ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα v είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** (ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα**) ενός τετραγωνικού πίνακα A $A \in gl(n,F)$, αν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $Av = \lambda v$. Τότε, ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** (ή **χαρακτηριστική τιμή**) του πίνακα A.

Πρέπει να σημειωθεί ότι **ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ορίζονται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες**. Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A, θα εννοούμε ότι ο A είναι τετραγωνικός πίνακας και μάλιστα τύπου n (εκτός αν αναφέρεται αλλοιώς). Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι λέγοντας ιδιοδιάνυσμα v ενός πίνακα A,θα εννοούμε ότι αυτό δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα και ότι οι συντεταγμένες του παίρνονται σε μορφή πίνακα-στήλης. Επίσης, και για τις ιδιοτιμές λ θα υποθέτουμε ότι δεν είναι μηδέν.

Παράδειγμα 1.2. Να αποδειχτεί ότι το διάνυσμα :

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} .$$

Λύση. Για να είναι το v ιδιοδιάνυσμα του A, θα πρέπει να υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε : $Av = \lambda v$. Πράγματι :

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2v .$$

Επομένως, το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A και $\lambda=2$ είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Δ

Παράδειγμα 1.3. Να εξεταστεί αν το διάνυσμα :

$v= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Λύση.

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} .$$

Για να είναι το διάνυσμα v ιδιοδιάνυσμα του A θα πρέπει να υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix}$$

Άρα, δεν υπάρχει τέτοιος $\lambda \in \mathbb{R}$ δηλαδή το v δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Δ

<u>Παρατήρηση 1.4.</u> Έστω v ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A. Τότε πρέπει να υπάρχει μια ιδιοτιμή λ, τέτοια ώστε

$$A\cdot v = \lambda\cdot v \tag{1.1}$$

ή ισοδύναμα :

$$A\cdot v - \lambda\cdot v = \mathbf{0}$$

ή

$$(A-\lambda I_n)\ v = \mathbf{0}\ ^{*}. \tag{1.2}$$

Ορίζουμε έναν νέο πίνακα :

$$B = A - \lambda I_n\ , \tag{1.3}$$

επομένως, η σχέση (1.2) παίρνει τη μορφή :

$$B\cdot v = \mathbf{0}. \tag{1.4}$$

*Σημείωση : Δεν μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (1.2) στη μορφή: $(A-\lambda)v=\mathbf{0}$, επειδή ο όρος A-λ θα δήλωνε αφαίρεση ενός αριθμού από έναν πίνακα, πράξη η οποία δεν ορίζεται. Η ποσότητα $A-\lambda I_n$ (όπου ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι του ίδιου τύπου με τον A), ορίζεται γιατί αφαιρούμε έναν πίνακα από άλλον.

Η σχέση (1.4) αποτελεί ένα γραμμικό ομογενές σύστημα με άγνωστους τις συντεταγμένες του διανύσματος v.

Αν $D(B) \neq 0$ τότε η μοναδική λύση του (1.4), είναι η μηδενική, δηλαδή $v = \mathbf{0}$. Το αποτέλεσμα αυτό όμως, δεν μας ικανοποιεί επειδή το v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα και επομένως δεν είναι μηδέν. Έτσι, είναι φανερό ότι το v θα είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A αν και μόνον αν $D(B)=0$ ή (με τη βοήθεια της (1.3)) αν και μόνον αν

$$D(A-\lambda I_n) = 0\ . \tag{1.5}$$

Η εξίσωση (1.5) ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A. Οι ρίζες της (1.5) είναι οι ιδιοτιμές του A. Το πρώτο μέρος της (1.5) ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Παράδειγμα 1.5. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

$$A-\lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

$$D(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 .$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι :

$$D(A-\lambda I_2) = 0$$

ή

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 . \tag{1.6}$$

Λύνοντας την εξίσωση (1.6) ως προς λ, παίρνουμε τις ιδιοτιμές του A, που είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

Δ

Παράδειγμα 1.6. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} t & 2t \\ 2t & -t \end{bmatrix}$$

Λύση.

$$A-\lambda I_2 = \begin{bmatrix} t & 2t \\ 2t & -t \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-\lambda & 2t \\ 2t & -t-\lambda \end{bmatrix}$$

$$D(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} t-\lambda & 2t \\ 2t & -t-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5t^2.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι $\lambda^2 - 5t^2 = 0$ και επομένως οι ιδιοτιμές του Α είναι : $\lambda_1 = \sqrt{5t}$, $\lambda_2 = -\sqrt{5t}$.

Παρατηρούμε ότι, αν ο πίνακας Α εξαρτάται από μια παράμετρο, τότε και οι ιδιοτιμές του Α εξαρτώνται από την ίδια παράμετρο. Δ

<u>Παράδειγμα 1.7.</u> Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} .$$

<u>Λύση</u>.

$$A-\lambda I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} -\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$D(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 .$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι : $\lambda^2 + 16 = 0$ και οι ιδιοτιμές του Α είναι οι φανταστικές ρίζες : $\lambda_1 = 4i$, $\lambda_2 = -4i$.

Παρατηρούμε ότι, αν και **τα στοιχεία του πίνακα Α είναι πραγματικοί αριθμοί, οι ιδιοτιμές μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί.** Δ

<u>Παράδειγμα 1.8.</u> Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

<u>Λύση</u>.

$$A-\lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} -\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$D(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left[(1-\lambda)(3-\lambda)+1\right] = -\lambda(\lambda^2-4\lambda+4) = -\lambda(\lambda-2)^2 .$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι : $-\lambda(\lambda-2)^2 = 0$, απ'αυτήν βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα :

$$\lambda_1 = 0 , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 . \qquad \Delta$$

<u>Παρατήρηση 1.9.</u> Όπως φαίνεται από το παράδειγμα 1.8, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης μπορεί να επαναλαμβάνονται, δηλαδή ορισμένες από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης να είναι ίσες μεταξύ τους.

Από τον ορισμό της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.5), αποδεικνύεται ότι αν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι τύπου n, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ. Από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει n ακριβώς ρίζες, επομένως και ο πίνακας A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές (λαμβάνοντας υπόψη και την πολλαπλότητα των ριζών).

<u>Παρατήρηση 1.10.</u> Σε κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή ενός πίνακα A, θα αντιστοιχεί τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα,το οποίο μπορεί να βρεθεί λύοντας το ομογενές σύστημα εξισώσεων (1.2). Αν μια ιδιοτιμή λ_i αντικατασταθεί στο σύστημα (1.2), το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v_i είναι λύση του συστήματος

$$(A-\lambda_i I_n)v_i = 0 . \qquad (1.7)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα A, τα οποία αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ αποτελούν διανυσματικό χώρο, ο οποίος ονομάζεται **ιδιόχωρος** της ιδιοτιμής λ. Η διάσταση του ιδιόχωρου ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ.

Παράδειγμα 1.12. Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} .$$

Λύση. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A, έχουν βρεθεί στο παράδειγμα 1.5 και είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 5$.

Υπολογίζουμε πρώτα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$. Από την (1.7) έχουμε :

$$(A-(-1)I_2)\ v_1 = 0 \tag{1.8}$$

Το άγνωστο διάνυσμα v_1, το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε, γράφεται :

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}$$

οπότε η εξίσωση (1.8) παίρνει τη μορφή :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2\psi_1 &= 0 \\ 4x_1 + 4\psi_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Μία μη-μηδενική λύση του συστήματος (1.9) είναι :

$$x_1 = -\psi_1$$

όπου ο ψ_1 παίρνει οποιαδήποτε μη-μηδενική τιμή.

Επομένως,το ιδιοδιάνυσμα είναι :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\psi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \psi_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_1 \in \mathbb{R} - \{0\} . \qquad (1.10)$$

Διαλέγοντας διάφορες τιμές του ψ , μπορούμε να πάρουμε διάφορα ιδιοδιανύσματα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι δύο τυχαία ιδιοδιανύσματα, έχουν την ιδιότητα να είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου, δηλαδή είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως, υπάρχει μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$.

Αφού βρήκαμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, το ίδιο θα κάνουμε για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$.

Η σχέση (1.7) γράφεται :

$$(A - 5I_2)v_2 = 0 \qquad (1.11)$$

Το ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα v_2, γράφεται :

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}$$

οπότε η εξίσωση (1.11) γράφεται :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} -4x_2 + 2\psi_2 &= 0 \\ 4x_2 - 2\psi_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Μία μη-μηδενική λύση του συστήματος (1.12) είναι :

$$\psi_2 = 2x_2$$

όπου ο x_2 παίρνει οποιαδήποτε πραγματική μη-μηδενική τιμή.

Το ιδιοδιάνυσμα v_2, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=5$ είναι :

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}-\{0\}.$$

Δ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13. Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας ο οποίος έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές ονομάζεται **θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας**.

Παράδειγμα 1.14. Να ελεγχθούν αν είναι θετικά ορισμένοι οι συμμετρικοί πίνακες :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A:

$$|A-\lambda I_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) -1 = 0 \Rightarrow$$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 -5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο ιδιοτιμές του A είναι θετικές, άρα ο A είναι θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας.

Η χαρακτηριστική εξίσωση του B είναι :