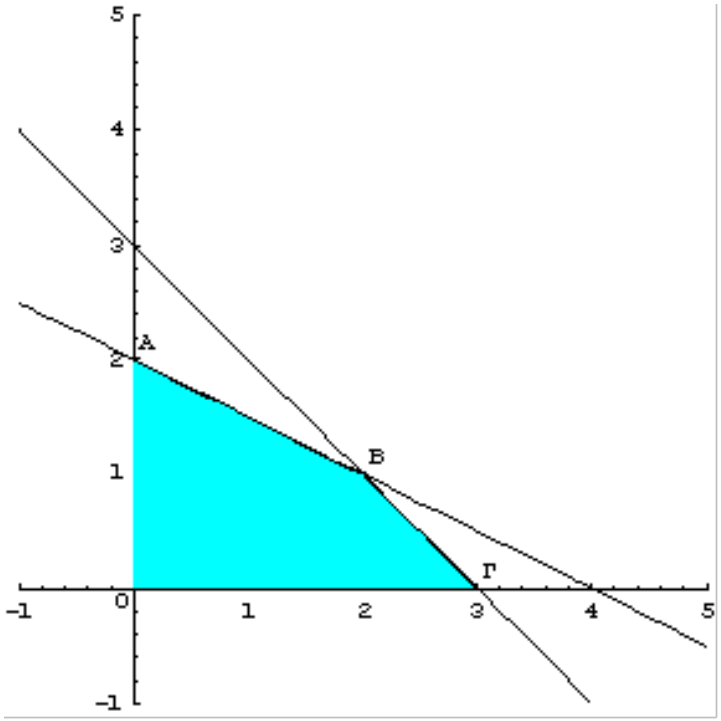
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Να βρεθούν όλες οι βασικές λύσεις του προβλήματος και έπειτα να βρεθεί η άριστη λύση.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

	Λύση	Βασικές Μεταβλητές	Είδος Λύσης
1	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 4, 3)$	$(x_3, x_4) = (4, 3)$	βασική εφικτή λύση
2	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 1)$	$(x_2, x_4) = (2, 1)$	βασική εφικτή λύση
3	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, -2, 0)$	$(x_2, x_3) = (3, -2)$	βασική λύση
4	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, -1)$	$(x_1, x_4) = (4, -1)$	βασική λύση
5	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 1, 0)$	$(x_1, x_3) = (3, 1)$	βασική εφικτή λύση
6	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$	$(x_1, x_2) = (2, 1)$	βασική εφικτή λύση

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



	(x_1, x_2, x_3, x_4)	Σημείο
1	$(0, 0, 4, 3)$	O
2	$(0, 2, 0, 1)$	
3	$(0, 3, -2, 0)$	
4	$(4, 0, 0, -1)$	
5	$(3, 0, 1, 0)$	
6	$(2, 1, 0, 0)$	

ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Να βρεθούν όλες οι βασικές λύσεις του προβλήματος και έπειτα να βρεθεί η άριστη λύση.