Αναστασίου Χρήστου
Γ4

78

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ - Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ - Χ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ
Α. ΜΠΕΤΣΗΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Κ. ΣΟΛΔΑΤΟΣ - Σ. ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Γ΄

ΛΥΚΕΙΟΥ

τόμος Β

2. ΑΝΑΛΥΣΗ

τεύχος β

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

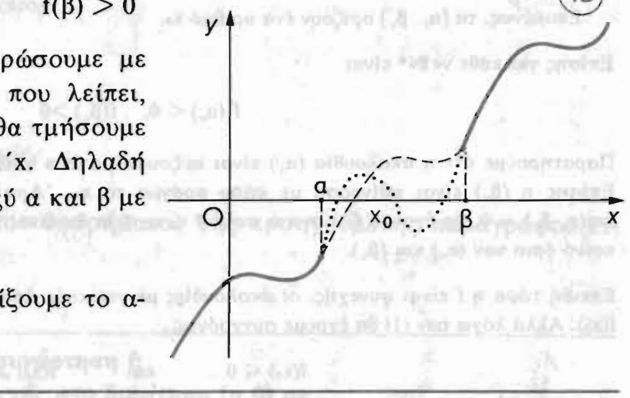
Ένα βασικό θεώρημα

3.21 Στο σχήμα 13 από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f λείπει το τμήμα μεταξύ των σημείων με τετμημένες α και β για τα οποία είναι

$$f(\alpha) < 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) > 0$$

Αν θελήσουμε να συμπληρώσουμε με συνεχή γραμμή το τμήμα που λείπει, φαίνεται αναπόφευκτο ότι θα τμήσουμε υποχρεωτικά τον άξονα x΄x. Δηλαδή θα υπάρχει σημείο x_0 μεταξύ α και β με

$$f(x_0) = 0$$



Γενικά μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f:**

- **είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα [α, β]**
- **έχει τιμές ετερόσημες στα άκρα α και β, δηλαδή**

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$$

Τότε η f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστο σημείο του (α, β)

Απόδειξη. Έστω ότι είναι $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$. Θα προσδιορίσουμε $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θεωρούμε το κέντρο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ του [α, β]. Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, τότε $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Διαφορετικά:

- αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 0$, θέτουμε $\frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha_1$ και $\beta = \beta_1$
- αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$, θέτουμε $\alpha = \alpha_1$ και $\frac{\alpha+\beta}{2} = \beta_1$

Και στις δυο περιπτώσεις ορίζεται διάστημα $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$ με:

$$f(\alpha_1) < 0, \qquad f(\beta_1) > 0 \qquad \text{και} \qquad \beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Εργαζόμαστε τώρα με το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ όπως προηγουμένως με το [α, β]. Δηλαδή, αν είναι $f\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) = 0$, τότε $x_0 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$

Στην αντίθετη περίπτωση ορίζουμε το κέντρο του $[\alpha_1, \beta_1]$ και όπως προηγουμένως βρίσκουμε διάστημα $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ με:

$$f(\alpha_2) < 0, \qquad f(\beta_2) > 0 \qquad \text{και} \qquad \beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1-\alpha_1}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2^2}$$

Συνεχίζοντας τις διαδοχικές αυτές «διχοτομήσεις» διαπιστώνουμε ότι:

- ή ένα από τα κέντρα των διαστημάτων είναι το x_0
- ή ορίζεται μια ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, με πλάτος $\frac{\beta-\alpha}{2^\nu}$, τα οποία είναι κιβωτισμένα, αφού για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

$$[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}] \subset [\alpha_\nu, \beta_\nu] \quad \text{και} \quad \lim(\beta_\nu-\alpha_\nu) = \lim \frac{\beta-\alpha}{2^\nu} = (\beta-\alpha) \lim \frac{1}{2^\nu} = 0$$

Επομένως, τα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ ορίζουν ένα αριθμό x_0.

Επίσης για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$f(\alpha_\nu) < 0, \quad f(\beta_\nu) > 0 \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αύξουσα με άνω φράγμα το x_0. Άρα έχει όριο $l \leqslant x_0$. Επίσης η (β_ν) είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το x_0. Άρα έχει όριο $m \geqslant x_0$. Επειδή όμως $\lim(\alpha_\nu-\beta_\nu) = 0$, θα έχουμε $l = m$ και αφού $l \leqslant x_0 \leqslant m$ θα είναι $l = x_0 = m$. Δηλαδή το x_0 είναι το κοινό όριο των (α_ν) και (β_ν).

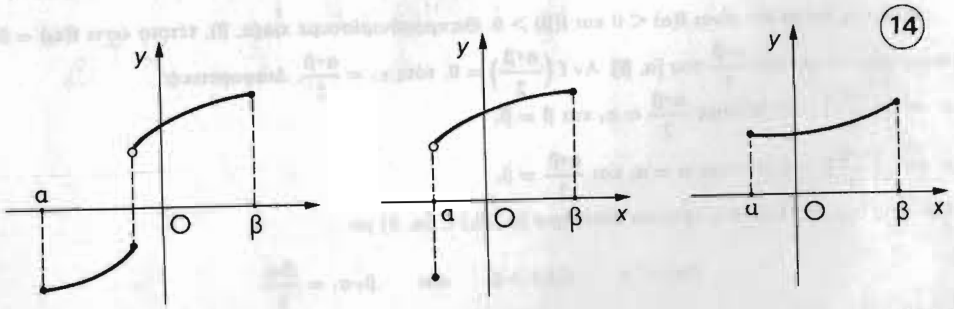
Επειδή τώρα η f είναι συνεχής, οι ακολουθίες με γενικούς όρους $f(\alpha_\nu)$ και $f(\beta_\nu)$ έχουν κοινό όριο $f(x_0)$. Αλλά λόγω των (1) θα έχουμε συγχρόνως

$$f(x_0) \leqslant 0 \quad \text{και} \quad f(x_0) \geqslant 0$$

και συνεπώς $f(x_0) = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για να ισχύει το θεώρημα πρέπει να πληρούνται και οι δυο προϋποθέσεις του. Έτσι π.χ. στο σχήμα 14α έχουμε $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.



$f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$
f ασυνεχής στο $[\alpha,\beta]$
α

$g(\alpha) < 0$, $g(\beta) > 0$
g συνεχής στο $(\alpha,\beta]$
β

$\sigma(\alpha) > 0$, $\sigma(\beta) > 0$
σ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μπορούμε να εντοπίσουμε μια ρίζα της εξίσωσης $x^4+30x-29 = 0$.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = x^4+30x-29$$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, έχουμε $f(0) = -29 < 0$ και $f(1) = 2 > 0$. Επομένως υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0,1)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $f(0{,}9) = 0{,}9^4+27-29 < 1+27-29 = -1 < 0$ και επειδή $f(1) > 0$ υπάρχει ρίζα x_0 της εξίσωσης μεταξύ 0,9 και 1. Δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε ως x_0 το 0,9 με προσέγγιση δεκάτου.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

3.22 Άμεση συνέπεια του θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου είναι το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f:**

- **είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με**
- **$f(\alpha) \neq f(\beta)$**

Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

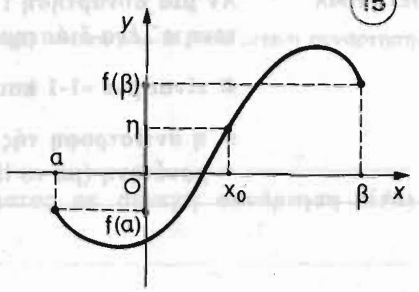
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι είναι $f(\alpha) < f(\beta)$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\eta \in (f(\alpha), f(\beta))$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$ (σχ. 15).

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x)-\eta$$

η οποία:

- είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με
- $g(\alpha) = f(\alpha)-\eta < 0$, $\quad g(\beta) = f(\beta)-\eta > 0$



Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$. Τότε θα είναι $f(x_0)-\eta = 0$ και συνεπώς $f(x_0) = \eta$.

Η περίπτωση $f(\alpha) > f(\beta)$ εξετάζεται ομοίως.

Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως **θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών** και ισχύει, όπως το θεώρημα της §3.21, μόνο όταν η f είναι συνεχής σε **κλειστό** διάστημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Μια συνεχής συνάρτηση f απεικονίζει ένα οποιοδήποτε διάστημα Δ** (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο) **σε διάστημα.**

Πράγματι, αν η_1, η_2 είναι δυο οποιαδήποτε στοιχεία του συνόλου f(Δ), τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Delta$, τέτοια ώστε $f(\alpha) = \eta_1$ και $f(\beta) = \eta_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα, αν π.χ. $f(\alpha) < f(\beta)$, στο f(Δ) περιέχεται το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)] = [\eta_1, \eta_2]$. Αυτή η ιδιότητα του f(Δ) είναι χαρακτηριστική των διαστημάτων[1] και συνεπώς το f(Δ) είναι διάστημα.

Μονοτονία και συνέχεια

3.23 Μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα απεικονίζει το Δ στο διάστημα f(Δ). Επομένως η

$$f: \Delta \to f(\Delta)$$

είναι συνάρτηση «επί».

Αν όμως η f είναι και γνησίως μονότονη στο Δ, τότε (§1.11) είναι και «1-1».

Αποδεικνύεται[2] ότι και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο f(Δ).

Έχουμε λοιπόν το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ, τότε:**

- **είναι μια «1-1 και επί» απεικόνιση του Δ στο διάστημα f(Δ).**
- **η αντίστροφη τής f συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη** (με το ίδιο είδος μονοτονίας) **στο f (Δ).**

Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης

3.24 Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι ορισμένη σε **κλειστό** διάστημα, αποδεικνύεται ότι το σύνολο των τιμών της έχει και *μέγιστο* και *ελάχιστο*. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται[1] το ακόλουθο

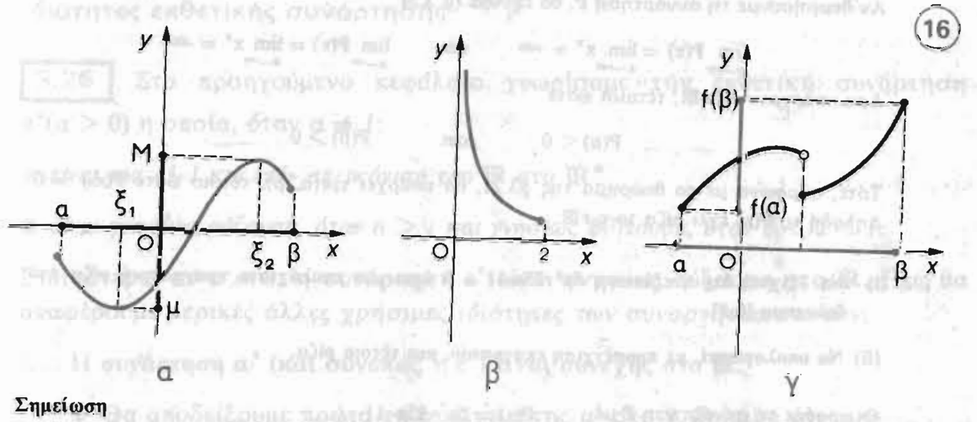
(1) Αποδεικνύεται, δηλαδή, ότι ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα, αν και μόνο αν, για κάθε $\eta_1,\eta_2\in E$ είναι $[\eta_1,\eta_2]\subseteq E$.

(2) Η απόδειξη παραλείπεται

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β]. Τότε υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in[\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύει:**

$$f(\xi_1) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi_2)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, στο διάστημα [α,β] η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο $M = f(\xi_2)$ και ελάχιστο $\mu = f(\xi_1)$. Αλλά σύμφωνα με το θεώρημα της §3.22, αν υποθέσουμε $\mu \neq M$, η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ μ και M (σχ. 16α). Άρα η εικόνα του [α,β] με την f είναι το [μ,M].



Σημείωση

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και στην ειδική περίπτωση $\mu = M$, που τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο [α,β].

Έχουμε λοιπόν το

ΠΟΡΙΣΜΑ **Η εικόνα κλειστού διαστήματος με συνεχή συνάρτηση είναι κλειστό διάστημα.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα της μορφής (α, β) ή (α, β] ή [α, β), δεν παρουσιάζει πάντοτε μέγιστο ή ελάχιστο στο διάστημα αυτό. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ (σχ. 16β) είναι συνεχής στο διά-

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

στημα (0,2], ενώ δεν έχει μέγιστο.

Το ίδιο συμβαίνει και με την ταυτοτική συνάρτηση $\iota(x) = x$ στο (0,1).

2. Η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος με μια συνάρτηση f μπορεί να είναι κλειστό διάστημα, χωρίς η f να είναι συνεχής (σχ. 16γ).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστο μια πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού ν, έστω το (1)

$$P(x) = x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση P, θα έχουμε (§ 3.5)

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = -\infty$$

Άρα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$P(\alpha) < 0 \quad \text{και} \quad P(\beta) > 0$$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της §3.21, θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$. Δηλαδή το P(x) έχει ρίζα το $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. (i) Να δειχτεί ότι η εξίσωση $5x^5+25x-11 = 0$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα [0,1].

(ii) Να υπολογιστεί, με προσέγγιση εκατοστού, μια τέτοια ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση P με $P(x) = 5x^5+25x-11$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [0,1].

(i) Είναι $P(0) = -11 < 0$ και $P(1) = 19 > 0$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της §3.21, η εξίσωση (1) θα έχει μια ρίζα στο (0,1).

(ii) Είναι $P(\frac{0+1}{2}) = P(0{,}5) = 1{,}65125 > 0$ και συνεπώς η (1) έχει ρίζα στο (0, 0,5).

Συνεχίζοντας βρίσκουμε $P(0{,}4) = -0{,}9488 < 0$. Άρα η (1) έχει ρίζα στο (0,4, 0,5).

Ομοίως βρίσκουμε $P(0{,}43) = -0{,}1765 < 0$ και $P(0{,}44) = 0{,}824 > 0$ και συνεπώς η εξίσωση έχει μια ρίζα $x_0 \in (0{,}43,\ 0{,}44)$.

Επομένως με προσέγγιση εκατοστού είναι $x_0 \simeq 0{,}43$.

3. Να δειχτεί ότι κάθε πραγματικός αριθμός $\alpha > 0$ έχει νιοστή ρίζα ($\nu > 1$).

Το γνωστό αυτό θεώρημα μπορούμε να το αποδείξουμε αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση P με

(1) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\alpha_\nu \neq 1$.

$$P(x) = x^{\nu} - \alpha$$

Είναι $P(0) = -\alpha < 0$ και $P(\alpha+1) = (\alpha+1)^{\nu} - \alpha \geqslant \alpha + 1 - \alpha = 1 > 0$

Επομένως, αφού η P είναι συνεχής στο $[0, \alpha+1]$, υπάρχει $x_0 \in (0, \alpha+1)$, τέτοιος ώστε $P(x_0) = 0$.

Δηλαδή είναι $x_0^{\nu} - \alpha = 0$ ή $x_0^{\nu} = \alpha$.

Ασκήσεις: 41, 42, 43

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ιδιότητες εκθετικής συνάρτησης

3.25 Στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίσαμε την εκθετική συνάρτηση $\alpha^x (\alpha > 0)$ η οποία, όταν $\alpha \neq 1$:

- *είναι μια «1-1 και επί» απεικόνιση του* $\mathbb{R}$ *στο* $\mathbb{R}^*_+$.
- *είναι γνησίως αύξουσα, όταν* $\alpha > 1$ *και γνησίως φθίνουσα, όταν* $0 < \alpha < 1$.

Ειδικότερα, αν $\alpha = e$, η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εδώ θα αναφέρουμε μερικές άλλες χρήσιμες ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών.

I. **Η συνάρτηση α^x (και συνεπώς η e^x) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.**

- Θα αποδείξουμε πρώτα τη συνέχεια της α^x στο 0, δηλαδή ότι

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \alpha^x = 1} \quad (1)$$

*** Απόδειξη της (1).**

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$|x| < \delta \Rightarrow |\alpha^x - 1| < \varepsilon$$

Έστω $\alpha > 1$. Ξέρουμε (§ 2.14, εφαρ. 1) ότι $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$ ή ισοδύναμα $\lim (\alpha^{1/\nu} - 1) = 0$, που σημαίνει ότι υπάρχει $\nu_o \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για $\nu > \nu_o$ να έχουμε $\alpha^{1/\nu} - 1 < \varepsilon$.

Ειδικότερα έχουμε

$$\alpha^{\frac{1}{\nu_0+1}} - 1 < \varepsilon$$

Εκλέγουμε ως δ το $\frac{1}{\nu_0+1}$. Τότε, αν $0 < x < \delta$ θα έχουμε:

$$\alpha^x < \alpha^{\frac{1}{\nu_0+1}} \quad \text{ή} \quad \alpha^x - 1 < \alpha^{\frac{1}{\nu_0+1}} - 1, \text{ δηλαδή} \quad \alpha^x - 1 < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha^x = 1$

Αν $-\delta < x < 0$ θα είναι $0 < -x < \delta$. Συνεπώς, θέτοντας $y = -x$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \alpha^{-x} = \lim_{y\to 0^+} \alpha^y = 1 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\alpha^x} = 1$$

δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-} \alpha^x = 1$

Άρα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} \alpha^x = 1$

Έστω τώρα **$0 < \alpha < 1$**. Τότε θα είναι $\frac{1}{\alpha} > 1$ και κατά την προηγούμενη περίπτωση $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{\alpha})^x = 1$ ή $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\alpha^x} = 1$ και επομένως και στην περίπτωση αυτή $\lim\limits_{x\to 0} \alpha^x = 1$.

Ειδικότερα είναι

$$\boxed{\lim_{x\to 0} e^x = 1} \qquad (2)$$

● Έστω, τώρα, $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε αρκεί να δείξουμε $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha^x = \alpha^{x_0}$. Πράγματι, αν λάβουμε υπόψη την ισοδυναμία (4) της § 3.20, θα έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} \alpha^x = \lim_{h\to 0} \alpha^{x_0+h} = \lim_{h\to 0} (\alpha^{x_0}\alpha^h) = \alpha^{x_0} \lim_{h\to 0} \alpha^h = \alpha^{x_0}$$

II. Έστω (x_ν) μια συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε για κάθε $\alpha > 0$

$$\boxed{\lim \alpha^{x_\nu} = \alpha^{\lim x_\nu}} \qquad (3)$$

Πράγματι, έστω $\lim x_\nu = x_0$. Τότε, επειδή η α^x είναι συνεχής, η ακολουθία (α^{x_ν}) έχει (§ 3.18, Πόρισμα) όριο $\alpha^{x_0} = \alpha^{\lim x_\nu}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με βάση αυτή την ιδιότητα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων και για πραγματικούς εκθέτες (βλέπε εφαρ. 2).

III. $$\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim(1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu = e^\alpha} \qquad (4)$$

* **Απόδειξη.**

Η (4) είναι φανερή για $\alpha = 0$.

Για $\alpha \neq 0$ έχουμε $$(1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}}\right]^\alpha$$

Επειδή (§ 3.20, εφ. 1) η συνάρτηση $g(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ έχει στο $+\infty$ όριο e και η ακολουθία με γενικό όρο $x_\nu = \frac{\nu}{\alpha}$ έχει όριο $+\infty$, θα έχουμε σύμφωνα με το πόρισμα της § 3.18 $\lim g(x_\nu) = e$,

$\alpha < 0$

δηλαδή $$\lim\left(1+\frac{1}{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} = e$$

Εξάλλου είναι $(1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu = [g(x_\nu)]^\alpha$. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$ είναι συνεχής (§ 3.20, εφ. 2), θα έχουμε

$$\begin{aligned}\lim (1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu &= \lim [g(x_\nu)]^\alpha = \lim f(g(x_\nu))\\ &= \lim_{x\to e} f(x) && [\text{πόρισμα § 3.18}]\\ &= f(e) = e^\alpha && [\text{λόγω συνέχειας της f}]\end{aligned}$$

IV. $$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x} \qquad (5)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $\nu > -x$, δηλαδή $\nu + x > 0$. Τότε έχουμε $1+\frac{x}{\nu} > 0$ και συνεπώς (ανισότητα Bernoulli)

$$(1+\frac{x}{\nu})^\nu \geqslant 1+\frac{x}{\nu}\cdot\nu = 1+x$$

Τότε (§ 2.15) θα είναι $\lim (1+\frac{x}{\nu})^\nu \geqslant 1+x$ και επειδή $\lim (1+\frac{x}{\nu})^\nu = e^x$ θα έχουμε την (5).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι:**
   (i) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$
   (ii) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = +\infty$

Θα αποδείξουμε μόνο την $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = +\infty$. Οι άλλες περιπτώσεις αφήνονται ως ασκήσεις.

Υποθέτουμε $x > 0$. Επειδή $[x] \leqslant x$, θα έχουμε:

$$\alpha^{[x]} \leqslant \alpha^x \qquad (1)$$

Τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\alpha^{[x]}$ έχει στο $+\infty$ όριο $+\infty$.

Αφού $\alpha > 1$, θα υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $\alpha = 1+\theta$. Έτσι θα έχουμε:

$$\alpha^{[x]} = (1+\theta)^{[x]} \geqslant 1+[x]\theta > [x]\theta \geqslant (x-1)\theta$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} \theta(x-1) = +\infty$, θα είναι και $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^{[x]} = +\infty$. Τότε από την (1) έχουμε

$$\lim_{x\to +\infty} \alpha^x = +\infty$$

2. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι:

(i) $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$, **(ii)** $(\alpha^y)^x = \alpha^{xy}$, **(iii)** $\alpha^{-x} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$

(i) Έστω (x_ν), (y_ν) δυο ακολουθίες **ρητών** με όρια x, y αντιστοίχως, π.χ. οι ακολουθίες των δεκαδικών προσεγγίσεων. Τότε είναι $\alpha^x = \lim\alpha^{x_\nu}$ και $\alpha^y = \lim\alpha^{y_\nu}$.

Έχουμε
$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \lim\alpha^{x_\nu} \cdot \lim\alpha^{y_\nu} = \lim(\alpha^{x_\nu} \cdot \alpha^{y_\nu}) = \lim\alpha^{x_\nu+y_\nu}$$
$$= \alpha^{\lim(x_\nu+y_\nu)} = \alpha^{x+y} \qquad [\ (3)\ §3.25]$$

(ii) Έστω ρ ρητός και (y_ν) ακολουθία **ρητών** με όριο y. Τότε, επειδή $\lim(\rho y_\nu) = \rho y$, έχουμε:
$$\alpha^{\rho y} = \lim\alpha^{\rho y_\nu} = \lim(\alpha^{y_\nu})^\rho$$

και λόγω της συνέχειας της x^ρ (§ 3.16, εφ. 4)
$$\alpha^{\rho y} = (\lim\alpha^{y_\nu})^\rho = (\alpha^y)^\rho$$

Στη γενική περίπτωση έστω (x_ν) ακολουθία ρητών με όριο x. Τότε:
$$\alpha^{xy} = \lim\alpha^{x_\nu y} = \lim(\alpha^y)^{x_\nu}$$

και λόγω της συνέχειας της α^x:
$$\alpha^{xy} = (\alpha^y)^{\lim x_\nu} = (\alpha^y)^x$$

(iii) Από την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε:
$$\alpha^{-x} = \alpha^{(-1)x} = (\alpha^{-1})^x = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$$

3. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Αν στη σχέση (5) θέσουμε -x αντί x έχουμε $e^{-x} \geqslant 1-x$ και για $x \in (-1, 1)$:
$$e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$$

Έτσι έχουμε
$$1+x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leqslant e^x-1 \leqslant \frac{1}{1-x} - 1 \Leftrightarrow x \leqslant e^x-1 \leqslant \frac{x}{1-x} \qquad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε:

Αν **$0 < x < 1$, τότε** $\quad 1 \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad (2)$

Αν **$-1 < x < 0$, τότε** $\quad 1 \geqslant \frac{e^x-1}{x} \geqslant \frac{1}{1-x} \qquad (3)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{1-x} = 1$, από τις (2) και (3) έχουμε
$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Ιδιότητες λογαριθμικής συνάρτησης

3.26 Είδαμε ότι η α^x είναι μια «1-1 και επί» συνεχής συνάρτηση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^*_+$. Συνεπώς από το θεώρημα της §3.23 η αντίστροφή της λογαριθμική συνάρτηση $\log_\alpha x$:

- *Είναι μια «1-1 και επί» απεικόνιση του $\mathbb{R}^*_+$ στο $\mathbb{R}$.*
- *Είναι συνεχής*
- *Είναι γνησίως αύξουσα, όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα, όταν $0 < \alpha < 1$.*

Ειδικότερα η λογαριθμική συνάρτηση **lnx** είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*_+$.

Μια ακόμη χρήσιμη ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι η εξής:
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \quad \ln x \leqslant x-1} \qquad (6)$$

Επειδή (§ 3.25, ιδ. IV) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geqslant 1+x$, θα έχουμε και $e^{x-1} \geqslant 1+x-1 = x$, από την οποία, επειδή $x \in \mathbb{R}^*_+$ και η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε την (6).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$

Από τη σχέση (6), αν θέσουμε $\frac{1}{x}$ αντί x, βρίσκουμε:
$$\ln\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leqslant \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \ln x \geqslant \frac{x-1}{x}$$

Έτσι έχουμε:
$$\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x-1 \qquad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε:

Αν **$x > 1$, τότε** $\quad \frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln x}{x-1} \leqslant 1 \qquad (2)$

Αν **$0 < x < 1$**, τότε $\quad \frac{1}{x} \geqslant \frac{\ln x}{x-1} \geqslant 1 \qquad (3)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x} = 1$, από τις (2) και (3) προκύπτει ότι:
$$\lim_{x\to0} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

2. Να αποδειχτεί ότι για $x > -1$, $x \neq 0$, και $\alpha \in \mathbb{R}^*$ είναι $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

Επειδή $x+1 > 0$, θέτουμε

$$1+x = e^h, \text{ δηλαδή } h = \ln(1+x)$$

Τότε είναι $x = e^h-1$ και συνεπώς

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \frac{e^{\alpha h}-1}{e^h-1} = \frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}\,\frac{\alpha h}{e^h-1}$$

Επειδή η ln είναι συνεχής, θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x) = \ln 1 = 0$

Άρα (§ 3.20) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}\lim_{h\to 0}\left(\alpha\cdot\frac{h}{e^h-1}\right)$$

$$= 1\cdot\alpha\cdot 1 = \alpha \qquad [\S 3.25 \text{ εφ. } 3]$$

Ασκήσεις: 44, 45, 46, 47, 48, 49

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχτεί ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1} = 2$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2} = 1$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

2. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+c) = -\infty$ $(c\in\mathbb{R})$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1} = +\infty$.

3. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-5}{x+2} = 2$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0$

4. Να αποδειχθεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+7} = -\infty$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5x) = +\infty$

5. Να βρείτε, αν η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

6. Να βρείτε το όριο της f με $f(x) = 3 - \frac{|x+1|}{x}$ στο $+\infty$ καθώς και στο $-\infty$ και κατόπιν να διαπιστώσετε ότι οι ευθείες $y = 2$ και $y = 4$ είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

7. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^5-7x+9)$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+2}$, (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^8+7x^2+6x)$, (iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+2}$

8. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3-9x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3-9x}$ και κατόπιν να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \frac{x^2}{x^3-9x}$ έχει την ευθεία $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

9. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-x)(x^2-3)}{2x^3-1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-5x^4}{9x^2-2}$

10. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}$, (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

11. Αν υπάρχουν, να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{2x+1}$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3-x}$, (v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$

12. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}+\sqrt[3]{x^2(x+1)}\right)$

13. Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$

14. Αν $\mu\in\mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-3}+\mu x$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x-3}+\mu x$

15. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, (ii) $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x-1}$, (iii) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

16. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$, (ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$

17. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x} = +\infty$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|(x+1)}{x} = -1$

18. Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x \leqslant 2 \\ x-1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ είναι

$$\lim_{x\to 2^-}f(x) = 5 \quad\text{και}\quad \lim_{x\to 2^+}f(x) = 1$$

19. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2+1} = 0$, (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2-1} = 0$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{3x+4}-\frac{4}{3}\right) = 0$

20. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο στο 0 της συνάρτησης f με $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$

21. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{2x+5}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$, (iii) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$, (iv) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+8}$, (v) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x-1}$

22. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+6}{|x-3|}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$

23. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 5}(12+\sqrt{x-5})$, (ii) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, (iii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

24. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 1, & \text{αν } x = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad g \text{ με } g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x\in[-2,2) \\ 1, & \text{αν } x = 2 \\ 3x-2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Να υπολογιστούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)$, (iii) $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)$

25. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = x+\frac{|x|}{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$ (ii) $f(x) = -\frac{(1+x)|x|}{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$

(iii) $f(x) = x - [x]$ στο σημείο $x_0 = 5$.

26. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+\eta\mu x)$, (ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{2x^2-3}{4x}-\sigma\upsilon\nu 2x)$, (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2(2-\eta\mu x)}{x+1}$

27. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 0 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 1$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x \leqslant 0 \\ 1-4x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x < 2 \\ x^2, & \text{αν } x \geqslant 2 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 2$

(iv) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$ (v) $f(x) = x-\sqrt{x-[x]}$ στο σημείο $x_0 = -5$

28. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με

(i) $f(x) = |x|-x$, (ii) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

29. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x+2}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } -1 \leqslant x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1}, & \text{αν } x \geqslant 4 \end{cases}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{αν } x < -1 \\ 2x, & \text{αν}, -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

30. Να προσδιορίσετε το α ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο IR.

31. Να προσδιορίσετε τα α και β ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha x+1, & \text{αν } x \geqslant 0 \\ x+\beta, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

να είναι συνεχής στο IR.

32. Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$, (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}$

33. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x-1}{3-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

34. Να προσδιορίσετε τα α και β ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} -2\,\eta\mu x, & \text{αν } x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x+\beta, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } \frac{\pi}{2} \leqslant x \end{cases}$$

να είναι συνεχης στο IR.

35. Να προσδιοριστεί το λ ώστε η συνάρτηση

f με $f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x+\lambda\eta\mu x, & \text{αν } x\in[0, \frac{\pi}{4}] \\ (2\lambda+1)\,\varepsilon\varphi x, & \text{αν } x\in(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ να είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$.

36. Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ5x}{2x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημαx}{ημβx}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{εφαx}{βx}$ $(α, β \in \mathbb{R}^*)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-συνx}{x^2}$, (v) $\lim\limits_{x\to \frac{π}{4}} \dfrac{συνx-συν\frac{π}{4}}{ημx-ημ\frac{π}{4}}$

37. Με κατάλληλες ακολουθίες να δειχτεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = ημ\dfrac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$.

38. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

(i) f με $f(x) = ημ\sqrt{1-x^2}$, (ii) g με $g(x) = συν\,(ημ5x)$

39. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$.

40. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} ημ\dfrac{1}{x}, & αν\ x > 0 \\ x, & αν\ x \leqslant 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2ημ\dfrac{1}{x}, & αν\ x \neq 0 \\ 0, & αν\ x = 0 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ ημ\dfrac{1}{x}, & αν\ x \neq 0 \\ 0 & αν\ x = 0. \end{cases}$

41. Αν η συνάρτηση $f: [α, β] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο [α, β] και δε μηδενίζεται για καμιά τιμή του $x \in [α, β]$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β].

42. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+5x^3-x^2+x-1 = 0$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα (0, 1).

43. Αν f και g είναι δυο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [0, 1] τέτοιες, ώστε $f(0) = g(1)$ και $f(1) = g(0)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in [0, 1]$ τέτοιος ώστε $f(ξ) = g(ξ)$.

44. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

45. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^α} = +\infty\ (α > 0)$.

46. Να αποδειχτεί ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -+\infty$, (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

47. Να υπολογίσετε τα όρια

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^α}\ (α > 0)$, (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$

48. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & αν\ x \neq 0 \\ 1, & αν\ x = 0 \end{cases}$

49. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & αν\ x \leqslant 1 \\ x-2+\ln x, & αν\ 1 < x \leqslant 2 \\ \ln x, & αν\ x > 2 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & αν\ x \leqslant 1 \\ 1+\ln x, & αν\ x > 1 \end{cases}$

4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Η ιδέα της παραγώγου σίγουρα έχει τις ρίζες της στην τάση του ανθρώπου να υποκαθιστά στη σκέψη του μια καμπύλη με τεθλασμένη γραμμή που έχει «απειροελάχιστες» πλευρές, εφαπτόμενες της καμπύλης σε αντίστοιχα σημεία της. Είναι γνωστό πόσο αποδοτική έχει αποδειχτεί αυτή η υποκατάσταση, ιδιαίτερα σε θέματα μετρήσεων.

΄Οταν πρόκειται για γραφική παράσταση συνάρτησης, ο καθορισμός της εφαπτομένης σ' ένα σημείο της, οδηγεί στη χρησιμοποίηση του λόγου μεταβολής της συνάρτησης. ΄Ετσι ορίζεται ο «παράγωγος αριθμός» σε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και στη συνέχεια η έννοια της παραγώγου. Η μικρή και προσωρινή απόκλιση από την καθιερωμένη ορολογία, που υιοθετείται εδώ, αποβλέπει στη σαφή διάκριση των δυο εννοιών. Η πρώτη έννοια –παράγωγος αριθμός– είναι όριο πεπερασμένο, δηλαδή είναι πράγματι αριθμός· η δεύτερη –παράγωγος– είναι συνάρτηση που ορίζεται εκ των υστέρων με βάση την πρώτη.

Εφόσον ο μαθητής ξεκαθαρίσει τις παραπάνω έννοιες, δε θα έχει καμιά δυσκολία, χρησιμοποιώντας και αξιοποιώντας βέβαια την έννοια του ορίου, να υπολογίσει τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και να ανακαλύψει τους κανόνες που επιτρέπουν την παραγώγιση άλλων συναρτήσεων πιο σύνθετης μορφής. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας του μαθητή, τα οποία εμφανίζονται σε σχετικό συγκεντρωτικό πίνακα, είναι απαραίτητο να τα συγκρατήσει για να μπορεί με ευχέρεια να τα χρησιμοποιεί.

Το κεφάλαιο περιλαμβάνει ακόμη το θεώρημα Rolle και το βασικό θεώρημα της μέσης τιμής, εμπνευσμένα από απλές γεωμετρικές καταστάσεις. ΄Αμεση συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής είναι και η έννοια της παράγουσας μιας συνάρτησης, που αποτελεί το συνδετικό κρίκο με το επόμενο κεφάλαιο του ολοκληρώματος.

Εξάλλου ενδιαφέρουσες εφαρμογές των παραγώγων είναι: ο υπολογισμός ορισμένων ορίων σε περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών, η μελέτη της μονοτονίας, η εύρεση σημείων καμπής κτλ.

Το κεφάλαιο κλείνει με μια σύνθεση γνώσεων που έχουν προηγηθεί. Εδώ δίνεται ευκαιρία στο μαθητή να μελετήσει με πληρότητα μια συνάρτηση, αξιοποιώντας αποτελεσματικά τα δυο ισχυρά μέσα που διαθέτει, τις έννοιες του ορίου και της παραγώγου.

ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΛΟΓΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στιγμιαία ταχύτητα

4.1 Η θέση ενός *κινητού* M σ' ένα άξονα x΄x αρχής O συνήθως καθορίζεται με μια συνάρτηση s, η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t αντιστοιχίζει την τετμημένη x = s(t) του M (σχ. 1). Τότε:

1

- το διανυόμενο διάστημα μεταξύ t_0 και t είναι $s(t)-s(t_0)$
- η *μέση ταχύτητα* του κινητού στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

$$υ_μ(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Δηλαδή είναι ο λόγος μεταβολής της s μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t, ο οποίος είναι μια νέα συνάρτηση $υ_μ$ της μεταβλητής t.

- η **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t_0 είναι το όριο (αν υπάρχει) του λόγου μεταβολής της s, όταν το t τείνει στο t_0, δηλαδή

$$υ = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Ένα πλήθος άλλων εννοιών της φυσικής ορίζεται με βάση το λόγο μεταβολής μιας συνάρτησης, όπως π.χ. η επιτάχυνση, η ένταση του ρεύματος κτλ.

Κόστος παραγωγής

4.2 Στην Οικονομία το **κόστος** παραγωγής ενός προϊόντος εκφράζεται ως συνάρτηση της ποσότητας που παράγεται. Αν αντιμετωπίζεται αύξηση της παραγωγής από x_0 μονάδες με κόστος $k(x_0)$ σε x μονάδες με κόστος $k(x)$, τότε:

- το κόστος της επιπλέον ποσότητας είναι $k(x)-k(x_0)$ με **μέσο κόστος** (δηλαδή κόστος ανά μονάδα)

$$\frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0}$$

που είναι ο λόγος μεταβολής της συνάρτησης k μεταξύ x_0 και x.

- το **οριακό κόστος** στο x_0 είναι το όριο του λόγου αυτού, όταν το x τείνει στο x_0. Το οριακό κόστος στο x_0 εκφράζεται κατά προσέγγιση, με το μέσο κόστος $\frac{k(x_0+h)-k(x_0)}{h}$ μιας συμπληρωματικής ποσότητας h επιπλέον της ποσότητας x_0, όταν το h είναι συγκριτικά ελάχιστο ως προς το x_0. Με κατάλληλη επιλογή μονάδων σημαίνει πρακτικά το κόστος παραγωγής **μιας** μονάδας επιπλέον ενός «μεγάλου» αριθμού μονάδων, όπως φαίνεται στο επόμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν μετράμε την παραγωγή σε τόννους, τότε το οριακό κόστος στο $x_0 = 3$ είναι, κατά προσέγγιση (για $h = 0{,}001$),

$$\frac{k(3{,}001)-k(3)}{0{,}001}\,\text{δρχ./τον.} = [k(3{,}001)-k(3)]\cdot 1000\,\text{δρχ./τον.} = k(3{,}001)-k(3)\,\text{δρχ./κιλ.}$$

Έτσι, με μονάδα το **κιλό**, το οριακό κόστος εκφράζεται με το κόστος παραγωγής του 3001ου κιλού.

Εφαπτομένη καμπύλης

4.3 Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και M_0 το σημείο της γραφικής της παράστασης C με τετμημένη x_0 (σχ. 2α). Αν M είναι ένα άλλο σημείο της C με τετμημένη x, τότε από τις συντεταγμένες των σημείων $M_0(x_0, f(x_0))$ και $M(x, f(x))$ βρίσκουμε ότι η ευθεία M_0M έχει συντελεστή διευθύνσεως

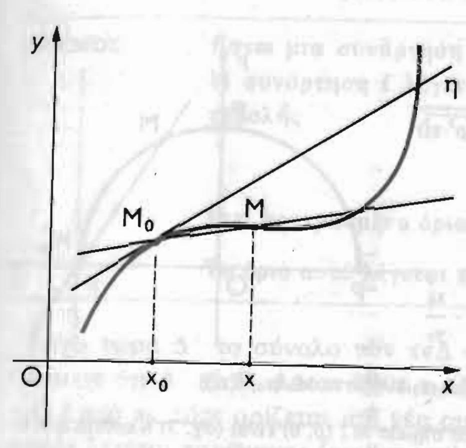
$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

δηλαδή το **λόγο μεταβολής** της f μεταξύ x και x_0.

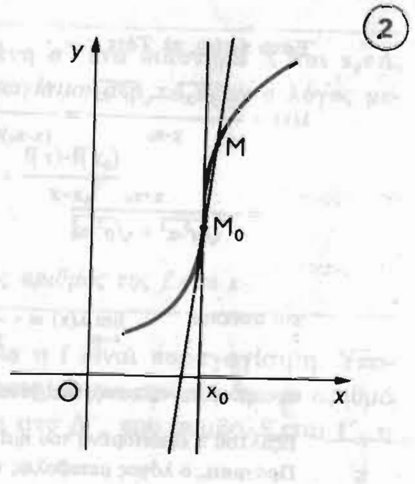
Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)$. Τότε:

- Αν το όριο αυτό είναι **πεπερασμένο**, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) = l\in\mathbb{R}$, οι τιμές του λ(x) συσσωρεύονται στο διάστημα $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ και μάλιστα «όσο θέλουμε κοντά»

(2)



α



β

στο l, αρκεί να πάρουμε το x «αρκετά κοντά» στο x_0. Έτσι, για σημεία M «γειτονικά» του M_0, ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας M_0M είναι κατά προσέγγιση l, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά πρακτικά βρίσκονται στην ευθεία που *διέρχεται από το M_0 και έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό l*. Αυτή η ευθεία με εξίσωση

$$\boxed{y - f(x_0) = l(x-x_0)} \qquad (1)$$

ονομάζεται **εφαπτομένη της C στο σημείο M_0**.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε για σημεία M «γειτονικά» του M_0, οι συντελεστές διευθύνσεως των ευθειών M_0M (σχ. 2β), δε συσσωρεύονται γύρω από κάποιο πραγματικό αριθμό, αλλά για κάθε σημείο M υπάρχει άλλο M΄ στο οποίο αντιστοιχεί συντελεστής διευθύνσεως, κατ' απόλυτη τιμή, μεγαλύτερος. Εξάλλου η ευθεία $x = x_0$, που είναι παράλληλη προς τον άξονα y΄y, δε μπορεί να έχει άλλο κοινό σημείο με την C, εκτός από το M_0 (αφού η C είναι γραφική παράσταση συνάρτησης). Είναι λοιπόν εύλογο να ορίσουμε, στην περίπτωση αυτή, ως **εφαπτομένη της C** την ευθεία

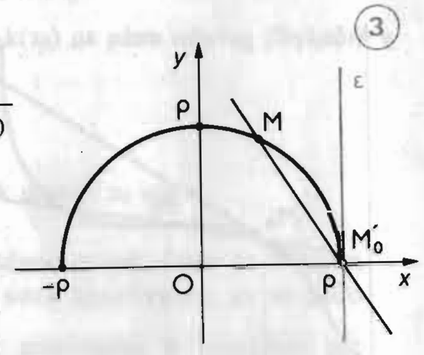
$$\boxed{x = x_0} \qquad (2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι γνωστές από την Αναλυτική Γεωμετρία εξισώσεις εφαπτομένης των κωνικών τομών προκύπτουν και με τον παραπάνω γενικότερο ορισμό της εφαπτομένης. Π.χ. το ημικύκλιο $x^2+y^2 = \rho^2$, $y \geqslant 0$, είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{\rho^2-x^2},\ x \in [-\rho, \rho]$$

Έστω $x_0 \in (-\rho, \rho)$. Τότε



$$\lambda(x) = \frac{\sqrt{\rho^2-x^2} - \sqrt{\rho^2-x_0^2}}{x-x_0} = \frac{x_0^2-x^2}{(x-x_0)(\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2})}$$

$$= -\frac{x+x_0}{\sqrt{\rho^2-x^2} + \sqrt{\rho^2-x_0^2}}$$

και συνεπώς $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x) = -\dfrac{2x_0}{2\sqrt{\rho^2-x_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0}$

που είναι συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο M_0 $(x_0, f(x_0))$.

Εξάλλου η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο M'_0 $(\rho, 0)$ είναι (σχ. 3) η ευθεία $x = \rho$. Πράγματι, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ ρ και $x \in (-\rho, \rho)$ είναι

$$\lambda(x) = -\frac{\sqrt{\rho^2-x^2}}{\rho-x} = -\sqrt{\frac{\rho+x}{\rho-x}}$$

με $\lim\limits_{x \to \rho} \lambda(x) = -\infty$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια της παραγώγου

4.4 Τα παραδείγματα που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους, αν και ανήκουν σε διαφορετικούς κλάδους επιστημών (Φυσική, Οικονομία, Γεωμετρία), οδηγούν στο ίδιο μαθηματικό «φαινόμενο»: Ξεκινώντας κάθε φορά από μια συνάρτηση f και ένα ορισμένο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Δ

- Σχηματίζουμε μια νέα συνάρτηση λ που σε κάθε σημείο $x \neq x_0$ του Δ αντιστοιχίζει το λόγο μεταβολής $\lambda(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ της f μεταξύ x_0 και x.
- Αναζητούμε το $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x)$

Προϋπόθεση είναι βέβαια *ότι το πεδίο ορισμού της* f *περιέχει ένα διάστημα στο οποίο ανήκει το* x_0. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να *περιορίζουμε* την

f στο διάστημα αυτό.

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x)$ είναι πεπερασμένο, δίνεται ο ακόλουθος

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Η συνάρτηση f λέγεται** *παραγωγίσιμη στο* x_0, **όταν ο λόγος μεταβολής**

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

έχει πεπερασμένο όριο στο x_0.

Το όριο αυτό λέγεται *παράγωγος αριθμός της f στο* x_0.

Έστω τώρα Δ΄ το σύνολο των $x \in \Delta$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $\Delta' \neq \varnothing$. Αν σε κάθε $x_0 \in \Delta'$ αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό τής f στο x_0, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση στο Δ΄, που συμβολίζεται f΄, η οποία λέγεται **παράγωγος (συνάρτηση)** της f.

Έτσι, *ο παράγωγος αριθμός της f στο x_0 είναι η τιμή της παραγώγου f΄ στο x_0.*

Δηλαδή

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \qquad (1)$$

Εξάλλου έστω h, τέτοιο ώστε $x_0+h \in \Delta$. Όπως είπαμε στην § 3.20, το σύνολο $\{h : x_0+h \in \Delta\}$ είναι ένα διάστημα I_0 που περιέχει το 0. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0 και x_0+h, για κάθε $h \in I_0-\{0\}$, γράφεται και ως συνάρτηση του h:

$$\lambda(x_0+h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x) = f'(x_0)$, θα είναι, σύμφωνα με την ισοδυναμία (4) της § 3.20,

$$\lim_{h \to 0} \lambda(x_0+h) = f'(x_0)$$

Δηλαδή

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \qquad (2)$$

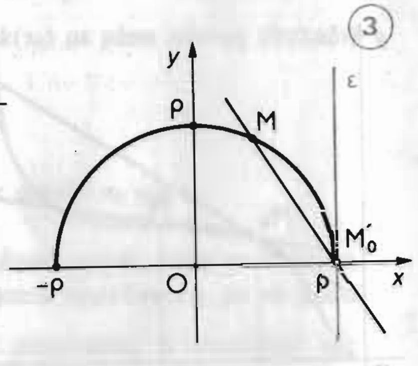
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Μετά τον παραπάνω ορισμό, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφι-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι γνωστές από την Αναλυτική Γεωμετρία εξισώσεις εφαπτομένης των κωνικών τομών προκύπτουν και με τον παραπάνω γενικότερο ορισμό της εφαπτομένης. Π.χ. το ημικύκλιο $x^2+y^2=\rho^2$, $y \geqslant 0$, είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2},\ x\in[-\rho,\rho]$$



Έστω $x_0\in(-\rho,\rho)$. Τότε

$$\lambda(x)=\frac{\sqrt{\rho^2-x^2}-\sqrt{\rho^2-x_0^2}}{x-x_0}=\frac{x_0^2-x^2}{(x-x_0)(\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2})}$$

$$=-\frac{x+x_0}{\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2}}$$

και συνεπώς $\quad \lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)=-\frac{2x_0}{2\sqrt{\rho^2-x_0^2}}=-\frac{x_0}{y_0}$

που είναι συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο M_0 $(x_0, f(x_0))$.

Εξάλλου η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο M'_o $(\rho, 0)$ είναι (σχ. 3) η ευθεία $x=\rho$. Πράγματι, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ ρ και $x\in(-\rho,\rho)$ είναι

$$\lambda(x)=-\frac{\sqrt{\rho^2-x^2}}{\rho-x}=-\sqrt{\frac{\rho+x}{\rho-x}}$$

με $\lim\limits_{x\to\rho}\lambda(x)=-\infty$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια της παραγώγου

4.4 Τα παραδείγματα που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους, αν και ανήκουν σε διαφορετικούς κλάδους επιστημών (Φυσική, Οικονομία, Γεωμετρία), οδηγούν στο ίδιο μαθηματικό «φαινόμενο»: Ξεκινώντας κάθε φορά από μια συνάρτηση f και ένα ορισμένο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Δ

- Σχηματίζουμε μια νέα συνάρτηση λ που σε κάθε σημείο $x \neq x_0$ του Δ αντιστοιχίζει το λόγο μεταβολής $\lambda(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ της f μεταξύ x_0 και x.
- Αναζητούμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)$

Προϋπόθεση είναι βέβαια *ότι το πεδίο ορισμού της* f *περιέχει ένα διάστημα στο οποίο ανήκει το* x_0. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να *περιορίζουμε* την

f στο διάστημα αυτό.

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)$ είναι πεπερασμένο, δίνεται ο ακόλουθος

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0\in\Delta$. Η συνάρτηση f λέγεται *παραγωγίσιμη στο* x_0, όταν ο λόγος μεταβολής**

$$\lambda(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

έχει πεπερασμένο όριο στο x_0.

Το όριο αυτό λέγεται *παράγωγος αριθμός της f στο* x_0.

Έστω τώρα Δ΄ το σύνολο των $x\in\Delta$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $\Delta' \neq \varnothing$. Αν σε κάθε $x_0\in\Delta'$ αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό τής f στο x_0, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση στο Δ΄, που συμβολίζεται f΄, η οποία λέγεται **παράγωγος (συνάρτηση)** της f.

Έτσι, *ο παράγωγος αριθμός της f στο x_0 είναι η τιμή της παραγώγου f΄ στο x_0.*

Δηλαδή

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \tag{1}$$

Εξάλλου έστω h, τέτοιο ώστε $x_0+h\in\Delta$. Όπως είπαμε στην § 3.20, το σύνολο $\{h: x_0+h\in\Delta\}$ είναι ένα διάστημα I_0 που περιέχει το 0. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0 και x_0+h, για κάθε $h\in I_0-\{0\}$, γράφεται και ως συνάρτηση του h:

$$\lambda(x_0+h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)=f'(x_0)$, θα είναι, σύμφωνα με την ισοδυναμία (4) της § 3.20,

$$\lim_{h\to 0}\lambda(x_0+h)=f'(x_0)$$

Δηλαδή

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \tag{2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Μετά τον παραπάνω ορισμό, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφι-

κής παράστασης C της f στο σημείο M_0 (x_0, $f(x_0)$) είναι (§ 4.3)

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)} \qquad (3)$$

2. Η στιγμιαία ταχύτητα υ ενός κινητού στη χρονική στιγμή t_0 είναι η τιμή $s'(t_0)$ της παραγώγου του διαστήματος s στο t_0.

Επίσης το οριακό κόστος είναι η παράγωγος του κόστους παραγωγής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = x^2+xx_0+x_0^2$$

και $\lim_{x\to x_0} \lambda(x) = x_0^2+x_0x_0+x_0^2 = 3x_0^2$. Συνεπώς $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Αλλά το x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$. Έτσι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει παράγωγο (συνάρτηση) f΄ με

$$f'(x) = 3x^2$$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = \frac{1}{x}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^*$ και Δ ένα ανοικτό διάστημα τέτοιο ώστε $x_0 \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^*$. Τότε ο λόγος μεταβολής της g μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$, με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = -\frac{1}{x_0(x_0+h)}$$

Άρα $$g'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{x_0(x_0+h)}\right] = -\frac{1}{x_0^2}$$

Έτσι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και έχει παράγωγο g΄ με

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

3. Θα ζητήσουμε την παράγωγο της συνάρτησης φ με

$$\varphi(x) = |x|$$

Βρίσκουμε πρώτα αν υπάρχει παράγωγος αριθμός στο σημείο 0. Ο λόγος μεταβολής της φ μεταξύ 0 και x είναι

$$\lambda(x) = \frac{|x| - |0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ αν } x > 0 \\ -1, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$

Έτσι θα είναι: $\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0^-} \lambda(x) = -1$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) \neq \lim_{x\to 0^-} \lambda(x)$, η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

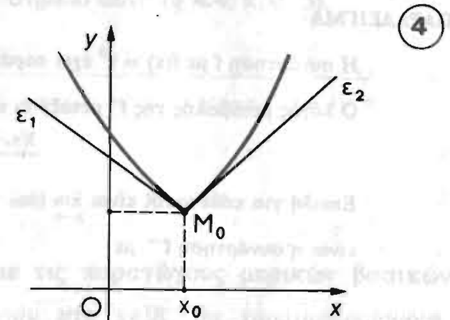
Αντίθετα σε κάθε $x_0 \neq 0$ η φ είναι παραγωγίσιμη, γιατί υπάρχει ανοικτό διάστημα Δ με $x_0 \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^*$, στο οποίο ο λόγος μεταβολής παραμένει σταθερός με τιμή 1, αν $x_0 > 0$ και -1, αν $x_0 < 0$.

Άρα $$\varphi'(x) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x > 0 \\ -1, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$

Μια συνάρτηση λέγεται **παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο,** όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου.

Πλευρική παράγωγος

4.5 Η συνάρτηση f θα λέγεται **παραγωγίσιμη από αριστερά (από δεξιά)** στο x_0, όταν υπάρχει το όριο από αριστερά (από δεξιά) του λόγου μεταβολής της f και είναι **πεπερασμένο.** Το όριο αυτό είναι η τιμή της **παραγώγου από αριστερά (δεξιά)** της f στο x_0 και σημειώνεται $f'_\alpha(x_0)$ $[f'_\delta(x_0)]$.



Οι ημιευθείες (σχ. 4)

$y - f(x_0) = f'_\alpha(x_0)(x-x_0), \quad x \leq x_0$

$y - f(x_0) = f'_\delta(x_0)(x-x_0), \quad x \geq x_0$

λέγονται αντιστοίχως **ημιεφαπτόμενες από αριστερά ή από δεξιά** της γραφικής παράστασης C της f στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$.

Έτσι, είναι φανερό ότι **μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν οι αριθμοί $f'_\alpha(x_0)$, $f'_\delta(x_0)$ και είναι**

$$f'_\alpha(x_0) = f'_\delta(x_0)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+|x+2|$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = -2$.

Είναι $f(-2) = (-2)^2 = 4$. Συνεπώς ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ -2 και x είναι:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-4}{x+2} = \frac{x^2+|x+2|-4}{x+2} = x-2+\frac{|x+2|}{x+2} = \begin{cases} x-3, \text{ αν } x < -2 \\ x-1, \text{ αν } x > -2 \end{cases}$$

Έτσι θα έχουμε $f'_\alpha(-2) = \lim_{x\to -2} (x-3) = -5$, $f'_\delta(-2) = -3$ και επειδή $f'_\alpha(-2) \neq f'_\delta(-2)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -2.

Διαδοχικές παράγωγοι

4.6 Η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f είναι μια νέα συνάρτηση. Επομένως είναι δυνατό να είναι και αυτή παραγωγίσιμη σ' ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Έτσι, θα ορίζεται μια άλλη συνάρτηση, η παράγωγος της f', που λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται συνήθως f''. Ομοίως η παράγωγος της f'' (αν υπάρχει) λέγεται **τρίτη παράγωγος της f** και συμβολίζεται f''' κτλ. Γενικά, για κάθε $\nu \geqslant 2$ η παράγωγος της ν-1 παραγώγου της f (αν υπάρχει) λέγεται **νιοστή παράγωγος της f** και συνήθως για $\nu > 4$ συμβολίζεται $f^{(\nu)}$, επειδή ο συμβολισμός της με τόνους δεν είναι πρόσφορος. Η παράγωγος της f λέγεται και **πρώτη παράγωγος.**

Αν υπάρχει η $f^{(\nu)}$, τότε λέμε ότι η **f** είναι **ν φορές παραγωγίσιμη.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ (§ 4.4 πρδ. 1).

Ο λόγος μεταβολής της f' μεταξύ x_0 και x_0+h, με $h \neq 0$,είναι

$$\frac{3(x_0+h)^2 - 3x_0^2}{h} = 6x_0 + 3h$$

Επειδή για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{h\to 0} (6x_0 + 3h) = 6x_0$, υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και είναι η συνάρτηση f'' με

$$f''(x) = 6x$$

Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Παράγωγος και συνέχεια

4.7 Η παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης συνεπάγεται τη συνέχειά της. Πράγματι, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε θα είναι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Είναι $$\lim_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0. Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Π.χ. η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x) = |x|$$

είναι συνεχής στο 0, γιατί

$$\lim_{x\to 0^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 = f(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)$$

αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό (§ 4.4, πρδ. 3).

Ασκήσεις: 11, 12

Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

4.8 Στην παράγραφο αυτή θα βρούμε τις παραγώγους μερικών βασικών συναρτήσεων. *Για την τιμή της παραγώγου στο* $x \in \mathbb{R}$, *θα χρησιμοποιήσουμε, για λόγους πρακτικούς, και* **το συμβολισμό $(f(x))'$** *αντί του* $f'(x)$.

I. **Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης.** Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Ο λόγος μεταβολής της ταυτοτικής συνάρτησης ι μεταξύ x_0 και x είναι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x) = \frac{\iota(x)-\iota(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda(x) = 1$ και συνεπώς $\iota'(x_0) = 1$. Επειδή όμως το x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$,

Η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\boxed{\iota'(x) = (x)' = 1} \qquad (4)$$

II. **Παράγωγος σταθερής συνάρτησης.** Για τη σταθερή συνάρτηση u με $u(x) = c$, έχουμε

$$\lambda(x) = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

και συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) = 0$

Ώστε: **Η σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$\boxed{u'(x) = (c)' = 0} \qquad (5)$$

ΙΙΙ. Παράγωγος δύναμης. Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ορίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = x^{\nu}$$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0 και x_0+h, για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$, είναι

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^{\nu}-x_0^{\nu}}{h} = \frac{x_0^{\nu}+\binom{\nu}{1}x_0^{\nu-1}h+\ldots+\binom{\nu}{\nu}h^{\nu}-x_0^{\nu}}{h} =$$

$$= \binom{\nu}{1}x_0^{\nu-1}+\binom{\nu}{2}x_0^{\nu-2}h+\ldots+\binom{\nu}{\nu}h^{\nu-1}$$

Άρα $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \binom{\nu}{1}x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}$$

Ώστε: **Η συνάρτηση x^{ν} ($\nu\in\mathbb{N}^*$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$\boxed{(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}} \qquad (6)$$

Γενικότερα, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = x^{\alpha}$$

που έχει πεδίο ορισμού:

- το $\mathbb{R}$, αν $\alpha\in\mathbb{N}^*$
- το $\mathbb{R}^*$, αν $\alpha\in\mathbb{Z}_-$ [π.χ. η x^{-2} ή η x^0 με σταθερή τιμή 1]
- το $\mathbb{R}_+$, αν $\alpha>0$ και $\alpha\notin\mathbb{N}^*$ [π.χ. η $\sqrt{x}$, δηλαδή η $x^{1/2}$]
- το $\mathbb{R}_+^*$, αν $\alpha<0$ και $\alpha\notin\mathbb{Z}$ [π.χ. η $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, δηλαδή η $x^{-2/3}$]

Έστω Α το πεδίο ορισμού της f και $x_0\in A$. Τότε:

1. Αν $x_0\neq 0$ υπάρχει, σε κάθε περίπτωση, ανοικτό διάστημα Δ με $x_0\in\Delta\subseteq A$. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0 και x_0+h με $h\neq 0$, γράφεται:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^{\alpha}-x_0^{\alpha}}{h} = \frac{x_0^{\alpha}(1+\frac{h}{x_0})^{\alpha}-x_0^{\alpha}}{h} = x_0^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{h}{x_0})^{\alpha}-1}{\frac{h}{x_0}}$$

Αλλά ((4), § 3.20, και § 3.26, εφαρ. 2) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+\frac{h}{x_0})^{\alpha}-1}{\frac{h}{x_0}} = \alpha$ και συνεπώς

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}x_0^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{h}{x_0})^{\alpha}-1}{\frac{h}{x_0}} = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

2. Αν $x_0 = 0$, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ 0 και x είναι $\dfrac{x^{\alpha}-0}{x-0} = x^{\alpha-1}$ και έχει όριο 0, εκτός από την περίπτωση $0<\alpha<1$ που έχει όριο $+\infty$.

Γενικά: **Η συνάρτηση x^{α} είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της Α, εκτός από το 0 όταν $0<\alpha<1$, και**

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}} \qquad (7)$$

IV. Παράγωγος τετραγωνικής ρίζας. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα, για $\alpha = \frac{1}{2}$, έχουμε ότι:

Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}} \qquad (8)$$

V. Παράγωγος ημιτόνου. Για τη συνάρτηση ημίτονο έχουμε για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$

$$\frac{\eta\mu(x_0+h)-\eta\mu x_0}{h} = \frac{2\eta\mu\frac{h}{2}\,\sigma\upsilon\nu(x_0+\frac{h}{2})}{h} = \frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\sigma\upsilon\nu(x_0+\frac{h}{2})$$

Αλλά (§ 3.17) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu(x_0+\frac{h}{2}) = \sigma\upsilon\nu x_0$

Άρα $$\lim_{h\to 0}\frac{ημ(x_0+h)-ημ(x_0)}{h} = συνx_0$$

Ώστε: Η συνάρτηση ημίτονο είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\boxed{(ημx)' = συνx} \tag{9}$$

VI. **Παράγωγος συνημιτόνου.** Ομοίως, για τη συνάρτηση συνημίτονο έχουμε για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$

$$\frac{συν(x_0+h)-συνx_0}{h} = \frac{-2ημ\frac{h}{2}\,ημ\,(x_0+\frac{h}{2})}{h} = -\frac{ημ\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,ημ(x_0+\frac{h}{2})$$

Άρα $$\lim_{h\to 0}\frac{συν(x_0+h)-συνx_0}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{ημ\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\lim_{h\to 0}ημ(x_0+\frac{h}{2}) = -ημx_0$$

Ώστε: Η συνάρτηση συνημίτονο είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\boxed{(συνx)' = -ημx} \tag{10}$$

VII. **Παράγωγος της e^x.** Η συνάρτηση f με

$$f(x) = e^x$$

έχει λόγο μεταβολής μεταξύ x_0 και x_0+h, για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$,

$$\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}$$

Αλλά (§ 3.25, εφαρ. 3) είναι $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ και συνεπώς

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}) = e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^{x_0}$$

Ώστε: Η συνάρτηση e^x είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\boxed{(e^x)' = e^x} \tag{11}$$

VIII. **Παράγωγος της lnx.** Θεωρούμε τέλος τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \ln x$$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ και $h\neq 0$ τέτοιο ώστε $x_0+h\in\mathbb{R}_+^*$, δηλαδή $h > -x_0$

Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0, $x_0+h\in\mathbb{R}_+^*$, είναι

$$\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h} = \frac{\ln\frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \frac{1}{x_0}\,\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\,\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{(1+\frac{h}{x_0})-1}$$

Αλλά (§ 3.26, εφαρ. 1) είναι $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{(1+\frac{h}{x_0})-1} = 1$ και συνεπώς

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0}\cdot 1 = \frac{1}{x_0}$$

Ώστε: Η συνάρτηση lnx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \tag{12}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = x^2$ (παραβολή). Να βρεθούν οι ευθείες $y = λx-1$ οι οποίες εφάπτονται της $\mathcal{C}$ και να δειχτεί ότι τέμνονται σ' ένα σημείο του άξονα y΄y.

Αν (x_0, y_0) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου επαφής, τότε θα είναι (σχ. 5α)

(1) $\quad y_0 = x_0^2 \quad$ και $\quad y_0 = λx_0-1 \quad$ (2)

Η τιμή της παραγώγου της f στο x_0 είναι $f'(x_0) = 2x_0$ και συνεπώς ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης θα είναι

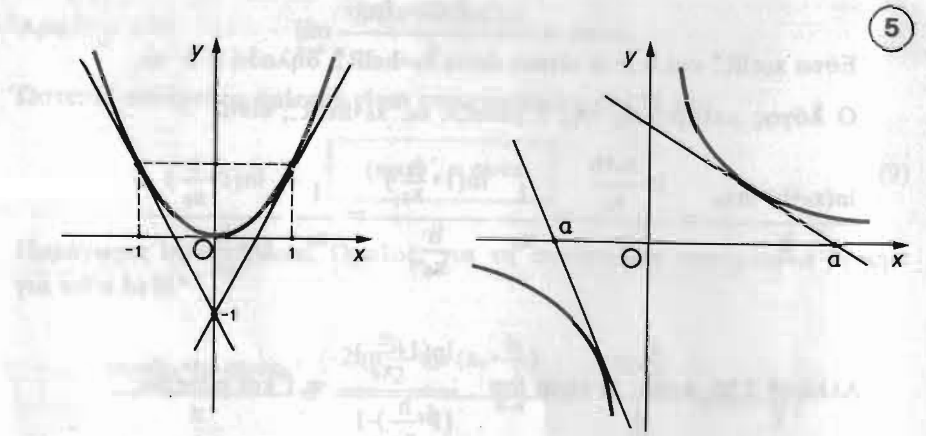
$$λ = 2x_0 \tag{3}$$

Από το σύστημα των (1), (2), (3) βρίσκουμε:

$$x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ λ = 2 \quad ή \quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ λ = -2$$

Άρα οι ευθείες είναι: η $y = 2x-1$ που εφάπτεται της $\mathcal{C}$ στο (1, 1)
και η $y = -2x-1$ που εφάπτεται της $\mathcal{C}$ στο (-1, 1)

Οι ευθείες αυτές διέρχονται από το σημείο (0, -1) του άξονα y΄y.



α β

2. Να δειχτεί ότι από κάθε σημείο (α, 0), με $\alpha \neq 0$, του άξονα x΄x διέρχεται μια μόνο εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{1}{x}$ (υπερβολή).

Αν (x_0, y_0) είναι το σημείο επαφής, τότε ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης θα είναι $\lambda = g'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Άρα η εφαπτομένη που διέρχεται από το (α, 0) θα είναι η

$y = -\frac{1}{x_0^2}(x-\alpha)$. Έτσι θα έχουμε το σύστημα $\begin{cases} y_0 = \frac{1}{x_0} \\ y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x_0-\alpha) \end{cases}$ το οποίο, επειδή

$x_0 \neq 0$, έχει τη μοναδική λύση $x_0 = \frac{\alpha}{2}$, $y_0 = \frac{2}{\alpha}$ (σχ. 5β).

Άρα από το (α, 0) διέρχεται μόνο μια εφαπτομένη, η $y = -\frac{4}{\alpha^2}(x-\alpha)$

Ασκήσεις: 13, 14, 15

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

4.9 Στα επόμενα θα θεωρήσουμε συναρτήσεις που ορίζονται σ' ένα διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο $x_0 \in \Delta$. Για το άθροισμα δυο τέτοιων συναρτήσεων έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι**

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

Ο λόγος μεταβολής της f+g μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε

$$\lim_{h \to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g, f_1, f_2, ..., f_k είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε και οι f+g, $f_1+f_2+...+f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι**

- $(f+g)' = f'+g'$
- $(f_1+f_2+...+f_k)' = f_1'+f_2'+...+f_k'$

Η δεύτερη περίπτωση του πορίσματος αποδεικνύεται επαγωγικά.

Παράγωγος γινομένου

4.10 Επίσης για το γινόμενο συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα Δ έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η $(f \cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη

Ο λόγος μεταβολής της $f \cdot g$ μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι (§ 4.7) συνεχής και συνεπώς $\lim\limits_{h\to0} g(x_0+h) = g(x_0)$. Εξάλλου, επειδή και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, από την παραπάνω ισότητα θα έχουμε:

$$\lim_{h\to0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)\right]+\lim_{h\to0} f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to0} g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\lim_{h\to0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

δηλαδή $$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις $f, g, f_1, f_2, ..., f_k$ είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$, τότε και οι $f\cdot g$, λf, $f_1\cdot f_2\cdot ...\cdot f_k$, f^k είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι**

1. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
2. $(\lambda\cdot f)' = \lambda f'$
3. $(f_1\cdot f_2\cdot ...\cdot f_k)' = \sum\limits_{i=1}^{k}(f_1\cdot ...\cdot f_{i-1}f_i'f_{i+1}\cdot ...\cdot f_k)$
4. $(f^k)' = kf^{k-1}f'$

Πράγματι, η περίπτωση 1 προκύπτει άμεσα από το θεώρημα και η 2 από την 1, όταν η g είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή λ. Η περίπτωση 3 αποδεικνύεται επαγωγικά, ενώ η 4 είναι συνέπεια της 3.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

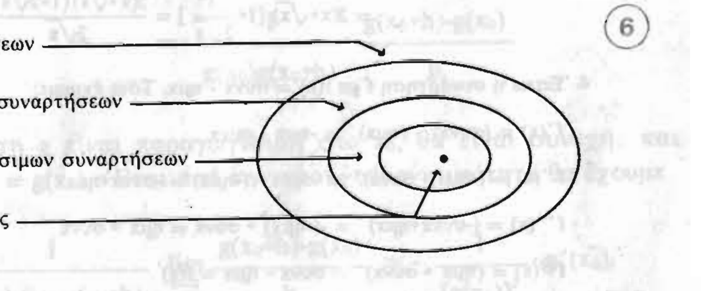
Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα της § 4.9 έχουμε ότι:

Το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' ένα κοινό διάστημα Δ

είναι διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Δ.

Επειδή ακόμη το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο Δ είναι κλειστό και ως προς τον πολλαπλασιασμό, συμπεραίνουμε ότι:

Το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' ένα κοινό διάστημα Δ είναι δακτύλιος.



6

Τα ίδια συμβαίνουν και με το σύνολο των συναρτήσεων που είναι 2, 3, ..., ν φορές παραγωγίσιμες στο Δ, καθώς και γενικότερα για τις συνεχείς συναρτήσεις στο Δ (§ 3.14).

Στο σχήμα 6 φαίνονται όλοι οι παραπάνω «υποδακτύλιοι» του δακτυλίου F_Δ των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για την παράγωγο της συνάρτησης P με $P(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, έχουμε

$$P'(x) = (\alpha x^2)'+(\beta x)'+(\gamma)' = \alpha(x^2)'+\beta(x)' = \alpha\cdot 2x+\beta = 2\alpha x+\beta$$

$$P''(x) = (2\alpha x+\beta)' = (2\alpha x)' = 2\alpha(x)' = 2\alpha$$

$$P'''(x) = 0$$

Γενικότερα για τη συνάρτηση P με

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

έχουμε:

$$P'(x) = (\alpha_\nu x^\nu)'+(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})' + ... + (\alpha_1 x)'+(\alpha_0)' = \alpha_\nu(x^\nu)'+\alpha_{\nu-1}(x^{\nu-1})'+ ... + \alpha_1(x)'$$
$$= \alpha_\nu \nu x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}(\nu-1)x^{\nu-2} + ... + \alpha_1 = \nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2} + ... + \alpha_1$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι

$$P^{(\nu)}(x) = \nu(\nu-1)\ ...\ 2\alpha_\nu = \nu!\alpha_\nu$$

2. Για τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f με

$$f(x) = (x-\alpha)^3,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

έχουμε (§ 4.10, Πόρισμα 4)

$$f'(x) = [(x-\alpha)^3]' = 3\cdot(x-\alpha)^2(x-\alpha)' = 3(x-\alpha)^2[(x)'-(\alpha)'] = 3(x-\alpha)^2 \text{ και}$$

$$f''(x) = [3(x-\alpha)^2]' = 3[(x-\alpha)^2]' = 3[2(x-\alpha)(x-\alpha)'] = 6(x-\alpha)$$

3. Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με $g(x) = (x+\sqrt{x})^2$ έχει παράγωγο g' με

$$g'(x) = 2(x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x})' = 2(x+\sqrt{x})[(x)'+(\sqrt{x})']$$

$$= 2(x+\sqrt{x})\,[1+\frac{1}{2\sqrt{x}}] = \frac{2(x+\sqrt{x})(1+2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

4. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \text{συν}x - \text{ημ}x$. Τότε έχουμε:

$$f'(x) = (\text{συν}x)' - (\text{ημ}x)' = -\text{ημ}x - \text{συν}x$$

$$f''(x) = (-\text{ημ}x - \text{συν}x)' = -\text{συν}x - (-\text{ημ}x) = -\text{συν}x+\text{ημ}x$$

$$f'''(x) = (-\text{συν}x+\text{ημ}x)' = -(-\text{ημ}x) + \text{συν}x = \text{ημ}x + \text{συν}x$$

$$f^{(4)}(x) = (\text{ημ}x + \text{συν}x)' = \text{συν}x - \text{ημ}x = f(x)$$

5. Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2e^x + x\ln x$ έχει παράγωγο g' με

$$g'(x) = (x^2e^x)' + (x\ln x)' = [(x^2)'e^x+x^2(e^x)'] + [(x)'\ln x+x(\ln x)']$$

$$= (2xe^x+x^2e^x) + (\ln x+x\cdot\frac{1}{x}) = xe^x(x+2)+\ln x+1$$

και δεύτερη παράγωγο g'' με

$$g''(x) = [xe^x(x+2)]' + (\ln x)' = (x)'e^x(x+2) + x(e^x)'(x+2) + xe^x(x+2)' + \frac{1}{x}$$

$$= e^x(x+2) + xe^x(x+2) + xe^x\cdot 1 + \frac{1}{x} = e^x(x^2+4x+2) + \frac{1}{x}$$

Παράγωγος πηλίκου

4.11 Για το πηλίκο συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα Δ έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και είναι**

$$1.\quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$2.\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Απόδειξη

1. Ο λόγος μεταβολής της $\frac{1}{g}$ μεταξύ x_0, $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\lambda(x_0+h) = \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0)\cdot g(x_0+h)}$$

$$= -\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι συνεχής και συνεπώς $\lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$. Έτσι από την προηγούμενη ισότητα θα έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\lambda(x_0+h) = -\frac{1}{g(x_0)\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = -\frac{1}{[g(x_0)]^2}\cdot g'(x_0).$$

2. Έχουμε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $g(x) \neq 0$, τότε και οι $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και**

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι ζητείται η παράγωγος της συνάρτησης f με

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι πηλίκο των συναρτήσεων f_1 με $f_1(x) = x^3$ και f_2 με $f_2(x) = x^2-1$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Η f ορίζεται στο $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Επειδή σε καθένα από τα διαστήματα που αποτελούν το A ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγούμενου πορίσματος, η f είναι παραγωγίσιμη στο Α και είναι

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x) = \frac{f_1'(x)\cdot f_2(x) - f_1(x)\cdot f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}$$

$$= \frac{(x^3)'(x^2-1) - x^3(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι** $\forall\, \alpha \in [\mathbb{R}_+^* - \{1\}]$, $(\log_\alpha x)' = \dfrac{1}{x\ln\alpha}$

Πράγματι, λόγω της περίπτωσης 2 του πορίσματος της § 4.10, έχουμε

$$(\log_\alpha x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln\alpha}\right)' = \frac{1}{\ln\alpha}(\ln x)' = \frac{1}{\ln\alpha}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln\alpha}$$

2. **Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση εφαπτομένη είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και**

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Πράγματι, η εφx ορίζεται σε κάθε x με συνx $\neq 0$. Έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Ασκήσεις: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27

Σύνθεση συναρτήσεων

4.12 Έστω ότι ζητάμε την παράγωγο της συνάρτησης

$$\eta\mu 2x$$

η οποία είναι σύνθεση της συνάρτησης g με $g(x) = 2x$ και της συνάρτησης ημίτονο. Επειδή ημ2x = 2ημxσυνx, θα έχουμε

$$(\eta\mu 2x)' = 2[(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)']$$
$$= 2(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$$

Έτσι η παράγωγος της συνάρτησης ημ2x θα είναι η συνάρτηση **2συν2x** και όχι η συν2x, όπως ίσως θα περίμενε κανείς.

Για την παράγωγο της σύνθεσης συναρτήσεων θα αποδείξουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω g και f δυο συναρτήσεις από τις οποίες η g είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και η f είναι ορισμένη σε διάστημα Ε $\supseteq g(\Delta)$ και παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$. Τότε η σύνθεσή τους $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και**

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

* **Απόδειξη.** Ο λόγος μεταβολής της $f\circ g$ μεταξύ x_0, $x\in\Delta$ γράφεται για κάθε $x \neq x_0$:

$$\lambda(x) = \frac{(f\circ g)(x) - (f\circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \tag{1}$$

• Έστω $g(x) \neq g(x_0)$. Τότε θέτοντας

$$g(x) = y \qquad \text{και} \qquad g(x_0) = y_0$$

έχουμε $y \neq y_0$ και

$$\lambda(x) = \frac{f(y) - f(y_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}\cdot\frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : E \to \mathbb{R}$ με

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, & \text{αν } y \neq y_0 \\ f'(y_0), & \text{αν } y = y_0 \end{cases}$$

Τότε η (2) γράφεται

$$\lambda(x) = F(g(x))\cdot\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \tag{3}$$

* Έστω $g(x) = g(x_0)$, δηλαδή $y = y_0$. Τότε $F(g(x)) = f'(y_0)$ και η (3) εξακολουθεί να ισχύει επειδή τα μέλη της μηδενίζονται, το πρώτο λόγω της (1) και το δεύτερο λόγω της $g(x) = g(x_0)$.

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda(x)$ από την (3).

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$

Επίσης επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο y_0 είναι

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0)$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της § 3.18, θα είναι

$$\lim_{x\to x_0} F(g(x)) = \lim_{y\to y_0} F(y) = f'(y_0)$$

Επομένως έχουμε τελικά:

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \lambda(x) = f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, τότε (§ 3.22, Πόρισμα) το g(Δ) είναι επίσης διάστημα. Αν λοιπόν και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ), τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1 **Η συνάρτηση $\alpha^x (\alpha > 0)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$$

Πράγματι, επειδή $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ η συνάρτηση α^x είναι σύνθεση των συναρτήσεων g με $g(x) = x\ln\alpha$ και f με $f(x) = e^x$. Έτσι έχουμε:

$$(\alpha^x)' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2 **Έστω g μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $g(x) > 0$, τότε**

$$(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

Πράγματι, επειδή η $\sqrt{g(x)}$ είναι σύνθεση των g και f με $f(x) = \sqrt{x}$, θα έχουμε

$$(\sqrt{g(x)})' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι ζητείται η παράγωγος της συνάρτησης F με $F(x) = (5x^3-7)^2$. Η F είναι σύνθεση των g με $g(x) = 5x^3-7 = y$ και f με $f(y) = y^2$. Επειδή $f'(y) = 2y$ και $g'(x) = 15x^2$, θα έχουμε

$$[(5x^3-7)^2]' = 2(5x^3-7) \cdot 15x^2 = 30x^2(5x^3-7)$$

2. Για την παράγωγο της συνάρτησης $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ έχουμε (Πόρισμα 2)

$$(\sqrt{x^3-1})' = \frac{(x^3-1)'}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

3. Ας υποθέσουμε ότ: ζητείται η παράγωγος της συνάρτησης F με $F(x) = συν^2 4x$. Η F είναι σύνθεση των συναρτήσεων f_1 με $f_1(x) = συν4x = y$ και f_2 με $f_2(y) = y^2$, δηλαδή $F = f_2 \circ f_1$. Έτσι, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$F'(x) = (f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = 2 \cdot συν4x \cdot (συν4x)'$$

Ομοίως έχουμε $(συν4x)' = (-ημ4x)(4x)' = -4ημ4x$ και συνεπώς

$$F'(x) = -8ημ4xσυν4x = -4ημ8x$$

4. Επίσης έχουμε

$$(e^{\sqrt{x^2+1}})' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot (\sqrt{x^2+1})' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2xe^{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Τους κυριότερους κανόνες παραγώγισης καθώς και τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων που εξετάσαμε στα προηγούμενα περιλαμβάνει ο επόμενος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ(1)

f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)	Συνάρτηση	Παράγωγος
x	1	$ημx$	$συνx$	$f+g$	$f'+g'$
c	0	$συνx$	$-ημx$	$f \cdot g$	$f'g+fg'$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$εφx$	$\frac{1}{συν^2x}$	λf	$\lambda f'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$\sqrt{g(x)}$	$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	α^x	$\alpha^x\ln\alpha$	$f \circ g$	$(f' \circ g) \cdot g'$
		$\ln x$	$\frac{1}{x}$		
		$\log_\alpha x$	$\frac{1}{x\ln\alpha}$		

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x-e^x}{1+x\ln x}$**

Εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης και έχουμε

$$f'(x) = \frac{(x-e^x)' \cdot (1+x\ln x) - (x-e^x)(1+x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2} = \frac{(1-e^x)(1+x\ln x) - (x-e^x)(x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2}$$

$$= \frac{1+x\ln x - e^x - xe^x\ln x - x\ln x - x + e^x\ln x + e^x}{(1+x\ln x)^2} = \frac{(1-x)(1+e^x\ln x)}{(1+x\ln x)^2}$$

2. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (συνx)^{ημx}$**

(1) Δεν αναφέρονται οι ειδικότερες προϋποθέσεις που απαιτούνται, για να είναι παραγωγίσιμες οι συναρτήσεις.

Έχουμε $f(x) = (συνx)^{ημx} = e^{(ημx)\ln(συνx)}$ και συνεπώς

$$f'(x) = e^{(ημx)\ln(συνx)} \cdot [ημx \cdot \ln(συνx)]' = (συνx)^{ημx} \cdot [(ημx)'\ln(συνx) + ημx[\ln(συνx)]']$$
$$= (συνx)^{ημx} \cdot [συνx \cdot \ln(συνx) + ημx \cdot \frac{1}{συνx} \cdot (συνx)']$$
$$= (συνx)^{ημx} \cdot [συνx \cdot \ln(συνx) - εφx \cdot ημx] = (συνx)^{1+ημx} \cdot [\ln(συνx) - εφ^2x]$$

3. **Να βρεθεί το σύνολο στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f με:**

$$f(x) = x + |x^2 - x|$$

Επειδή το δυώνυμο $x^2-x = x(x-1)$ είναι μη αρνητικό στο $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ και αρνητικό στο $(0, 1)$, η f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ -x^2+2x, & \text{αν } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x$ και στο $(0, 1)$ με παράγωγο $f'(x) = -2x+2$.

Μένει να εξετάσουμε, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και το 1. Έχουμε:

$$f'_α(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ και } f'_δ(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2+2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (-x+2) = 2$$

και επειδή $f'_α(0) \neq f'_δ(0)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ομοίως έχουμε:

$$f'_δ(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2 \text{ και}$$

$$f'_α(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2+2x-(-1^2+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2+2x-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} [-(x-1)] = 0 \neq f'_δ(1)$$

και συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Ασκήσεις: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Ακρότατα συνάρτησης

4.13 Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $Δ = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ με

$$f(x) = (x^2-1)^2+2$$

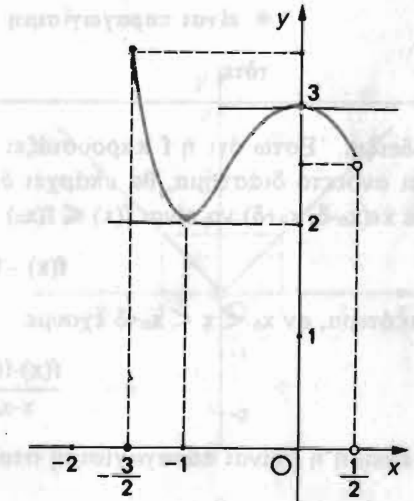
Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο -1, αφού για κάθε $x \in Δ$,

$$f(x) = (x^2-1)^2+2 \geq 2 = f(-1)$$

Εξάλλου η f παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{3}{2}$. Πράγματι, για κάθε $x \in Δ$ έχουμε

$$0 \leq |x| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow -1 \leq x^2-1 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow (x^2-1)^2 \leq \frac{25}{16}$$
$$\Rightarrow (x^2-1)^2+2 \leq \frac{25}{16} + 2 \Rightarrow f(x) \leq f(-\frac{3}{2})$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $f(0) = 3$, ενώ υπάρχει διάστημα $Δ_0$ τέτοιο ώστε ο περιορισμός της f στο $Δ \cap Δ_0$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο 0. Πράγματι έχουμε



$$f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow (x^2-1)^2+2 \leq 3$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Συνεπώς για $Δ_0 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ έχουμε

$$Δ \cap Δ_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

και για κάθε $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ είναι

$$f(x) \leq f(0)$$

Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει *τοπικό μέγιστο* στο σημείο 0.

Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ή έχει *τοπικό μέγιστο* (*τοπικό ελάχιστο*) σ' ένα σημείο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $δ > 0$ τέτοιο ώστε:**

$$\forall x \in A, \quad |x - x_0| < δ \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad [f(x) \geq f(x_0)]$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το μέγιστο (ελάχιστο) μιας συνάρτησης, αν υπάρχει, είναι και τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο). Για διάκριση ονομάζεται **ολικό μέγιστο (ολικό ελάχιστο)**.

Θα λέμε ακόμη ότι η f έχει σ' ένα σημείο **τοπικό ακρότατο,** όταν η f έχει στο σημείο αυτό τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

Ειδικότερα, έστω ότι η f ορίζεται σε **ανοικτό** διάστημα Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, π.χ. τοπικό μέγιστο, στο $x_0 \in Δ$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, η γραφική παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο M_0 με τετμημένη x_0. Όλα τα γειτονικά σημεία, εκατέρωθεν του M_0, είναι «κάτω» από την εφαπτομένη που διέρχεται από το M_0, το οποίο έχει τη μέγιστη τεταγμένη. Έτσι η εφαπτομένη πρέπει να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που σημαίνει ότι $f'(x_0) = 0$.

Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f:**

- **ορίζεται σ' ένα *ανοικτό* διάστημα Δ**
- **παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$**
- **είναι παραγωγίσιμη στο x_0**

τότε $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη. Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Τότε, αφού το Δ είναι ανοικτό διάστημα, θα υπάρχει διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ να είναι $f(x) \leqslant f(x_0)$

ή
$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0$$

Ειδικότερα, αν $x_0 < x < x_0+\delta$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι (§ 4.5)

$$f'(x_0) = f'_\delta(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$

δηλαδή
$$f'(x_0) \leqslant 0 \qquad (1)$$

Αν όμως είναι $x_0-\delta < x < x_0$, θα έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

και συνεπώς

$$f'(x_0) = f'_a(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

δηλαδή
$$f'(x_0) \geqslant 0 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $f'(x_0) = 0$

Ανάλογη είναι η απόδειξη για την περίπτωση τοπικού ελαχίστου.

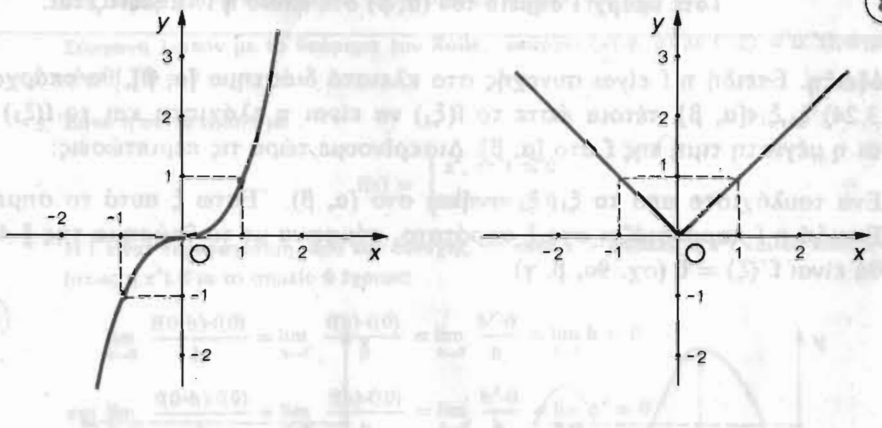
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο **ανοικτού** διαστήματος είναι αναγ-

καία. Π.χ. η συνάρτηση $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x+1$, έχει μέγιστο στο $x_0 = 1$, γιατί για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) = 2x+1 \leqslant 2 \cdot 1+1 = 3 = f(1)$, αλλά η παράγωγός της στο σημείο αυτό είναι $f'(1) = 2 \neq 0$.

2. Ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ (σχ. 8α) έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ που η τιμή της στο $x_0 = 0$ είναι $f'(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο σημείο αυτό, γιατί για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) = x^3 < 0$, ενώ για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = x^3 > 0$.

8



α β

3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (§ 4.4, πρβ. 3). Όμως έχει ελάχιστο στο σημείο αυτό, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) = |x| \geqslant 0 = \varphi(0)$ (σχ. 8β).

Ασκήσεις: 39

Θεώρημα Rolle

4.14 Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η αναζήτηση ενός τοπικού ακροτάτου της f σ' ένα διάστημα Δ, αν εξαιρέσουμε τα άκρα του διαστήματος και τα σημεία στα οποία η f΄ δεν ορίζεται, θα πρέπει να γίνει μεταξύ των σημείων εκείνων στα οποία μηδενίζεται η παράγωγός της. Στα επόμενα μαθήματα θα φανεί η ολοένα και μεγαλύτερη σημασία της παραγώγου για τη μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ένα πρώτο βήμα αποτελεί το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως

ΘΕΩΡΗΜΑ *Rolle* **Έστω η συνάρτηση f για την οποία υποθέτουμε ότι:**

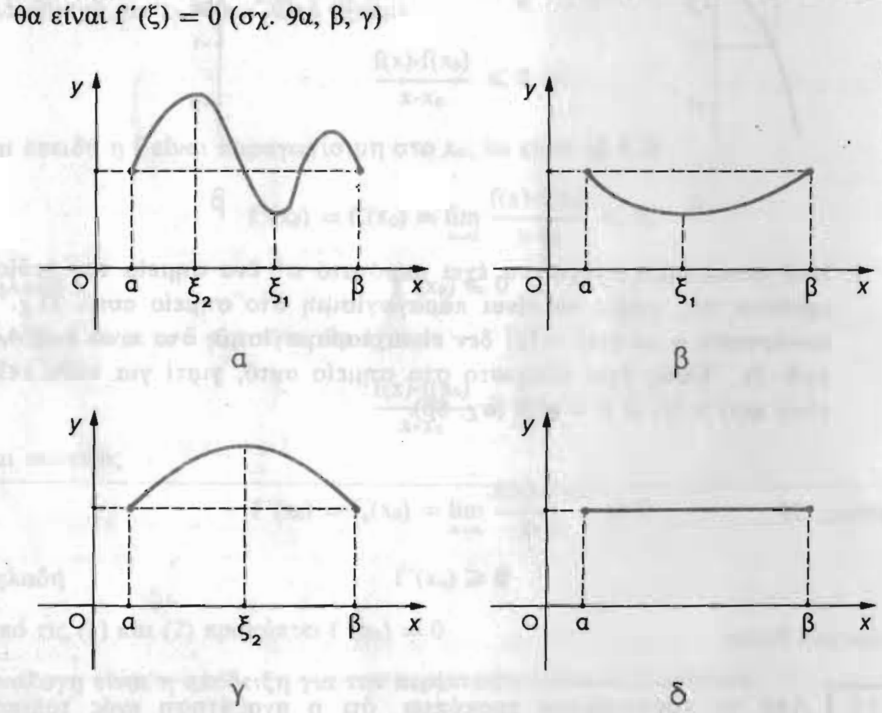
- **είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β],**
- **είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)**
- **f(α) = f(β)**

Τότε υπάρχει σημείο του (α, β) στο οποίο η f΄ μηδενίζεται.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β], θα υπάρχουν (§ 3.24) $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε το $f(\xi_1)$ να είναι η ελάχιστη και το $f(\xi_2)$ να είναι η μέγιστη τιμή της f στο [α, β]. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Ένα τουλάχιστο από τα ξ_1, ξ_2 ανήκει στο (α, β). Έστω ξ αυτό το σημείο. Επειδή η f παρουσιάζει στο ξ ακρότατο, σύμφωνα με το θεώρημα της § 4.13 θα είναι $f'(\xi) = 0$ (σχ. 9α, β, γ)

9



- Τα ξ_1, ξ_2 δεν ανήκουν στο (α, β), οπότε είναι τα άκρα α, β του διαστήματος. Τότε, επειδή f(α) = f(β), η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f συμπίπτουν και

συνεπώς η f θα είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή f(α) (σχ. 9δ). Έτσι όμως (§ 4.8, II) θα είναι

$$\forall x \in (\alpha, \beta), \quad f'(x) = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [-ρ, ρ]. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (-ρ, ρ) και

$$f'(x) = \frac{(\rho^2 - x^2)'}{2\sqrt{\rho^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

Στα άκρα ρ και -ρ η f δεν είναι παραγωγίσιμη (πρδ. 1, § 4.3).

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (-\rho, \rho)$ με $f'(\xi) = 0$. Πράγματι, είναι $f'(0) = 0$.

2. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leqslant 0 \\ x^3, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, σε κάθε x > 0 (όπως η x^2) και σε κάθε x < 0 (όπως η x^3). Για το σημείο 0 έχουμε:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$$

και $$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0$$

Άρα $f'(0) = 0$.

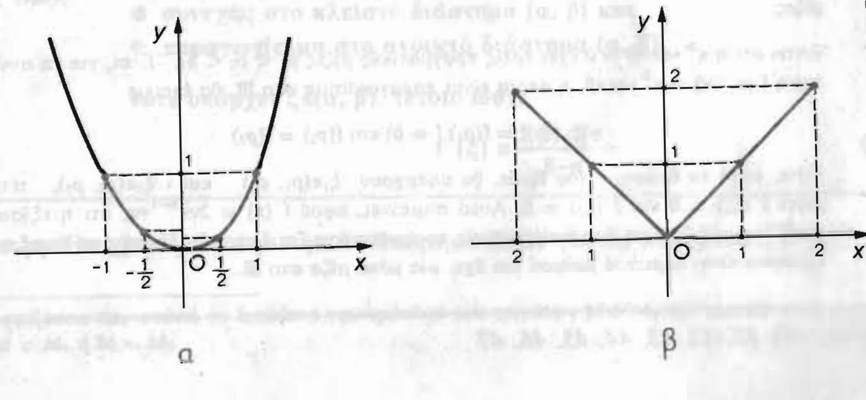
Εξάλλου, παρατηρούμε ότι είναι:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 \quad \text{και} \quad f(1) = 1^3 = 1$$

δηλαδή f(-1) = f(1)

Επομένως, στο διάστημα [-1, 1] έχει εφαρμογή το θεώρημα του Rolle (σχ. 10α).

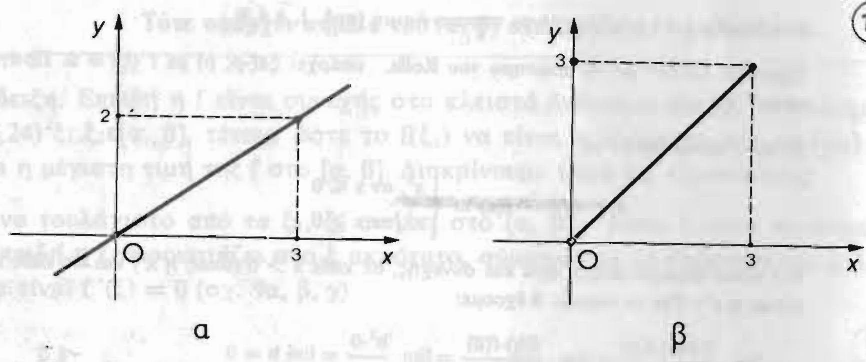
10



3. Για τη συνάρτηση φ με $\varphi(x) = |x|$ διαπιστώνουμε ότι:
- είναι συνεχής στο $[-2, 2]$
- $\varphi(-2) = \varphi(2) = 2$
- δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και συνεπώς ούτε στο $(-2, 2)$

Επομένως δεν έχει εφαρμογή το θεώρημα Rolle. Πράγματι, για κάθε $x \neq 0$ είναι $\varphi'(x) = 1$ ή $\varphi'(x) = -1$ (σχ. 10β).

4. Η συνάρτηση σ με $\sigma(x) = \frac{2}{3}x$ είναι συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), ενώ είναι $\sigma(\alpha) \neq \sigma(\beta)$. Συνεπώς και εδώ δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle (σχ. 11α).



(11)

5. Η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3, & \text{αν } x = 0 \\ x, & \text{αν } 0 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ και είναι $\varphi(0) = 3 = \varphi(3)$, αλλά η φ δεν είναι συνεχής στο $[0, 3]$ (γιατί δεν είναι συνεχής στο 0). Επομένως και πάλι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle. Πράγματι, η παράγωγος της φ στο $(0, 3)$ είναι $\varphi'(x) = 1 \neq 0$ (σχ. 11β).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^{2\nu}+\alpha x+\beta = 0$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$) δεν έχει περισσότερες από δυο πραγματικές ρίζες.

Έστω ότι η $x^{2\nu}+\alpha x+\beta = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Έτσι, για τη συνάρτηση f με $f(x) = x^{2\nu}+\alpha x+\beta$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα έχουμε

$$f(\rho_1) = f(\rho_2)\ [= 0] \text{ και } f(\rho_2) = f(\rho_3)$$

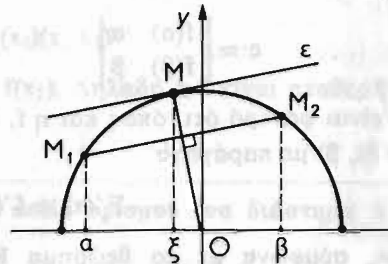
Τότε, κατά το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$. Αυτό σημαίνει, αφού $f'(x) = 2\nu x^{2\nu-1}+\alpha$, ότι η εξίσωση $2\nu x^{2\nu-1}+\alpha = 0$ θα έχει δυο διαφορετικές πραγματικές ρίζες ξ_1 και ξ_2. Η διώνυμη όμως αυτή εξίσωση είναι περιττού βαθμού και έχει μία μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις: 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47

Θεώρημα μέσης τιμής

4.15 Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι μια προϋπόθεση για να ισχύει το θεώρημα του Rolle είναι $f(\alpha) = f(\beta)$. Θα εξετάσουμε γενικά την περίπτωση που τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ μπορεί να είναι και διαφορετικά με ένα απλό γεωμετρικό παράδειγμα. Το ημικύκλιο $x^2+y^2 = \rho^2$, $y \geqslant 0$ (σχ. 12) είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{\rho^2-x^2}$$



(12)

η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-\rho, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(-\rho, \rho)$. Αν $M_1(\alpha, f(\alpha))$ και $M_2(\beta, f(\beta))$, με $\alpha < \beta$, είναι δυο σημεία του ημικυκλίου, τότε η ευθεία M_1M_2 θα έχει συντελεστή διευθύνσεως

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Από τη γεωμετρία ξέρουμε, ότι η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο μέσο M του τόξου M_1M_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2. Αν ξ είναι η τετμημένη του M, θα είναι $\alpha < \xi < \beta$ και ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης θα είναι $f'(\xi)$. Έτσι θα έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Ειδικότερα, αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $f'(\xi) = 0$, συμπέρασμα που συμφωνεί με το θεώρημα Rolle.

Γενικά θα αποδείξουμε το επόμενο θεμελιώδες θεώρημα, που αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Rolle, και είναι γνωστό ως

ΘΕΩΡΗΜΑ *μέσης τιμής*

Αν η συνάρτηση f είναι
- **συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β),**

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

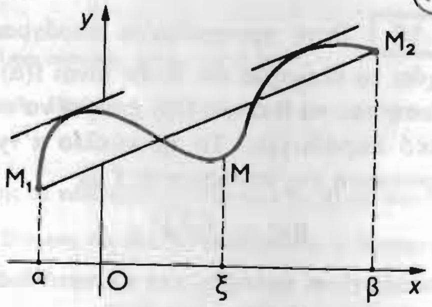
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (3)$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση F με[1]

(1) Η ορίζουσα παριστάνει το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου M_1MM_2 και φυσικά είναι μηδέν, όταν $M = M_1$ ή $M = M_2$.

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(\alpha) & \alpha & 1 \\ f(\beta) & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

13



για την οποία είναι $F(\alpha) = F(\beta) [= 0]$.
Η F γράφεται

$$F(x) = f(x)(\alpha-\beta)-x[f(\alpha)-f(\beta)]+c$$

με $$c = \begin{vmatrix} f(\alpha) & \alpha \\ f(\beta) & \beta \end{vmatrix}$$

και είναι φανερό ότι, όπως και η f, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$F'(x) = f'(x)(\alpha-\beta) + f(\beta)-f(\alpha) \quad (4)$$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$, ή λόγω της (4), $0 = f'(\xi)(\alpha-\beta) + f(\beta) - f(\alpha)$. Έτσι θα έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η ισότητα (3) γράφεται ισοδύναμα

$$\boxed{f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha)\cdot f'(\xi)}$$

2. Το θεώρημα ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής. Αν θεωρήσουμε τα σημεία $M_1(\alpha, f(\alpha))$ και $M_2(\beta, f(\beta))$ της γραφικής παράστασης C της f, υπάρχει ξ μεταξύ α και β τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2 (σχ. 13).

Ασκήσεις: 48, 49, 50, 51, 52

Άμεσες συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

4.16 Πριν δούμε τις πολλές και χρήσιμες εφαρμογές του θεωρήματος της μέσης τιμής, θα αναφέρουμε μερικές άμεσες συνέπειές του. Συγκεκριμένα:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.**

Απόδειξη. Έστω x_1, x_2 δυο *οποιαδήποτε* σημεία του Δ. Τότε η f ικανοποιεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ τις συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής και συνεπώς θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2-x_1)$$

Επειδή όμως $f'(x_0) = 0$, θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$. Δηλαδή η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **είναι παραγωγίσιμες στο Δ**
- **$f' = g'$**

Τότε υπάρχει σταθερή στο Δ συνάρτηση u, τέτοια ώστε

$$f = g + u$$

Πράγματι, έχουμε για κάθε $x \in \Delta$:

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f'(x)-g'(x) = 0 \Rightarrow (f'-g')(x) = 0 \Rightarrow (f-g)'(x) = 0$$

Συνεπώς η $f-g$ είναι μια σταθερή στο Δ συνάρτηση u. Άρα $f = g+u$.

Παράγουσα συνάρτηση

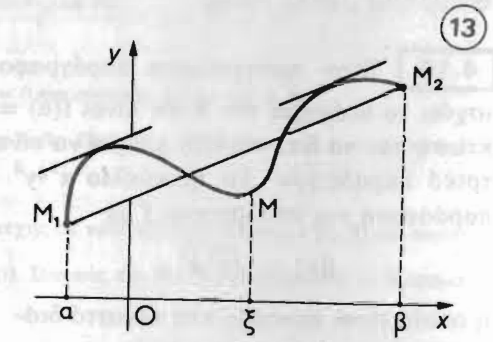
4.17 Επειδή η παράγωγος της x^3 είναι $3x^2$, θα έχουμε ότι

$$x^2 = \frac{1}{3}(x^3)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)'$$

Η συνάρτηση $\frac{x^3}{3}$ καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{x^3}{3}+c$ (c σταθερό) έχει παράγωγο x^2 και χαρακτηρίζεται ως *«παράγουσα»* ή *«αρχική συνάρτηση»* της x^2.

Γενικά δίνεται ο επόμενος

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(\alpha) & \alpha & 1 \\ f(\beta) & \beta & 1 \end{vmatrix}$$



για την οποία είναι $F(\alpha) = F(\beta)[=0]$.
Η F γράφεται

$$F(x) = f(x)(\alpha-\beta)-x[f(\alpha)-f(\beta)]+c$$

με $$c = \begin{vmatrix} f(\alpha) & \alpha \\ f(\beta) & \beta \end{vmatrix}$$

και είναι φανερό ότι, όπως και η f, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$F'(x) = f'(x)(\alpha-\beta) + f(\beta)-f(\alpha) \tag{4}$$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$, ή λόγω της (4), $0 = f'(\xi)(\alpha-\beta) + f(\beta) - f(\alpha)$. Έτσι θα έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η ισότητα (3) γράφεται ισοδύναμα

$$\boxed{f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha)\cdot f'(\xi)}$$

2. Το θεώρημα ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής. Αν θεωρήσουμε τα σημεία $M_1(\alpha, f(\alpha))$ και $M_2(\beta, f(\beta))$ της γραφικής παράστασης C της f, υπάρχει ξ μεταξύ α και β τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2 (σχ. 13).

Ασκήσεις: 48, 49, 50, 51, 52

Άμεσες συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

4.16 Πριν δούμε τις πολλές και χρήσιμες εφαρμογές του θεωρήματος της μέσης τιμής, θα αναφέρουμε μερικές άμεσες συνέπειές του. Συγκεκριμένα:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \epsilon \Delta$ είναι $f'(x) = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.**

Απόδειξη. Έστω x_1, x_2 δυο *οποιαδήποτε* σημεία του Δ. Τότε η f ικανοποιεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ τις συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής και συνεπώς θα υπάρχει $x_0 \epsilon (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2-x_1)$$

Επειδή όμως $f'(x_0) = 0$, θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$. Δηλαδή η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **είναι παραγωγίσιμες στο Δ**
- **$f' = g'$**

Τότε υπάρχει σταθερή στο Δ συνάρτηση u, τέτοια ώστε

$$f = g+u$$

Πράγματι, έχουμε για κάθε $x \epsilon \Delta$:

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f'(x)-g'(x) = 0 \Rightarrow (f'-g')(x) = 0 \Rightarrow (f-g)'(x) = 0$$

Συνεπώς η f-g είναι μια σταθερή στο Δ συνάρτηση u. Άρα $f = g+u$.

Παράγουσα συνάρτηση

4.17 Επειδή η παράγωγος της x^3 είναι $3x^2$, θα έχουμε ότι

$$x^2 = \frac{1}{3}(x^3)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)'$$

Η συνάρτηση $\frac{x^3}{3}$ καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{x^3}{3}+c$ (c σταθερό) έχει παράγωγο x^2 και χαρακτηρίζεται ως *«παράγουσα»* ή *«αρχική συνάρτηση»* της x^2.

Γενικά δίνεται ο επόμενος

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε *παράγουσα* (ή *αρχική*) *συνάρτηση* της f κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία**

$$F' = f$$

Αν F είναι παράγουσα της f και u μια σταθερή στο Δ συνάρτηση, τότε και η F+u είναι επίσης μια παράγουσα της f, γιατί $(F+u)' = F'+0 = f$.

Αντιστρόφως, κάθε παράγουσα της f, σύμφωνα με το πόρισμα της προηγούμενης παραγράφου είναι της μορφής F+u.

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και F μια παράγουσά της. Το σύνολο των παραγουσών της f το αποτελούν οι συναρτήσεις F+u, όπου u μια οποιαδήποτε σταθερή στο Δ συνάρτηση.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια παράγουσα της συνάρτησης συνx είναι η ημx (γιατί είναι (ημx)′ = συνx) και το σύνολο των παραγουσών της αποτελούν οι συναρτήσεις της μορφής ημx+c.

Από τον πίνακα των παραγώγων (τέλος § 4.12) προκύπτει ο επόμενος πίνακας με τις παράγουσες μερικών βασικών συναρτήσεων

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	c	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	e^x	e^x+c
1	$x+c$	ημx	−συνx+c	α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	συνx	ημx+c	$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$
		$\frac{1}{συν^2x}$	εφx+c	$\frac{1}{x\ln\alpha}$	$\log_\alpha x+c$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα f′ = f, αν και μόνο αν**

$$f(x) = ce^x$$

Πράγματι, είναι φανερό ότι $(ce^x)' = ce^x$

Αντιστρόφως, έστω μια συνάρτηση f τέτοια ώστε f′ = f. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση F με

$$F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

είναι σταθερή

Η F είναι παραγωγίσιμη και

$$F'(x) = \frac{f'(x)\cdot e^x - f(x)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{f(x)\cdot e^x - f(x)\cdot e^x}{(e^x)^2} = 0$$

Συνεπώς (§ 4.16) η F είναι μια σταθερή στο ℝ συνάρτηση. Αν c η τιμή της, θα έχουμε

$$\frac{f(x)}{e^x} = c \quad ή \quad f(x) = ce^x.$$

2. **Να δειχτεί ότι, αν οι συναρτήσεις f, g είναι:**
- **συνεχείς στο κλειστό διάστημα [α, β] και**
- ***παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (α, β)***

τότε υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε

$$[f(\beta) - f(\alpha)]\, g'(\xi) = [g(\beta) - g(\alpha)]\, f'(\xi) \tag{1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση C με

$$C(x) = [f(\beta) - f(\alpha)]\, g(x) - [g(\beta) - g(\alpha)]\, f(x)$$

η οποία, είναι φανερό, ότι είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Μάλιστα είναι

$$C'(x) = [f(\beta) - f(\alpha)]\, g'(x) - [g(\beta) - g(\alpha)]\, f'(x) \tag{2}$$

Ακόμη παρατηρούμε ότι είναι

$$C(\alpha) = f(\beta)\, g(\alpha) - g(\beta)\, f(\alpha) = C(\beta)$$

Συνεπώς κατά το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε C′(ξ) = 0. Τότε από τη (2) προκύπτει η (1)

Σημείωση

Η ισότητα (1), στην περίπτωση που είναι $g(\alpha) \neq g(\beta)$ και $g'(\xi) \neq 0$, παίρνει την επόμενη μορφή

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{3}$$

Στην ειδική περίπτωση που η g είναι η ταυτοτική συνάρτηση g(x) = x, τότε από την (3) προκύπτει το θεώρημα μέσης τιμής (§ 4.15).

3. **Να αποδειχτεί ότι για κάθε x∈(0,1) είναι**

$$1+x < e^x < 1+ex$$

Επειδή η e^x είναι παραγωγίσιμη στο [0, x] με παράγωγο e^x, θα υπάρχει ξ μεταξύ 0 και x τέτοιος ώστε

$$\frac{e^x - e^0}{x-0} = e^\xi \quad ή \quad \frac{e^x - 1}{x} = e^\xi \tag{1}$$

Αλλά η e^x είναι γνησίως αύξουσα, και επειδή $0 < \xi < x < 1$ θα έχουμε

$$e^0 < e^\xi < e^1$$

και λόγω της (1)

$$1 < \frac{e^x-1}{x} < e$$

από την οποία προκύπτει η ζητουμένη.

Ασκήσεις: 53, 54, 55

Απροσδιόριστες μορφές

4.18 Στα προηγούμενα είδαμε ότι το όριο ορισμένων ρητών συναρτήσεων υπολογίζεται, παρόλο που δε μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας του ορίου πηλίκου. Π.χ. το όριο στο 1 της συνάρτησης $\frac{3x^2-3}{x^2-x}$ υπολογίζεται αν και $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-3) = 0$ (απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$). Πράγματι, για $x \neq 1$ είναι $\frac{3x^2-3}{x^2-x} = \frac{3(x+1)}{x}$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}3(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}x} = 6$$

Απροσδιόριστη μορφή παρουσιάζουν και μη ρητές συναρτήσεις, οι οποίες δεν απλοποιούνται όπως έγινε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Π.χ. επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(e^x-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x = 0$, το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Όμως και το όριο αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε, αν παρατηρήσουμε ότι π.χ. για κάθε $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) - \{0\}$ είναι

$$\frac{e^x-1}{\eta\mu x} = \frac{\dfrac{e^x-e^0}{x-0}}{\dfrac{\eta\mu x-\eta\mu 0}{x-0}}$$

Τα όρια των όρων του δεύτερου κλάσματος είναι οι τιμές στο 0 των παραγώγων των συναρτήσεων f με $f(x) = e^x$ και g με $g(x) = \eta\mu x$ αντιστοίχως. Είναι δηλαδή οι αριθμοί

$$f'(0) = e^0 = 1 \quad \text{και} \quad g'(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

Άρα
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1$$

Η ιδιότητα αυτή, που επιτρέπει να ανάγεται το όριο του πηλίκου συναρτήσεων στο όριο του πηλίκου των παραγώγων τους, ισχύει γενικότερα για συναρτήσεις που πληρούν ορισμένες συνθήκες. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως **κανόνας του De l' Hospital.**

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ με $x_0\in\Delta$**
- **η g' είναι συνεχής στο x_0 με $g'(x_0) \neq 0$**
- **$f(x_0) = g(x_0) = 0$**

Τότε: $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Απόδειξη. Επειδή η g' είναι συνεχής στο x_0, σε μια περιοχή του x_0 θα έχει (§ 3.11, 6) το πρόσημο του ορίου της, $g'(x_0) \neq 0$, δηλαδή υπάρχει διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$ με $x_0\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε

$$\forall x\in\Delta_1, \quad g'(x) \neq 0 \tag{6}$$

Εξάλλου για κάθε $x\in\Delta_1$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ξ μεταξύ x_0 και x (§ 4.15), τέτοιο ώστε $g(x)-g(x_0) = g'(\xi)(x-x_0)$ ή, επειδή $g(x_0) = 0$,

$$g(x) = g'(\xi)\,(x-x_0)$$

Από την ισότητα αυτή και την (6) προκύπτει ότι

$$\forall x\in\Delta_1 \text{ με } x \neq x_0, \quad g(x) \neq 0$$

Τότε, για κάθε τέτοιο x ορίζεται το πηλίκο των συναρτήσεων και θα έχουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \tag{7}$$

Επειδή όμως υπάρχουν τα όρια στο x_0 των όρων του τελευταίου κλάσματος της (7) και είναι αντιστοίχως $f'(x_0)$ και $g'(x_0) \neq 0$, θα υπάρχει το όριο του πρώτου κλάσματος και θα είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω ότι ζητείται το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x^2}{x^3-x}$.

Οι συναρτήσεις f με $f(x) = \eta\mu x-x^2$ και g με $g(x) = x^3-x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Ακόμη είναι $f(0) = g(0) = 0$. Επίσης $f'(x) = συνx-2x$, $g'(x) = 3x^2-1$ (συνεχής) και $g'(0) = -1 \neq 0$. Επειδή υπάρχουν όλες οι προϋποθέσεις εφαρμογής του κανόνα De l' Hospital, θα έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{ημx-x^2}{x^3-x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{-1} = -1$$

2. Για να εξετάσουμε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x+(x-1)}{e^{x-1}-x^2}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις f με $f(x) = \ln x+(x-1)$ και g με $g(x) = e^{x-1}-x^2$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}^*_+$ (στο οποίο ανήκει το 1) και μάλιστα είναι:

$$f(1) = 0, \quad g(1) = 0$$

και $$f'(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad g'(x) = e^{x-1}\cdot 1-2x, \quad g'(1) = -1 \neq 0$$

Άρα $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x+(x-1)}{e^{x-1}-x^2} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = -2$$

Γενίκευση του θεωρήματος De l' Hospital

4.19 Σχετικά με το όριο του πηλίκου δυο συναρτήσεων αποδεικνύεται[1] γενικότερα και η ακόλουθη μορφή του θεωρήματος De l' Hospital.

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **Είναι παραγωγίσιμες τουλάχιστο σ' ένα διάστημα με άκρο x_0**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- **Σε μια περιοχή του x_0 είναι $g'(x) \neq 0$**
- **υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Τότε $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το θεώρημα ισχύει και για όρια των συναρτήσεων στο $+\infty$ ή $-\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι ζητείται το $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$

Οι συναρτήσεις f με $f(x) = \ln x$ και g με $g(x) = \sqrt{x-1}$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $(1, +\infty)$. Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ και για κάθε $x > 1$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \neq 0$.

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

Εξάλλου είναι $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x}$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} = 0$$

Άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} = 0$

Κατά την εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος είναι ενδεχόμενο τα όρια στο x_0 και των f', g' να είναι 0. Τότε, αν οι συναρτήσεις f', g' ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, θα υπάρχει στο x_0 το όριο της $\frac{f'}{g'}$, και θα είναι $\lim\limits_{x_0} \frac{f'}{g'} = \lim\limits_{x_0} \frac{f''}{g''}$. Έτσι όμως θα έχουμε και

$$\lim_{x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x_0} \frac{f''}{g''}$$

Είναι φανερό, ότι το ίδιο μπορεί να επαναληφθεί και για τις συναρτήσεις f'' και g'' κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Για να εξετάσουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημx-x}{xημx}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις f με $f(x) = ημx-x$ και g με $g(x) = xημx$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα είναι $f(0) = g(0) = 0$. Εξάλλου έχουμε $f'(x) = συνx-1$, $g'(x) = ημx+xσυνx$ και παρατηρούμε ότι είναι επίσης $f'(0) = g'(0) = 0$. Οι συναρτήσεις f', g' είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι $f''(x) = -ημx$, $g''(x) = 2συνx-xημx$. Επειδή

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-ημx}{2συνx-xημx} = 0, \quad \text{θα έχουμε} \quad \lim_{x\to 0} \frac{ημx-x}{xημx} = 0$$

Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$

4.20 Όταν το $\lim\limits_{x_0} \frac{f}{g}$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, δηλαδή όταν $\lim\limits_{x_0} f = \pm\infty$, $\lim\limits_{x_0} g = \pm\infty$, και υπάρχει το $\lim\limits_{x_0} \frac{f'}{g'}$, αποδεικνύεται[1] ότι και πάλι έχουμε

$$\lim_{x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x_0} \frac{f'}{g'}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις f με $f(x) = \ln x$

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

και την ταυτοτική $\iota(x) = x$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες σε κάθε διάστημα $(\alpha, +\infty)$ με $\alpha > 0$ και μάλιστα είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty = \lim_{x\to+\infty} x$$

Επειδή είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, θα είναι και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Άλλες απροσδιόριστες μορφές, π.χ. $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$ κτλ. ανάγονται σε εφαρμογή των παραπάνω, όπως φαίνεται στα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x}\right) = 0$

Οι συναρτήσεις $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{\eta\mu x}$ είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $x \neq 0$ και είναι

- $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$
- $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{\eta\mu x} = -\infty$

Έτσι, η εφαρμογή του κανόνα ορίου αθροίσματος οδηγεί στις απροσδιόριστες μορφές

$$(+\infty) - (+\infty) \text{ ή } (-\infty) - (-\infty)$$

Όμως και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu x - x}{x\eta\mu x}$ και επειδή (§ 4.19, παρδ. 2)

$$\lim_{x\to0} \frac{\eta\mu x - x}{x\eta\mu x} = 0, \quad \text{θα είναι και} \quad \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x}\right) = 0$$

2. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x) = 0$.

Επειδή $\lim_{x\to0^+} \eta\mu x = 0$ και $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα ορίου γινομένου [οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$].

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $\eta\mu x \cdot \ln x$ γράφεται:

$$\eta\mu x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}}$$

οπότε η εφαρμογή του κανόνα του ορίου πηλίκου οδηγεί στην μορφή $\frac{-\infty}{+\infty}$. Επειδή

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)' = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}, \text{ θα είναι } \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)'} = -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}} = -\frac{\eta\mu^2 x}{x\sigma\upsilon\nu x},$$ που ση-

μαίνει ότι η εφαρμογή του κανόνα ορίου πηλίκου θα οδηγήσει πάλι σε απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$. Γι' αυτό εφαρμόζουμε πάλι το θεώρημα De l' Hospital. Έχουμε:

$$(\eta\mu^2 x)' = 2\eta\mu x(\eta\mu x)' = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x, \quad (x\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$$

και επειδή $\lim_{x\to0^+} (\eta\mu^2 x)' = 0$, $\lim_{x\to0^+} (x\sigma\upsilon\nu x)' = 1$, θα είναι $\lim_{x\to0^+} \left(-\frac{\eta\mu^2 x}{x\sigma\upsilon\nu x}\right) = 0$.

Άρα θα είναι και $\lim_{x\to0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x) = 0$.

3. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το $\lim_{x\to0^+} x^x$.

Επειδή η εφαρμογή του κανόνα ορίου δύναμης οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή 0^0, γράφουμε τη συνάρτηση

$$x^x = e^{x\ln x}$$

και εργαζόμαστε με τον εκθέτη $x\ln x$, τον οποίο, όπως στην προηγούμενη εφαρμογή, γράφουμε

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Επειδή $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, εξετάζουμε τις συναρτήσεις $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $x \neq 0$ και είναι

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} (-x) = 0$$

Άρα θα είναι και $\lim_{x\to0^+} x \ln x = 0$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχτεί ότι $\lim \frac{2^\nu}{\nu^2} = +\infty$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$ $(x \neq 0)$ της οποίας περιορισμός στο $\mathbb{N}^*$ είναι η ακολουθία $\frac{2^\nu}{\nu^2}$

Η f είναι πηλίκο των f_1 με $f_1(x) = 2^x$ και f_2 με $f_2(x) = x^2$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε κάθε διάστημα $(\alpha, +\infty)$ με $\alpha > 0$ και μάλιστα είναι $\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Εξάλλου είναι $f_1'(x) = 2^x\ln 2$, $f_2'(x) = 2x$ και παρατηρούμε ότι είναι επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} (2^x\ln 2) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} 2x$$

Οι συναρτήσεις f_1', f_2' είναι παραγωγίσιμες σε μια περιοχή του $+\infty$, με παραγώγους $f_1''(x) = 2^x(\ln 2)^2$, $f_2''(x) = 2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x(\ln 2)^2}{2} = +\infty$, θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Επομένως (§ 3.2, παρτ. 4) θα είναι και $\lim\left(\dfrac{2^\nu}{\nu^2}\right) = +\infty$.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία συνάρτησης

4.21 Στην § 1.10είδαμε ότι το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ καθορίζεται από το πρόσημο του λόγου μεταβολής της. Π.χ. αν η f είναι αύξουσα στο Δ, τότε για κάθε $x_0, x \in \Delta$ θα είναι

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \qquad (1)$$

Αν όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, τότε από την (1) προκύπτει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

και αυτό συμβαίνει για κάθε $x_0 \in \Delta$.

Αντιστρόφως, αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) \geqslant 0$, τότε η f θα είναι αύξουσα στο Δ. Πράγματι, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, θα υπάρχει ξ μεταξύ x_1 και x_2, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

και επειδή $f'(\xi) \geqslant 0$, θα είναι $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0$, που σημαίνει ότι η f είναι αύξουσα στο Δ.

Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε, όταν η f είναι στο Δ φθίνουσα. Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Τότε η f είναι:**

- **αύξουσα στο Δ, αν και μόνο αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) \geqslant 0$**
- **φθίνουσα στο Δ, αν και μόνο αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) \leqslant 0$**

Ειδικότερα αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) > 0$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, λόγω της (2), θα είναι επίσης και $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ομοίως βρίσκουμε ότι, αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Έχουμε λοιπόν και το

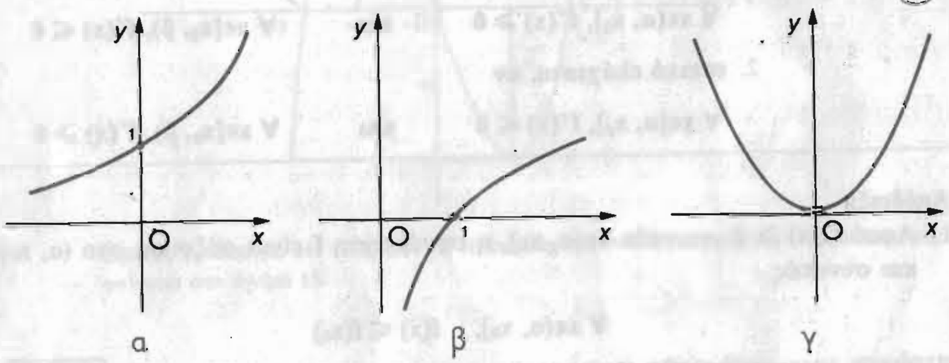
ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι:**

- **$f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ**
- **$f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η εκθετική συνάρτηση f με $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί έχει παράγωγο $f'(x) = e^x$ και είναι: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (σχ. 14α).

14



2. Η λογαριθμική συνάρτηση g με

$$g(x) = \ln x,\ x > 0$$

είναι γνησίως αύξουσα, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$ είναι (σχ. 14β)

$$g'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

3. Η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x) = x^2$$

είναι γνησίως αύξουσα, αν $x > 0$ και γνησίως φθίνουσα, αν $x < 0$ (σχ. 14γ). Πράγματι, η παράγωγός της $\varphi'(x) = 2x$ είναι:

$$\varphi'(x) < 0,\ \text{αν } x < 0 \quad \text{και} \quad \varphi'(x) > 0,\ \text{αν } x > 0$$

(Για $x = 0$ έχουμε ελάχιστο της φ, γιατί $0 \leqslant \varphi(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο του θεωρήματος 2 δεν αληθεύει. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$, ενώ είναι $f'(0) = 0$.

Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

4.22 Με βάση τα θεωρήματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να εντοπίσουμε τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης. Συγκεκριμένα έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα *ανοικτό* διάστημα[1] (α, β) και ότι στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι $f'(x_0) = 0$. Η f παρουσιάζει στο x_0**

1. τοπικό μέγιστο, αν

$$\forall x \in (\alpha, x_0],\ f'(x) \geqslant 0 \quad \text{και} \quad \forall x \in [x_0, \beta),\ f'(x) \leqslant 0$$

2. τοπικό ελάχιστο, αν

$$\forall x \in (\alpha, x_0],\ f'(x) \leqslant 0 \quad \text{και} \quad \forall x \in [x_0, \beta),\ f'(x) \geqslant 0$$

Απόδειξη

1. Αφού $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$, η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ και συνεπώς

$$\forall x \in (\alpha, x_0], \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

Ομοίως, η f είναι φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$ και συνεπώς

$$\forall x \in [x_0, \beta), \quad f(x_0) \geqslant f(x)$$

Δηλαδή έχουμε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(x) \leqslant f(x_0)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

2. Εργαζόμαστε ομοίως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x$ έχει παράγωγο f' με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

(1) Δεν αποκλείονται οι περιπτώσεις $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$.

και, όπως φαίνεται αμέσως, είναι

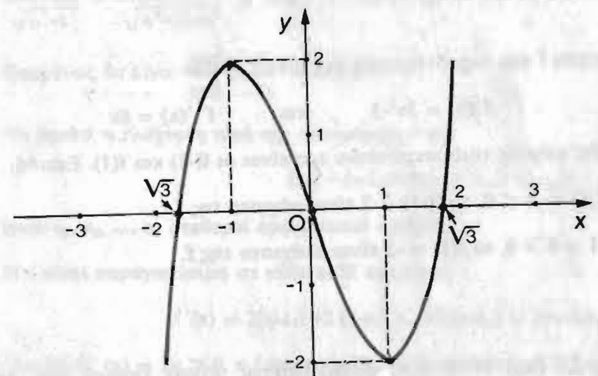
$$f'(-1) = 0 \quad \text{και} \quad f'(1) = 0$$

Συνεπώς στα σημεία -1 και 1 είναι ενδεχόμενο η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	2	↘	−2	↗	

Επειδή η f' μηδενίζεται στο -1 αλλάζοντας πρόσημο από + σε -, το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ είναι μέγιστο της συνάρτησης f.



Ομοίως βρίσκουμε ότι το $f(1) = -2$ είναι ελάχιστο της f. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο σχήμα 15.

4.23 Ένα άλλο κριτήριο για την εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης (αν υπάρχουν) αποτελεί και το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0) = 0$.**

1. Αν $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

2. Αν $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Απόδειξη

Έχουμε: $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ και επειδή $f'(x_0) = 0$

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0}$$

1. Έστω $f''(x_0) > 0$. Τότε από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει (§ 3.11, 6) ότι υπάρχει διάστημα $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ με $x \neq x_0$ να είναι:

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$$

Έτσι για κάθε $x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ θα έχουμε $f'(x) < 0$, ενώ για κάθε $x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ θα έχουμε $f'(x) > 0$. Και επειδή $f'(x_0) = 0$, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, το $f(x_0)$ θα είναι ελάχιστο της f.

2. Η περίπτωση αυτή εξετάζεται ομοίως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τη συνάρτηση f του παραδείγματος της § 4.22 έχουμε

$$f'(x) = 3x^2-3 \quad \text{και} \quad f''(x) = 6x$$

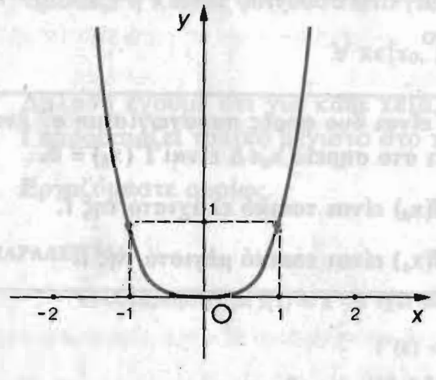
και βρήκαμε ότι πιθανές τιμές ακροτάτων της είναι οι f(-1) και f(1). Επειδή:

- $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$, το $f(-1) = 2$ είναι μέγιστο της f.
- $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, το $f(1) = -2$ είναι ελάχιστο της f.

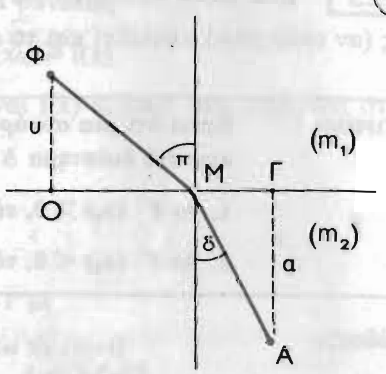
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η συνθήκη $f''(x_0) \neq 0$ του θεωρήματος είναι ικανή για την ύπαρξη ακροτάτου της f στο x_0, όχι όμως και αναγκαία. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^4$ έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2$ που η τιμή της στο 0 είναι $f''(0) = 0$. Εντούτοις η f έχει στο 0 ελάχιστο το $f(0) = 0$ (σχ. 16α), γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$.

16



α



β

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Μια φωτεινή ακτίνα από το σημείο Φ φτάνει στο σημείο Α αφού διαθλαστεί στο σημείο Μ της διαχωριστικής επιφάνειας x΄x δυο υλικών μέσων (σχ. 16β). Να βρεθεί ο νόμος της διάθλασης του φωτός, δεδομένου ότι η διαδρομή της φωτεινής ακτίνας γίνεται στον ελάχιστο χρόνο.**

Έστω v_1, v_2 οι ταχύτητες του φωτός στα υλικά μέσα (m_1) και (m_2) αντιστοίχως και $(\Phi O) = \upsilon$, $(A\Gamma) = \alpha$ οι αποστάσεις των Φ, Α από τη x΄x. Αν $(OM) = x$, $(O\Gamma) = \beta$, τότε ορίζεται η συνάρτηση t με

$$t(x) = \frac{(\Phi M)}{v_1} + \frac{(MA)}{v_2} = \frac{\sqrt{\upsilon^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\alpha^2+(\beta-x)^2}}{v_2} \qquad (1)$$

που η τιμή της στο x είναι ο χρόνος διαδρομής του φωτός από το Φ στο Α. Για το ελάχιστο του χρόνου αυτού θα πρέπει $t'(x) = 0$ ή, λόγω της (1),

$$\frac{v_2 x}{\sqrt{\upsilon^2+x^2}} = \frac{v_1(\beta-x)}{\sqrt{\alpha^2+(\beta-x)^2}}$$ ή $v_2 \eta\mu\pi = v_1 \eta\mu\delta$ (π, δ οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης).

Επομένως θα είναι $\dfrac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta} = \dfrac{v_1}{v_2}$ (σταθερό).

2. **Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με**

$$f(x) = (x-\varepsilon_1)^2+(x-\varepsilon_2)^2+\ldots+(x-\varepsilon_\nu)^2$$

όπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι

$$f'(x) = 2(x-\varepsilon_1)+2(x-\varepsilon_2)+\ldots+2(x-\varepsilon_\nu) = 2\nu x-2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu)$$

Επειδή $f''(x) = 2\nu > 0$, η f παρουσιάζει ελάχιστο όταν $f'(x) = 0$, δηλαδή στο σημείο

$$x_0 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu}{\nu} \qquad (1)$$

Το ελάχιστο της f είναι

$$f(x_0) = (x_0-\varepsilon_1)^2+(x_0-\varepsilon_2)^2+\ldots+(x_0-\varepsilon_\nu)^2$$

$$= \nu x_0^2 - 2x_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu) + (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_\nu^2) \qquad [\text{λόγω της (1)}]$$

$$= x_0[\nu x_0 - 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu)] + (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_\nu^2)$$

$$= \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu}{\nu}[-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu)] + (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_\nu^2)$$

$$= (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_\nu^2) - \frac{1}{\nu}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu)^2$$

Ασκήσεις: 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72

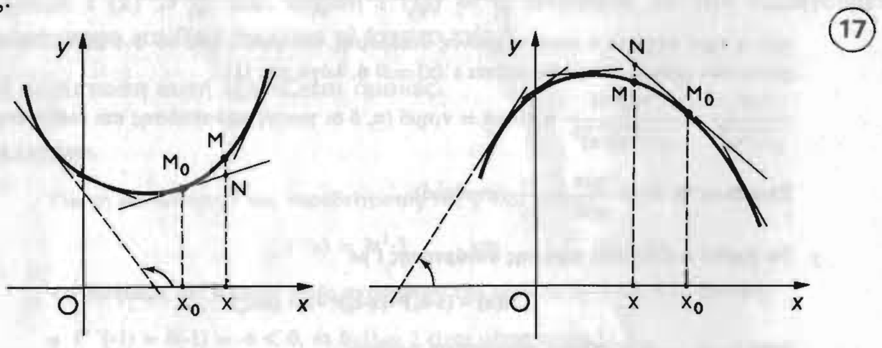
Κοίλα της γραφικής παράστασης

4.24 Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα

Δ, το πρόσημο της f″ παρέχει πρόσθετες πληροφορίες για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Πράγματι:

- Αν για κάθε x∈Δ είναι $f''(x) \geqslant 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 1 της § 4.21 η παράγωγος συνάρτηση f′ είναι αύξουσα στο Δ και αντιστρόφως. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x αυξάνει στο Δ, ο αντίστοιχος συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο σημείο Μ (x, f(x)) αυξάνει επίσης (σχ. 17α). Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι (βλ. Εφαρμογή) η γραφική παράσταση της f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη σ' οποιοδήποτε σημείο της.

17



α β

- Αν για κάθε x∈Δ είναι $f''(x) \leqslant 0$, με ανάλογους συλλογισμούς καταλήγουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι «κάτω» από την εφαπτομένη σ' οποιοδήποτε σημείο της (σχ. 17β).

Συνοψίζουμε τα παραπάνω ως εξής:

1. Αν για κάθε x∈Δ είναι $f''(x) \geqslant 0$, θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f **στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ.**
2. Αν για κάθε x∈Δ είναι $f''(x) \leqslant 0$, θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f **στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για τη συνάρτηση f με f(x) = ημx είναι f′(x) = συνx, f″(x) = - ημx.

   Στο διάστημα [0, π] είναι $f''(x) \leqslant 0$ και στο διάστημα [π, 2π] είναι $f''(x) \geqslant 0$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (σχ. 18α) στρέφει τα κοίλα κάτω στο [0, π] και άνω στο [π, 2π].

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

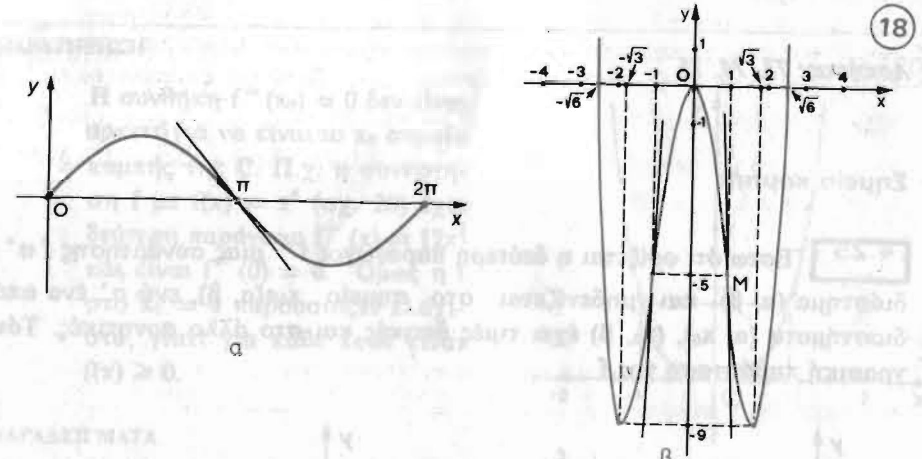
$$f(x) = x^4 - 6x^2$$

   στρέφει τα κοίλα κάτω, στο διάστημα [-1, 1] και άνω στα διαστήματα (-∞, -1] και [1, +∞). Πράγματι, έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x, \quad f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

και συνεπώς:

Για κάθε x∈[-1, 1] είναι $f''(x) \leqslant 0$, ενώ για κάθε x∈(- ∞, -1] ∪ [1, + ∞) είναι $f''(x) \geqslant 0$ (σχ. 18β).



α β

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος f″ μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο x_0∈Δ, την εφαπτομένη στο $M_0(x_0, f(x_0))$ και τα σημεία N(x, y) της εφαπτομένης και M(x, f(x)) της γραφικής παράστασης της f με κοινή τετμημένη x∈Δ. Να αποδειχτεί ότι:

- **Αν για κάθε x∈Δ είναι $f''(x) \geqslant 0$, τότε $f(x) \geqslant y$**
- **Αν για κάθε x∈Δ είναι $f''(x) \leqslant 0$, τότε $f(x) \leqslant y$**

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M_0 (σχ. 17) έχει εξίσωση

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Επομένως για κάθε x∈Δ με $x \neq x_0$ θα έχουμε

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει ξ μεταξύ x και x_0, τέτοιο ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ και έτσι η (1) γράφεται

$$f(x) - y = [f'(\xi) - f'(x_0)]\,(x - x_0) \qquad (2)$$

Επίσης υπάρχει ξ_1 μεταξύ ξ και x_0, τέτοιο ώστε $f'(\xi) - f'(x_0) = f''(\xi_1)(\xi - x_0)$ και η (2) γίνεται

$$f(x) - y = f''(\xi_1)\,(\xi - x_0)(x - x_0) \qquad (3)$$

Επειδή όμως το ξ βρίσκεται μεταξύ x και x_0, θα είναι πάντοτε

$$(\xi - x_0)(x - x_0) > 0 \qquad (4)$$

Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

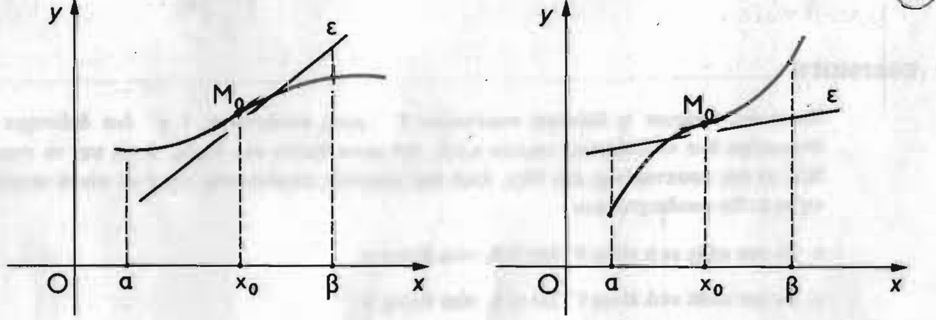
- $\forall\, x \in \Delta$, $f''(x) \geq 0$. Τότε θα είναι $f''(\xi_1) \geq 0$, οπότε από την (3), λόγω της (4), θα έχουμε $f(x) \geq y$
- $\forall\, x \in \Delta$, $f''(x) \leq 0$. Με ανάλογη εργασία βρίσκουμε ότι $f(x) \leq y$

Ασκήσεις: 73, 74, 75

Σημεία καμπής

4.25 Έστω ότι ορίζεται η δεύτερη παράγωγος f'' μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα (α, β) και μηδενίζεται στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ενώ σ' ένα από τα διαστήματα (α, x_0), (x_0, β) έχει τιμές θετικές και στο άλλο αρνητικές. Τότε η γραφική παράσταση της f

(19)



α β

στρέφει τα κοίλα άνω στο $(\alpha, x_0]$ και κάτω στο $[x_0, \beta)$ (σχ. 19α)

ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(\alpha, x_0]$ και άνω στο $[x_0, \beta)$ (σχ. 19β)

Αυτό, και στις δυο περιπτώσεις, σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «εκατέρωθεν» της εφαπτομένης της στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$. Μ' άλλα λόγια η εφαπτομένη στο M_0 «διαπερνά» τη γραφική παράσταση της f. Γι αυτό, το σημείο M_0 λέγεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f. Λέμε ακόμη ότι η f παρουσιάζει **καμπή στο x_0**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ (σχ. 18α) στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, \pi)$ και άνω στο $[\pi, 2\pi]$. Συνεπώς το σημείο της με τετμημένη $x_0 = \pi$ είναι σημείο καμπής.

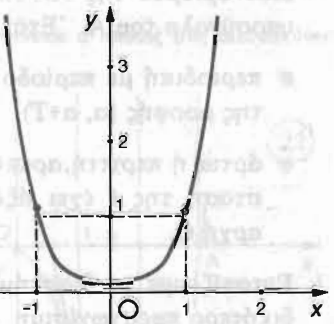
Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β). Αν η f'' μηδενίζεται σ' ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, αλλάζοντας πρόσημο, τότε η f θα παρουσιάζει καμπή στο x_0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η συνθήκη $f''(x_0) = 0$ δεν είναι αρκετή για να είναι το x_0 σημείο καμπής της C. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^4$ (σχ. 20) έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2$ και είναι $f''(0) = 0$. Όμως η f στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 0$.

(20)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = x^3$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 0$. Πράγματι, η φ έχει δεύτερη παράγωγο $\varphi''(x) = 6x$ και είναι $\varphi''(0) = 0$. Εξάλλου για κάθε $x < 0$ είναι $\varphi''(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi''(x) > 0$.

2. Η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 6x^2$ παρουσιάζει καμπή στα σημεία $x_0 = -1$ και $x_0 = 1$ (σχ. 18β). Πράγματι:

Η f έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12(x+1)(x-1)$.

Επειδή $f''(-1) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, η f παρουσιάζει καμπή στο -1.

Ομοίως επειδή $f''(1) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, η f παρουσιάζει καμπή και στο σημείο 1.

Ασκήσεις: 76

Μελέτη συνάρτησης

4.26 Από τα μαθήματα προηγούμενων τάξεων έχει αρχίσει να μας απασχολεί το θέμα της μελέτης μιας συνάρτησης. Αρχίζοντας από στοιχειώδεις συναρτήσεις, όπως π.χ. οι $\alpha x + \beta$, $\frac{1}{x}$, αx^2 κτλ. των οποίων η γενική μελέτη στηρίζεται στη μονοτονία, αρτιότητα κτλ., φτάσαμε σε πιο σύνθετες περιπτώσεις, για την πληρέστερη μελέτη των οποίων χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες του ορίου και της παραγώγου.

Ανακεφαλαιώνοντας τα διάφορα στάδια που περιλαμβάνει η συστηματική μελέτη μιας συνάρτησης και η κατασκευή της γραφικής της παράστασης θυμίζουμε τα ακόλουθα.

1. Η μελέτη μιας συνάρτησης f αρχίζει φυσικά με τον προσδιορισμό του **πεδίου ορισμού** της Α. Υπάρχει περίπτωση η μελέτη να περιοριστεί σ' ένα υποσύνολο του Α. Έτσι, αν η συνάρτηση f είναι:
   - περιοδική με περίοδο Τ, τότε αρκεί να τη μελετήσουμε σ' ένα διάστημα της μορφής [α, α+Τ) ·
   - άρτια ή περιττή, αρκεί να τη μελετήσουμε στο $\mathbb{R}_+ \cap A$. Η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον y'y ή κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο.
2. Εντοπίζουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής και ειδικότερα παραγωγίσιμη.
3. Το πεδίο ορισμού Α είναι γενικά διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Εξετάζουμε λοιπόν τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων που συνθέτουν το Α, ιδιαίτερα, όταν τα σημεία αυτά είναι σημεία ασυνέχειας ή το $+\infty$ ή το $-\infty$.
4. Υπολογίζουμε την παράγωγο f' της f και εξετάζουμε το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής. Έτσι προκύπτουν τα διάφορα διαστήματα μονοτονίας της f, καθώς και τα σημεία στα οποία η συνάρτηση ενδεχομένως παρουσιάζει ακρότατα.
5. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο f''. Από τη μελέτη του προσήμου της ορίζονται τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω, καθώς και ενδεχόμενα σημεία καμπής.
6. Άλλα συμπληρωματικά στοιχεία της μελέτης είναι:
   - ο προσδιορισμός των ασυμπτώτων
   - τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες, δηλαδή υπολογίζουμε το f(0) και τις ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0.

Με τα στοιχεία που θα συγκεντρώσουμε από την παραπάνω μελέτη καταρτίζουμε πίνακα ο οποίος μας βοηθάει στη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, όπως φαίνεται στις επόμενες εφαρμογές.

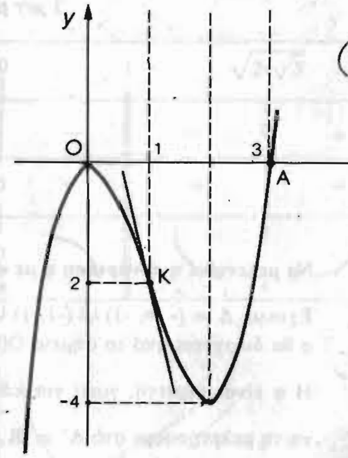
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-3x^2$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η εξίσωση $f(x) = x^3-3x^2 = 0$ έχει ρίζες $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$ και συνεπώς η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Α(3, 0). Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$ και μηδενίζεται για x = 0 και x = 2. Συνεπώς είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ και αρνητική στο (0, 2). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο (0, 2). Η f έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x-6 = 6(x-1)$. Η f'' μηδενίζεται για x = 1, ενώ είναι θετική στο $(1, +\infty)$ και αρνητική στο $(-\infty, 1)$. Συνεπώς η f έχει τοπικό μέγιστο στο 0 το f(0) = 0 και τοπικό ελάχιστο στο 2 το f(2) = -4. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή στο σημείο Κ(1, -2), και στρέφει τα κοίλα άνω στο $[1, +\infty)$ και κάτω στο $(-\infty, 1]$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα ο οποίος μας διευκολύνει στη μελέτη και γραφική παράσταση της f (σχ. 21).

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f'		+	0	−		−	0	+		+	
f''		−		−	0	+		+		+	
f	$-\infty$	↗	0 μ	↘	-2 κ	↘	-4 ε	↗	0	↗	$+\infty$



21

2. Να μελετηθεί η συνάρτηση g με $g(x) = \dfrac{2x+3}{4x-8}$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Η εξίσωση g(x) = 0 έχει ρίζα το $x = -\frac{3}{2}$. Επίσης είναι $g(0) = -\frac{3}{8}$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της g διέρχεται από τα σημεία $A(-\frac{3}{2}, 0)$, $B(0, -\frac{3}{8})$.

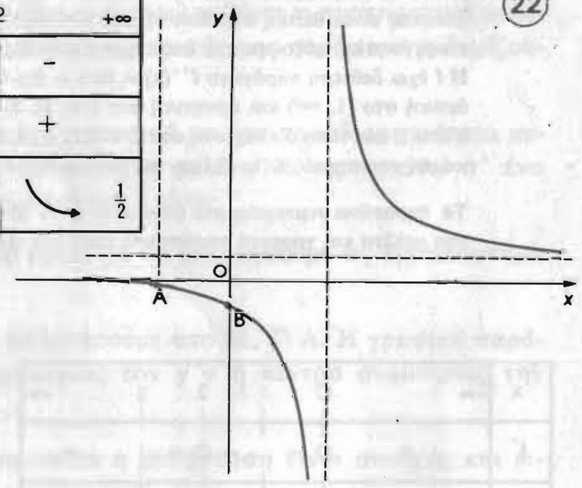
Είναι $g'(x) = \dfrac{-7}{4(x-2)^2}$ και συνεπώς $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$. Επίσης είναι $g''(x) = \dfrac{7}{2(x-2)^3}$ και συνεπώς $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$ και $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$. Άρα η γραφική παράσταση της g στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2, +\infty)$ και κάτω στο $(-\infty, 2)$.

Εξάλλου είναι $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$ (σε μια περιοχή του 2 ο αριθμητής 2x+3 είναι θετικός). Άρα η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g (σχ. 22).

Τέλος είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, που σημαίνει ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη (οριζόντια) της γραφικής παράστασης της g. Συνεπώς έχουμε

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f′		−		−		−	
f″		−		−		+	
f	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘		↘	$\frac{1}{2}$

(22)



3. **Να μελετηθεί η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}$**

Έχουμε $\Delta = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Επειδή $\varphi(0) = 0$, η γραφική παράσταση της φ θα διέρχεται από το σημείο O(0, 0)

Η φ είναι περιττή, γιατί για κάθε $x \in \Delta$ είναι $\varphi(-x) = \dfrac{(-x)(x^2+1)}{x^2-1} = -\varphi(x)$. Συνεπώς αρκεί να τη μελετήσουμε στο $\Delta' = \mathbb{R}_+ \cap \Delta = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

Είναι $\varphi'(x) = \dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

Το τριώνυμο x^4-4x^2-1 έχει πραγματικές ρίζες τις $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ και $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Άρα στο Δ′ είναι: $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty)$ και $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2+\sqrt{5}})$. Συνεπώς η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα σε κάθένα από τα διαστήματα (0, 1) και $(1, \sqrt{2+\sqrt{5}})$.

Επίσης είναι $\varphi''(x) = \dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

Η φ″ έχει πραγματική ρίζα το 0. Έτσι θα είναι $\varphi''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $\varphi''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της φ στρέφει τα κοίλα κάτω στο [0, 1) και άνω στο (1, +∞).

Επειδή $\varphi''(\sqrt{2+\sqrt{5}}) > 0$, η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Έχουμε ακόμη:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = -\infty$. Άρα η γραφική παράσταση της φ στο Δ′ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 1.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} [\varphi(x)-x] = 0$ και συνεπώς η γραφική παράσταση της φ έχει ασύμπτωτη την ευθεία y = x.

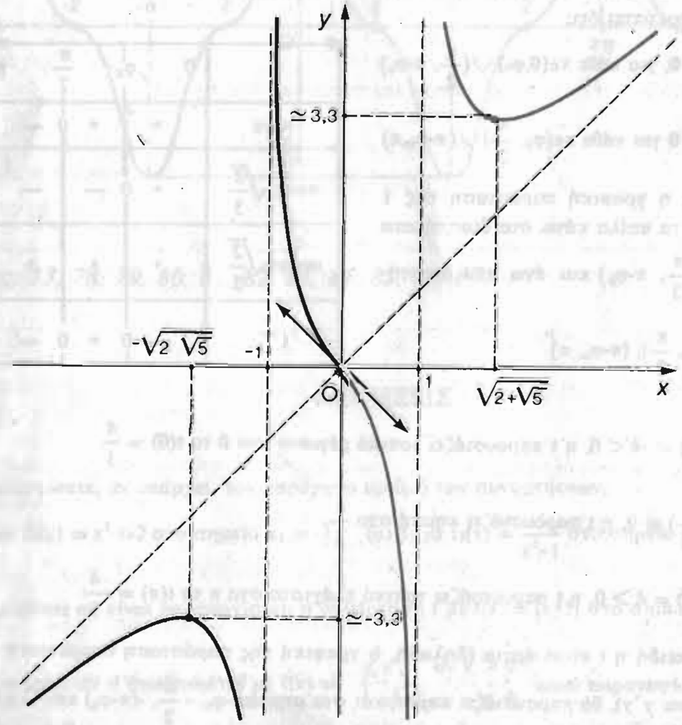
Επειδή η γραφική παράσταση της φ είναι συμμετρική ως προς το O και στρέφει τα κοίλα κάτω στο [0, 1), θα στρέφει τα κοίλα άνω στο (-1, 0]. Επιπλέον επειδή $\varphi''(0) = 0$, η φ παρουσιάζει καμπή στο 0.

Επίσης, επειδή η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\sqrt{2+\sqrt{5}}$, θα παρουσιάζει μέγιστο στο $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Τέλος, αφού η γραφική παράσταση της φ έχει ασύμπτωτη την ευθεία x = 1, θα έχει ασύμπτωτη και την ευθεία x = -1.

Έτσι έχουμε την επόμενη γραφική παράσταση της f

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		0		1		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
φ′								−		−	0	+	
φ″							0	−		+		+	
φ	$-\infty$	↗	μ	↘		↘	0 κ	↘		↘	ε	↗	$+\infty$

(23)



4. Να μελετηθεί η συνάρτηση t με $t(x) = \frac{4}{3}$ συν^{3}x.

Επειδή η συνάρτηση t είναι άρτια και περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να περιορίσουμε τη μελέτη της στο διάστημα $[0, \pi]$.

Έχουμε: $t'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3$συν^{2}x (-ημx) = -4ημxσυν^{2}x

Η t΄ έχει στο $[0,\pi]$ ρίζες τις 0, $\frac{\pi}{2}$ και π.

Είναι: $t'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ και συνεπώς η t είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθένα από τα διαστήματα $(0, \frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Επίσης έχουμε:

$t''(x) = -4[$συν^{3}x+2ημx συνx(-ημx)$]$ = -12 συνx (συνx-$\sqrt{\frac{2}{3}}$) (συνx+$\sqrt{\frac{2}{3}}$)

Επειδή $0 < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, υπάρχει $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε συν$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Τότε η t΄΄ έχει ρίζες τις φ_0, $\frac{\pi}{2}$ και π-φ_0.

Για τον καθορισμό του προσήμου της t΄΄, καταρτίζουμε τον διπλανό πίνακα, από τον οποίο προκύπτει ότι:

$t''(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,\varphi_0) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi-\varphi_0)$

$t''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\varphi_0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi-\varphi_0,\pi)$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της t στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα $(0,\varphi_0)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi-\varphi_0)$ και άνω στα διαστήματα $(\varphi_0, \frac{\pi}{2})$, $(\pi-\varphi_0, \pi)$

x	0		φ_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\varphi_0$		π
συνx		+		+	0	—		—	
συνx-$\sqrt{\frac{2}{3}}$		+	0	—		—		—	
συνx+$\sqrt{\frac{2}{3}}$		+		+		+	0	—	
t΄΄		—	0	+	0	—	0	+	

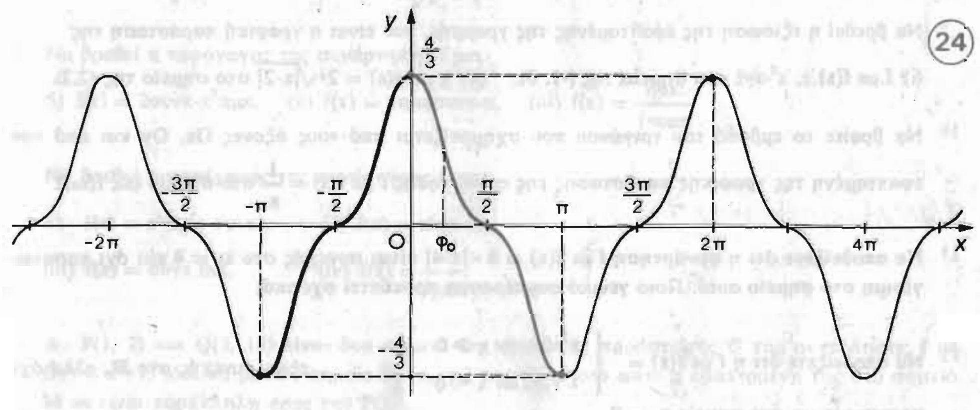
Επειδή

- t΄΄ (0) = -4 < 0, η t παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0 το $t(0) = \frac{4}{3}$
- t΄΄ $(\frac{\pi}{2}) = 0$, η t παρουσιάζει καμπή στο $\frac{\pi}{2}$.
- t΄΄ $(\pi) = 4 > 0$, η t παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο π το $t(\pi) = -\frac{4}{3}$

Τέλος, επειδή η t είναι άρτια (δηλαδή, η γραφική της παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y), θα παρουσιάζει καμπή και στα σημεία $-\varphi_0$, $-\frac{\pi}{2}$, $-(\pi-\varphi_0)$ και ελάχιστο στο σημείο $-\pi$.

Έχουμε έτσι τον επόμενο πίνακα μεταβολών και τη γραφική παράσταση της t (σχ. 24)

x	$-\pi$		$-(\pi-\varphi_0)$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\varphi_0$		0		φ_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\varphi_0$		π
t΄									0	—		—	0	—		—	0
t΄΄									-4	—	0	+	0	—	0	+	4
t	$-\frac{4}{3}$ ε	↗	κ	↗	0 κ	↗	κ	↗	$\frac{4}{3}$ μ	↘	κ	↘	0 κ	↘	κ	↘	$-\frac{4}{3}$ ε



(24)

Ασκήσεις: 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, τον παράγωγο αριθμό των συναρτήσεων:

   (i) f_1 με $f_1(x) = x^2-x-2$ στο σημείο $x_0 = -1$, (ii) f_2 με $f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$ στο σημείο $x_0 = 2$.

2. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f με $f(x) = |x+5|$ στο σημείο $x_0 = -5$.

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x > 0 \\ x^2+2, & \text{αν } x \leqslant 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ και έχει $f'(0) = 0$.

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. Είναι η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

7. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| + 2x$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

8. Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = 2x + 3x^2$.

9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραμμής, που είναι η γραφική παράσταση της

(i) f με $f(x) = x^2 - x - 2$ στο σημείο της $(-1, 0)$, (ii) g με $g(x) = 2 + \sqrt{|x-2|}$ στο σημείο της $(2,2)$.

10. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες Ox, Oy και από την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

11. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = 4 - |x-4|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 4$ και όχι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Ποιο γενικό συμπέρασμα προκύπτει σχετικά;

12. Να αποδείξετε ότι η f με $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & \alpha\nu\ x \geqslant 0 \\ x^2-2x, & \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

13. Να βρείτε, όταν υπάρχουν, τις εξισώσεις των εφαπτομένων στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = x^3$ στο σημείο $x_0 = 3$, (ii) f με $f(x) = x^2$ στο σημείο $x_0 = 0$,

(iii) f με $f(x) = \sqrt{x}$ στο σημείο $x_0 = \frac{1}{4}$, (iv) f με $f(x) = -\sqrt{x+1}$ στο σημείο $x_0 = -1$.

14. Αν C είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ να βρείτε:

(i) Την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $(1,1)$

(ii) Την εξίσωση της κάθετης στην εφαπτομένη της C στο σημείο της $(1,1)$.

15. Να βρείτε το «ευρύτερο» σύνολο A στο οποίο παραγωγίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \alpha\nu\ x > 1 \\ x^2 & \alpha\nu\ 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

και να το συγκρίνετε με το πεδίο ορισμού της f.

16. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι αριθμοί των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = 3x^2 - 5x$ στο σημείο $x_0 = -2$, (ii) $f(x) = e^x \ln x$ στο σημείο $x_0 = 1$,

(iii) $f(x) = x^2 + x - \frac{2}{x} + 5$ στο σημείο $x_0 = -7$, (iv) $f(x) = \frac{x^2+8x-1}{2x(1+x)}$ στο σημείο $x_0 = 1$.

17. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ $(\alpha_5 \neq 0)$.

Να δείξετε ότι: $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0)$.

18. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = x^3 + x^2 + c$, $(c \in \mathbb{R}^*)$, (ii) $f(x) = x^3(x+1)^2 - x^5$, (iii) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$,

(iv) $f(x) = \frac{x^4(x+1)^2}{x^2+1}$, (v) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$, (vi) $f(x) = x \cdot e^x \cdot \ln x$

19. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x$, (ii) $f(x) = 5\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - x$, (iii) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1+\varepsilon\varphi x}$.

20. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$, (ii) $f(x) = x\ln x - x$,

(iii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \ln x$, (iv) $f(x) = \frac{e^x}{\eta\mu x}$.

21. Αν $P(1, 2)$ και $Q(3, 10)$ είναι δυο σημεία της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 + 1$, τότε να βρεθεί σημείο $M(x_0, y_0)$ της C, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της στο σημείο M να είναι παράλληλη προς την PQ.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και g με $g(x) = \frac{x-1}{x}$. Να προσδιοριστούν τα α, β, έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

23. Να προσδιοριστεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = \lambda x - 3$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f με $f(x) = x^2 + 2x - 2$ και κατόπιν να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής.

24. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} x^{k+1}$. Τότε να δείξετε ότι:

(i) $f'(x) = \sum_{k=0}^{\nu} (\kappa+1)\binom{\nu}{k} x^k = (1+x)^{\nu-1}[1+(\nu+1)x]$, (ii) $1 + 2\binom{\nu}{1} + \dots + (\nu+1)\binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu-1}(\nu+2)$.

25. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους. Έστω ακόμη ότι είναι $g(x_0) \neq 0$ και $g'(x_0) \neq 0$. Αν για τη συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

είναι $F'(x_0) = 0$, να αποδειχτεί ότι $F(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

26. Των συναρτήσεων

(i) f_1 με $f_1(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$

(ii) f_2 με $f_2(x) = \frac{1}{2}\,\eta\mu^2 x - \frac{1}{3}\,\eta\mu^3 x,\ x\in[0,2\pi]$

(iii) f_3 με $f_3(x) = x^2\cdot e^{-x}-5$

να βρείτε, αν υπάρχει, την πρώτη παράγωγο και κατόπιν να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία κάθε μία από τις f'_1, f'_2, f'_3 έχει τιμή μηδέν.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & \text{αν } -2 \leqslant x < 0 \\ 0, & \text{αν } x < -2 \end{cases}$$

$$g \text{ με } g(x) = \begin{cases} x+2-\sqrt{x+2}, & \text{αν } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x+2, & \text{αν } x < -2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε:

(i) Αν οι συναρτήσεις f, g, f+g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = -2$.

(ii) Αν αληθεύει η πρόταση: *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμες στο* x_0 *οι συναρτήσεις* f *και* g *είναι: να είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *η συνάρτηση* f+g.

28. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = (2x+5)^8$, (ii) $f(x) = (3x+1)^5+\frac{1}{(x^2+1)^5}$, (iii) $f(x) = \sqrt{x^3+5}$,

(iv) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, (v) $f(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/2}$

29. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = 3\,\sigma\upsilon\nu\,(2x+5)$, (ii) $f(x) = \eta\mu^2 3x$,

(iii) $f(x) = \eta\mu\,(2x+3) + \sigma\upsilon\nu^5(2x^2)$, (iv) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)\,\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x)$

30. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = \ln(3x-1)$, (ii) $f(x) = 5e^{3x}$, (iii) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, (iv) $f(x) = e^{2x}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$

31. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x\in(-\infty,0] \\ 1+\ln\frac{1+x}{1-x}, & \text{αν } x\in(0,1) \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$.

32. Έστω ότι η συνάρτηση g έχει δεύτερη παράγωγο και ότι ορίζεται η συνάρτηση f με $f(x) = g(e^{2x})$. Να βρείτε τη συνάρτηση f''.

33. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$ *(ημιέλλειψη)*. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{4}$.

34. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(i) Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

(ii) Αν η f είναι περιοδική, τότε η f' είναι περιοδική.

35. Να βρεθεί το σύνολο Α στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3-\sqrt{x-2}, & \text{αν } x\in[2,11) \\ -3+\sqrt{x-2}, & \text{αν } x\in[11,+\infty) \end{cases}$$

36. Να βρεθεί η παράγωγος f' της συνάρτησης f με $f(x) = (x^2+1)^x$.

37. Να δείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \eta\mu x$ είναι η συνάρτηση $f^{(\nu)}$ με $f^{(\nu)}(x) = \eta\mu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)$.

38. Να δείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \ln x$ είναι η συνάρτηση $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{x^\nu}$

39. Να βρείτε τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{2e^x}$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

40. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f με $f(x) = x^3+x^2-4x+1$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1,2]$ και να βρείτε $x_0\in(-1,2)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

41. Να διαπιστώσετε ποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle ισχύουν και ποιές δεν ισχύουν, για τις συναρτήσεις:

(i) f με $f(x) = \begin{cases} -\frac{x+1}{x}, & \text{αν } x\in[-1,0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ στο διάστημα $[-1,0]$

(ii) f με $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$ στο διάστημα $[-4,0]$

(iii) f με $f(x) = (x+3)^2$ στο διάστημα $[4.5]$

(iv) f με $f(x) = x^5$ στο διάστημα $[-1,1]$

42. Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης να διαπιστώσετε ότι οι συνθήκες του θεωρήματος του Rolle είναι ικανές για να υπάρχει εσωτερικό(1) σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, άλλά όχι αναγκαίες.

(1) όχι άκρο διαστήματος

43. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = (2x-1)(x+3)(x-5)(x-7)$. Να βρεθεί πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x) = 0$.

44. Να αποδείξετε ότι, αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f μηδενίζεται για k διαφορετικές πραγματικές τιμές του x, τότε η f΄ θα μηδενίζεται για (k-1) τουλάχιστο τιμές του x.

45. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = x^5+4x^3+5x+27$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα πραγματική και τέσσερις μιγαδικές.

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3-3x-1$. Να αποδείξετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$, ότι αυτή έχει μία μόνο ρίζα ρε $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

47. Η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, είναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχτεί ότι:

(i) Για τη συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$

(ii) Αν $c \notin [\alpha, \beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραφικής παράστασης της f διέρχεται από το σημείο (c, 0).

48. Έστω η συνάρτηση $f: [0,3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3-x+1$. Να βρείτε $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(3)-f(0)}{3}$ και να διαπιστώσετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλη προς τη χορδή που ορίζεται από τα σημεία της (0, 1) και (3, 25).

49. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι, αν $0 < x_1 < x_2$, τότε:

$$e^{x_1} < \frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1} < e^{x_2}$$

50. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leqslant x-1$$

51. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

52. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι, αν $0 < x_1 < x_2$, τότε

$$1 - \frac{x_1}{x_2} < \ln\frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} - 1$$

53. Να υπολογιστούν οι παράγουσες των συναρτήσεων f με

(i) $f(x) = 3x^5$, (ii) $f(x) = \frac{\mu}{x^{\mu+1}}$, (iii) $f(x) = 3$ συνx,

(iv) $f(x) = \frac{2}{5}$ ημx, (v) $f(x) = \frac{3}{x}$, (vi) $f(x) = \frac{3}{5}e^x$

54. Να υπολογιστούν οι παράγουσες των συναρτήσεων f με

(i) $f(x) = 2x^3-5x^2+x+1$, (ii) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, (iii) $f(x) = 1+$συνx, (iv) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

(v) $f(x) = 2e^{2x+1}$, (vi) $f(x) = e^x+xe^x$, (vii) $f(x) =$ συνx-xημx, (viii) $f(x) = \frac{x\text{συν}x-\text{ημ}x}{x^2}$

55. Να βρείτε την οικογένεια των καμπύλων των οποίων η εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους έχει συντελεστή διευθύνσεως 2x και έπειτα την καμπύλη της οικογένειας η οποία διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{2}, 0)$.

56. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x^5}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{ημ}3x}{2x}$, (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}x}{\text{ημ}x+x\text{συν}x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\text{ημ}x}{x^3}$, (v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+\text{ημ}x-1}{\ln(1+x)}$,

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\text{ημ}x}$, (vii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$, (viii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}$, (ix) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

57. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$, (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\frac{1+e^x}{x+1}$, (iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}$

58. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\text{ημ}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

59. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \ (\alpha > 0)$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}$ εφx · lnx

60. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, (ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

61. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = \frac{x^2}{2} - x+6$, (ii) f με $f(x) = x^4-8x^2+17$

(iii) f με $f(x) = \ln x-x$, (iv) f με $f(x) = e^x-x$

62. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

(i) $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) =$ ημx-x, (ii) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x-\ln(x+1)$.

63. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

(i) g με $g(x) = x^3+2x^2-x-2$ και (ii) f με $f(x) = x^4-5x^2+6$.

64. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

(i) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{ημ}x^2$, (ii) f με $f(x) = \sqrt{|x|}$, (iii) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

65. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+\alpha x+ \frac{1}{x} + \frac{17}{4}$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να έχει ακρότατο το

0 στο $x_0 = -\frac{1}{2}$ και μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f.

66. Έστω η συνάρτηση f με

$\frac{x\ell n x}{1-x}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\log x}{1-x}, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να αποδειχτεί ότι:

(i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

(ii) Είναι φθίνουσα στο διάστημα (0,1) και (iii) $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

67. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = x^3-2x^2+1$, (ii) $f(x) = x-ημ2x$, (iii) $f(x) = xlηx$, (iv) $f(x) = x^x$

68. Δίνεται ημικύκλιο ακτίνας ρ = 2 cm. Να εγγράψετε τραπέζιο που να έχει το μέγιστο εμβαδό.

69. Δίνεται σφαίρα ακτίνας R = 3 cm. Να εγγράψετε ορθό κύλινδρο που να έχει μέγιστο όγκο.

70. Έστω Α.Α΄ δυο σημεία της παραβολής $y^2 = 2px$ με κορυφή Ο συμμετρικά ως προς τον άξονά της. Στο τμήμα ΟΑΑ΄ της παραβολής να εγγράψετε ορθογώνιο, που η μία πλευρά να βρίσκεται επί της ΑΑ΄, και το οποίο να έχει μέγιστο εμβαδό (p > 0).

71. Το κόστος k(x) σε δραχ./km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση k με $k(x) = \frac{1200}{x} + 4800x$, όπου x η διατομή του σωλήνα σε cm^2. Να βρείτε τη διατομή του σωλήνα για την οποία το κόστος είναι ελάχιστο και την ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.

72. Σε βάθρο ύψους h έχει τοποθετηθεί άγαλμα ύψους α. Σε ποια οριζόντια απόσταση x πρέπει να τοποθετηθεί παρατηρητής ύψους γ < h για να βλέπει το άγαλμα με τη μέγιστη γωνία.

73. Αν η συνάρτηση f: (α,β) → IR στρέφει τα κοίλα άνω, τότε $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, ενώ αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω, τότε $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

74. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-3x^2$ στρέφει τα κοίλα κάτω στό διάστημα (-∞, 1) και άνω στο διάστημα (1, +∞).

75. Να εξετάσετε ως προς την κοιλότητα τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \frac{x^3-3x^2+10}{2}$, (ii) $f(x) = ημx - x - \frac{1}{2}$, (iii) $f(x) = \ln x - 3$

76. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της συνάρτησης:

(i) f με $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, (ii) g με $g(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$

77. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x+1$

78. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \lambda x^2+2x+3$, $(\lambda \in \mathbb{R})$

79. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2x+3}{4x+5}$

80. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, αν $x \geqslant 0$.

81. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \frac{2x^2-3x+2}{x^2+1}$, (ii) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$

82. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, αν $\gamma \neq 0$ και $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$.

83. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x(x+1)}{x-1}$

84. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

85. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x}$

86. Να μελετήσετε στο σύνολο $[0,\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \pi]$ τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{συν^2x}{συνx - \frac{1}{2}}$

87. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = xe^{-x}$

5 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί εξ ολοκλήρου νέα γνώση για το μαθητή της Γ΄ Λυκείου. Γι' αυτό η σύνδεση της έννοιας του ολοκληρώματος με την πραγματικότητα είναι διδακτικά επιβεβλημένη. Είναι όμως και ιστορικά βεβαιωμένη, όπως συμβαίνει με όλες τις βασικές μαθηματικές έννοιες. Πράγματι, είναι γνωστό ότι ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας την ιδιοφυή «μέθοδο της εξάντλησης» με τα εκπληκτικά, για την εποχή, αποτελέσματα (υπολογισμός εμβαδού παραβολικού χωρίου κτλ.), άνοιξε το δρόμο που οδήγησε, πολύ αργότερα, στην έννοια του ολοκληρώματος.

Η άμεση, πλήρης και σε βάθος κατανόηση της έννοιας αυτής, στην οποία στηρίζεται το περιεχόμενο όλου του κεφαλαίου, αποτελεί φυσικά κύρια επιδίωξη της διδασκαλίας. Οι ιδιότητες που ακολουθούν μπορούν να αντιμετωπιστούν από το μαθητή, αφού είναι απλές εφαρμογές του ορισμού του ολοκληρώματος και των ιδιοτήτων του ορίου.

Εξάλλου ο μαθητής θα διαπιστώσει ακόμη μια φορά, ότι η εξέταση σ' ένα μαθηματικό θέμα της «αντίστροφης πορείας», δεν είναι μια στείρα μαθηματική περιέργεια ή συνήθεια, αλλά σε πολλές περιπτώσεις αποδίδει πλούσιους καρπούς. Θα διαπιστώσει δηλαδή εδώ τη μεγάλη σημασία, όχι μόνο της παραγώγισης, αλλά και του αντίστροφου προβλήματος που ήδη συνάντησε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι, συμπληρώνεται η ενημέρωσή του στις έννοιες οι οποίες θεμελιώνουν τους δύο βασικούς κλάδους της Ανάλυσης.

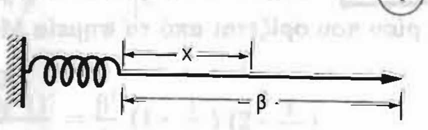
Το κεφάλαιο κλείνει με εφαρμογές του ολοκληρώματος ιδιαίτερα σε θέματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων, σε περιπτώσεις γενικότερες από εκείνες που ήδη έχει συναντήσει ο μαθητής.

ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης

5.1 Στο άκρο ενός ελατηρίου εφαρμόζουμε δύναμη που το επιμηκύνει. Όπως ξέρουμε η αντίσταση του ελατηρίου είναι ανάλογη της επιμήκυνσης x, δηλαδή η δύναμη που απαιτείται για την υπερνίκησή της είναι

$$F = \lambda x$$



Μπορούμε να υπολογίσουμε το παραγόμενο έργο, όταν η συνολική επιμήκυνση είναι β.

Χωρίζουμε το [0, β] σε ν «ίσα» διαστήματα (κοινού πλάτους $\frac{\beta}{\nu}$) με τα σημεία

$$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k,\ \ldots,\ x_\nu = \beta \quad \text{όπου} \quad x_k = k\,\frac{\beta}{\nu}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$$

Κατά την επιμήκυνση από x_{k-1} σε x_k η δύναμη αυξάνει από $F_{k-1} = \lambda x_{k-1}$ σε $F_k = \lambda x_k$.

Έτσι, αν W_k είναι το αντίστοιχο έργο, θα έχουμε $F_{k-1}\,\frac{\beta}{\nu} \leqslant W_k \leqslant F_k\,\frac{\beta}{\nu}$, δηλαδή

$$\lambda(k-1)\,\frac{\beta^2}{\nu^2} \leqslant W_k \leqslant \lambda k\,\frac{\beta^2}{\nu^2}$$

Άρα για το ζητούμενο έργο W, που είναι το $\sum_{k=1}^{\nu} W_k$, έχουμε:

$$\lambda \frac{\beta^2}{\nu^2} \sum_{k=1}^{\nu} (k-1) \leqslant W \leqslant \lambda \frac{\beta^2}{\nu^2} \sum_{k=1}^{\nu} k$$

και επειδή $\quad \sum_{i=1}^{\nu} k = 1+2+...+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$

θα είναι $\quad \lambda \frac{\beta^2}{\nu^2} \frac{\nu(\nu-1)}{2} \leqslant W \leqslant \lambda \frac{\beta^2}{\nu^2} \frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad (1)$

Η (1) ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή για οποιαδήποτε διαίρεση του $[0, \beta]$ σε ίσα διαστήματα.

Οι ακολουθίες με γενικούς όρους: $\frac{\lambda\beta^2}{2} \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{\nu^2} = \frac{\lambda\beta^2}{2}(1-\frac{1}{\nu})$

και: $\frac{\lambda\beta^2}{2} \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{\nu^2} = \frac{\lambda\beta^2}{2}(1+\frac{1}{\nu})$

έχουν κοινό όριο $\frac{\lambda\beta^2}{2}$.

Άρα $\quad W = \frac{\lambda\beta^2}{2}$

Εμβαδό παραβολικού χωρίου

5.2 Θεωρούμε την παραβολή $y = x^2$. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία $M(x, y)$ με

$$0 \leqslant x \leqslant \beta$$
$$0 \leqslant y \leqslant x^2$$

που ορίζεται δηλαδή, από την παραβολή, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \beta$ (σχ. 2α). Όπως στην προηγούμενη παράγραφο, χωρίζουμε το $[0, \beta]$ σε ν ίσα διαστήματα με τα σημεία $x_k = k\frac{\beta}{\nu}$ $(k = 0,1, ..., \nu)$.

Στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ η τιμή της συνάρτησης αυξάνει από $y_{k-1} = x_{k-1}^2$ σε $y_k = x_k^2$. Έτσι, αν E_k είναι το εμβαδό που αντιστοιχεί στο μέρος του χωρίου που περιορίζεται από τις ευθείες $x = x_{k-1}$ και $x = x_k$ (σχ. 2β), θα έχουμε

$$\frac{\beta}{\nu} y_{k-1} \leqslant E_k \leqslant \frac{\beta}{\nu} y_k$$

δηλαδή $\quad \frac{\beta^3}{\nu^3}(k-1)^2 \leqslant E_k \leqslant \frac{\beta^3}{\nu^3} k^2$

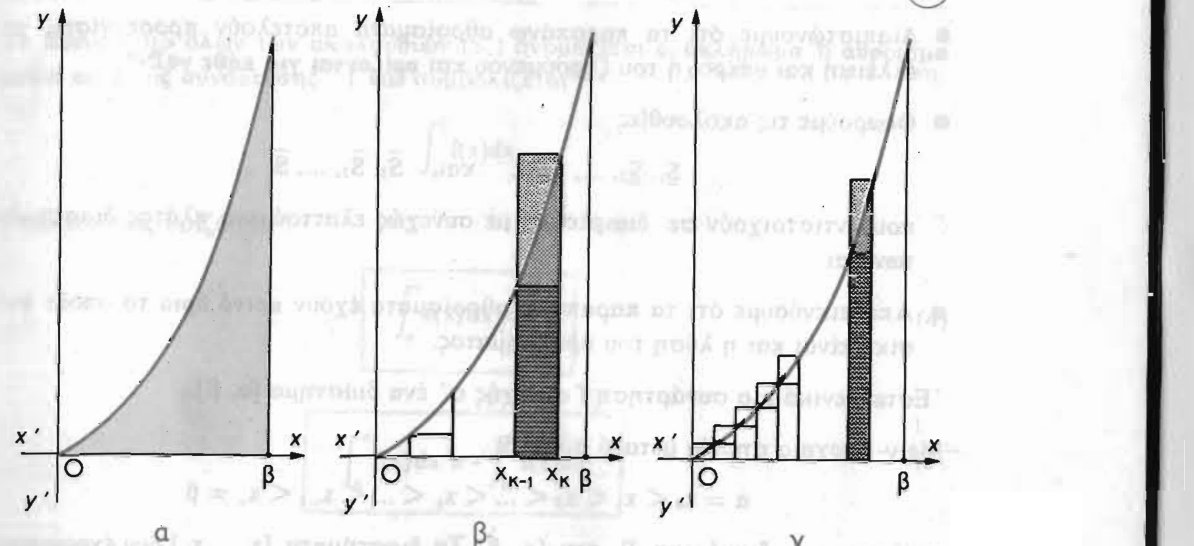
Άρα για το ζητούμενο εμβαδό Ε, που είναι το $\sum_{k=1}^{\nu} E_k$, έχουμε:

$$\frac{\beta^3}{\nu^3} \sum_{k=1}^{\nu} (k-1)^2 \leqslant E \leqslant \frac{\beta^3}{\nu^3} \sum_{k=1}^{\nu} k^2$$

και επειδή $\quad \sum_{k=1}^{\nu} k^2 = 1^2+2^2+...+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$,

θα είναι $\quad \frac{\beta^3}{\nu^3} \cdot \frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{6} \leqslant E \leqslant \frac{\beta^3}{\nu^3} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

2



Οι ακολουθίες με γενικούς όρους: $\frac{\beta^3}{6} \cdot \frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{\nu^3} = \frac{\beta^3}{6}(1-\frac{1}{\nu})(2-\frac{1}{\nu})$

και: $\frac{\beta^3}{6} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^3} = \frac{\beta^3}{6}(1+\frac{1}{\nu})(2+\frac{1}{\nu})$

έχουν κοινό όριο $\frac{\beta^3}{6} \cdot 2 = \frac{\beta^3}{3}$.

Άρα: $\quad E = \frac{\beta^3}{3}$

Έννοια του ολοκληρώματος

5.3 Τα παραδείγματα των προηγούμενων παραγράφων έχουν κοινά γνωρίσματα:

Το ζητούμενο είναι η τιμή ενός «μεγέθους» (έργο, εμβαδό). Ξεκινάμε με μια συνάρτηση f [με $f(x) = \lambda x$ στο πρώτο παράδειγμα και $f(x) = x^2$ στο δεύτερο] ορισμένη σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Για τη λύση του προβλήματος:

- Θεωρούμε τη διαίρεση του $[\alpha, \beta]$ η οποία ορίζει ν ίσα διαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$.
- Αν μ_k και M_k είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[x_{k-1}, x_k]$, σχηματίζουμε τα αθροίσματα

$$\underline{S}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{και} \quad \overline{S}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} M_k (x_k - x_{k-1}) \tag{2}$$

- Διαπιστώνουμε ότι τα παραπάνω αθροίσματα αποτελούν προσεγγίσεις με έλλειψη και υπεροχή του ζητούμενου και **ορίζονται για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.**
- Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$\underline{S}_1, \underline{S}_2, \ldots, \underline{S}_\nu \ldots \quad \text{και} \quad \overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_\nu \ldots$$

που αντιστοιχούν σε διαιρέσεις με συνεχώς ελαττούμενο πλάτος διαστημάτων και

- Αποδεικνύουμε ότι τα παραπάνω αθροίσματα έχουν **κοινό όριο** το οποίο φυσικά είναι και η λύση του προβλήματος.

Έστω γενικά μια συνάρτηση f **συνεχής** σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Με ν-1 τυχαία σημεία μεταξύ α και β:

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

ορίζουμε μια διαμέριση P_ν του $[\alpha, \beta]$. Τα διαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, δεν έχουν κατ' ανάγκη το ίδιο πλάτος.

Έτσι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ και για μια συγκεκριμένη αντίστοιχη διαμέριση P_ν, ορίζονται με τις (2) τα αθροίσματα $\underline{S}_\nu$ και $\overline{S}_\nu$. Έστω d_ν το μεγαλύτερο από τα πλάτη των διαστημάτων της P_ν. Αποδεικνύεται(1) ότι:

Οι ακολουθίες $(\underline{S}_\nu)$ *και* $(\overline{S}_\nu)$, *όταν* $\lim d_\nu = 0$, *έχουν* **κοινό όριο** *και μάλιστα* **ανεξάρτητο** *από την εκλογή των διαμερίσεων* P_ν.

Έστω γενικά ξ_k ένα οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$. Θέτουμε

$$\delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{και} \quad S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\, \delta x_k$$

Τότε, επειδή $\quad \mu_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$

θα είναι

$$\underline{S}_\nu \leqslant S_\nu \leqslant \overline{S}_\nu \tag{3}$$

(1) Με τις γνώσεις που έχουμε ως τώρα η απόδειξη δε γίνεται.

και επομένως (§ 2.16) η ακολουθία S_ν συγκλίνει προς το κοινό όριο των $(\underline{S}_\nu)$ και $(\overline{S}_\nu)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η ακολουθία (S_ν) των αθροισμάτων $\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\, \delta x_k$, όταν $\lim d_\nu = 0$, είναι συγκλίνουσα και το όριό της είναι ανεξάρτητο από την εκλογή και των διαμερίσεων P_ν και των σημείων ξ_k.

Το κοινό όριο όλων των ακολουθιών (S_ν) ονομάζεται **ολοκλήρωμα** ή **άθροισμα από α ως β της συνάρτησης**(1) f και συμβολίζεται(2)

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

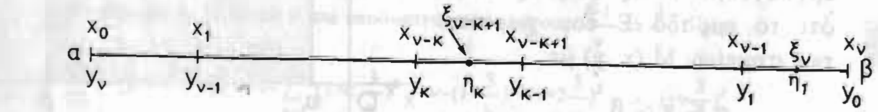
Γενικεύοντας ορίζουμε:

$$\boxed{\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0} \tag{4}$$

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx} \tag{5}$$

Σημείωση

Ο ορισμός (4) είναι εύλογος. Ο ορισμός (5) ολοκληρώματος από β ως α με $\beta > \alpha$, δικαιολογείται επειδή αν θέσουμε $y_k = x_{\nu-k}$ και $\eta_k = \xi_{\nu-k+1}$ έχουμε



$$\begin{aligned} T_\nu &= f(\eta_1)(y_1 - y_0) + f(\eta_2)(y_2 - y_1) + \ldots + f(\eta_\nu)(y_\nu - y_{\nu-1}) \\ &= f(\xi_\nu)(x_{\nu-1} - x_\nu) + f(\xi_{\nu-1})(x_{\nu-2} - x_{\nu-1}) + \ldots + f(\xi_1)(x_0 - x_1) \\ &= -f(\xi_1)(x_1 - x_0) - f(\xi_2)(x_2 - x_1) - \ldots - f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = -\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = -S_\nu \end{aligned}$$

(1) Το ολοκλήρωμα ορίζεται και για γενικότερη κατηγορία συναρτήσεων (φραγμένες, κλιμακωτές κ.ά.) που χαρακτηρίζονται με τον όρο **ολοκληρώσιμες.**

(2) Το σύμβολο $\int$ προέρχεται από το γράμμα S, αρχικό της λέξης Summa (= άθροισμα). Ο συμβολισμός $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι παραλλαγή του $\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\, \delta x_k$.

Έστω μ, Μ η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α, β] αντιστοίχως (υπάρχουν γιατί η f συνεχής).

Επειδή $\mu \leqslant \mu_k$ θα είναι

$$\sum_{k=1}^{\nu} \mu\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k\,(x_k - x_{k-1}) = \underline{S}_\nu$$

δηλαδή $$\mu \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1}) \leqslant \underline{S}_\nu$$

και συνεπώς $$\mu(\beta-\alpha) \leqslant \underline{S}_\nu$$

Ομοίως, επειδή $M_k \leqslant M$, βρίσκουμε ότι

$$\overline{S}_\nu \leqslant M(\beta-\alpha)$$

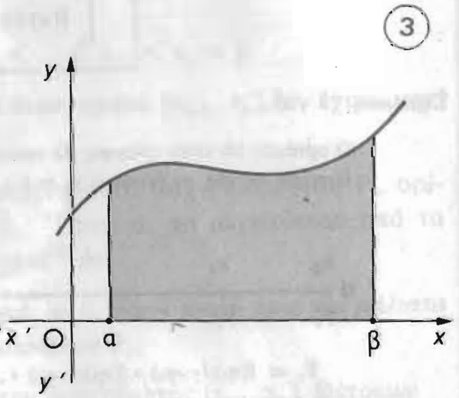
Τότε, λόγω της (3), θα έχουμε $\mu(\beta-\alpha) \leqslant S_\nu \leqslant M(\beta-\alpha)$. Άρα

$$\boxed{\mu(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leqslant M(\beta-\alpha)} \qquad (6)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω C η γραφική παράσταση (σχ. 3) μιας συνεχούς συνάρτησης f με θετικές τιμές σ' ένα διάστημα [α, β]. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει, αν εργαστούμε όπως στην § 5.2, ότι το εμβαδό Ε του χωρίου των σημείων Μ (x, y) με

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$$
$$0 \leqslant y \leqslant f(x)$$



που ορίζεται δηλαδή από τη C, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β, θα είναι

$$\boxed{E = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

5.4 Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ένα τρόπο εφαρμογής του ορισμού του ολοκληρώματος για τον υπολογισμό του. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β]. Θεωρούμε μια διαμέριση του [α, β] που ορίζει ν ίσα διαστήματα

$$[\alpha, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \ldots, [x_{\nu-1}, \beta]$$

κοινού πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Τότε, το δεξιό άκρο κάθε διαστήματος είναι το $x_k = \alpha + k\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ (k = 1, 2, ..., ν) και συνεπώς (§ 5.3)

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{\nu} \left[f\left(\alpha+k\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right]$$

ή

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim \left[\frac{\beta-\alpha}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} f\left(\alpha+k\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\right]} \qquad (7)$$

Με τη βοήθεια της (7) μπορούμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα, όπως φαίνεται και στο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το $\int_1^4 (-x^2+1)\,dx$

Χωρίζουμε το [1, 4] σε ν ίσα υποδιαστήματα πλάτους $\frac{4-1}{\nu} = \frac{3}{\nu}$. Τότε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \left[-\left(1+k\frac{3}{\nu}\right)^2+1\right] = \nu - \sum_{k=1}^{\nu}\left(1+k\frac{3}{\nu}\right)^2 = \nu - \left(1+\frac{3}{\nu}\right)^2 - \left(1+2\frac{3}{\nu}\right)^2 - \ldots - \left(1+\nu\frac{3}{\nu}\right)^2$$

$$= \nu - 1 - \frac{9}{\nu^2} - \frac{6}{\nu} - 1 - 2^2\cdot\frac{9}{\nu^2} - 2\frac{6}{\nu} - \ldots - 1 - \nu^2\frac{9}{\nu^2} - \nu\frac{6}{\nu}$$

$$= -\frac{9}{\nu^2}(1^2+2^2+\ldots+\nu^2) - \frac{6}{\nu}(1+2+\ldots+\nu) = -\frac{9}{\nu^2}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - \frac{6}{\nu}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$= -\frac{6\nu^2+9\nu+3+6\nu^2+6\nu}{2\nu} = -\frac{12\nu^2+15\nu+3}{2\nu}$$

Άρα $$\int_1^4 (-x^2+1)\,dx = \lim\left[\frac{3}{\nu}\left(-\frac{12\nu^2+15\nu+3}{2\nu}\right)\right] = \lim\left(-\frac{36\nu^2+45\nu+9}{2\nu^2}\right) = -18$$

Έστω μ, Μ η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α, β] αντιστοίχως (υπάρχουν γιατί η f συνεχής).

Επειδή $\mu \leqslant \mu_k$ θα είναι

$$\sum_{k=1}^{\nu} \mu\,(x_k-x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k\,(x_k-x_{k-1}) = \underline{S}_\nu$$

δηλαδή
$$\mu \sum_{k=1}^{\nu} (x_k-x_{k-1}) \leqslant \underline{S}_\nu$$

και συνεπώς
$$\mu(\beta-\alpha) \leqslant \underline{S}_\nu$$

Ομοίως, επειδή $M_k \leqslant M$, βρίσκουμε ότι

$$\overline{S}_\nu \leqslant M(\beta-\alpha)$$

Τότε, λόγω της (3), θα έχουμε $\mu(\beta-\alpha) \leqslant S_\nu \leqslant M(\beta-\alpha)$. Άρα

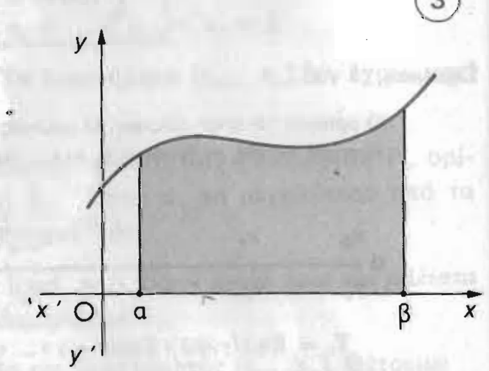
$$\boxed{\mu(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant M(\beta-\alpha)} \qquad (6)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω C η γραφική παράσταση (σχ. 3) μιας συνεχούς συνάρτησης f με θετικές τιμές σ' ένα διάστημα [α, β]. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει, αν εργαστούμε όπως στην § 5.2, ότι το εμβαδό Ε του χωρίου των σημείων Μ (x, y) με

$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$

$0 \leqslant y \leqslant f(x)$



που ορίζεται δηλαδή από τη C, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β, θα είναι

$$\boxed{E = \int_\alpha^\beta f(x)dx}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

5.4 Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ένα τρόπο εφαρμογής του ορισμού του ολοκληρώματος για τον υπολογισμό του. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β]. Θεωρούμε μια διαμέριση του [α, β] που ορίζει ν ίσα διαστήματα

$$[\alpha, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \ldots, [x_{\nu-1}, \beta]$$

κοινού πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Τότε, το δεξιό άκρο κάθε διαστήματος είναι το $x_k = \alpha + k\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ (k = 1, 2, ..., ν) και συνεπώς (§ 5.3)

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{\nu} [f(\alpha+k\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu})\,\frac{\beta-\alpha}{\nu}]$$

ή
$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim\left[\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f(\alpha+k\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu})\right]} \qquad (7)$$

Με τη βοήθεια της (7) μπορούμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα, όπως φαίνεται και στο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το $\int_1^4 (-x^2+1)dx$

Χωρίζουμε το [1, 4] σε ν ίσα υποδιαστήματα πλάτους $\frac{4-1}{\nu} = \frac{3}{\nu}$. Τότε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} [-(1+k\frac{3}{\nu})^2+1] = \nu - \sum_{k=1}^{\nu} (1+k\frac{3}{\nu})^2 = \nu-(1+\frac{3}{\nu})^2-(1+2\frac{3}{\nu})^2-\ldots-(1+\nu\frac{3}{\nu})^2$$

$$= \nu - 1 - \frac{9}{\nu^2} - \frac{6}{\nu} - 1 - 2^2\cdot\frac{9}{\nu^2} - 2\,\frac{6}{\nu} - \ldots - 1 - \nu^2\,\frac{9}{\nu^2} - \nu\,\frac{6}{\nu}$$

$$= -\frac{9}{\nu^2}(1^2+2^2+\ldots+\nu^2) - \frac{6}{\nu}(1+2+\ldots+\nu) = -\frac{9}{\nu^2}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - \frac{6}{\nu}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$= -\frac{6\nu^2+9\nu+3+6\nu^2+6\nu}{2\nu} = -\frac{12\nu^2+15\nu+3}{2\nu}$$

Άρα
$$\int_1^4 (-x^2+1)dx = \lim\left[\frac{3}{\nu}\,(-\frac{12\nu^2+15\nu+3}{2\nu})\right] = \lim(-\frac{36\nu^2+45\nu+9}{2\nu^2}) = -18$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι για τη σταθερή συνάρτηση u με u(x) = c είναι**

$$\int_\alpha^\beta u(x)dx = c(\beta-\alpha)$$

Ας θεωρήσουμε τη διαμέριση του [α, β] που ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Τότε

$$\int_\alpha^\beta u(x)dx = \lim \left[d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} u(\xi_k)\right]$$

Αλλά για k = 1, 2, ..., ν είναι $u(\xi_k) = c$. Συνεπώς

$$\int_\alpha^\beta u(x)dx = \lim \left[d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} c\right] = \lim \frac{\beta-\alpha}{\nu}\, \nu c = c(\beta-\alpha)$$

2. **Να υπολογίσετε το $\int_\alpha^\beta e^x dx$**

Θεωρούμε τη διαμέριση του [α, β] η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (d_\nu e^{\alpha+kd_\nu}) = d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} (e^\alpha \cdot e^{kd_\nu}) = d_\nu\, e^\alpha \cdot \sum_{k=1}^{\nu} e^{kd_\nu}$$

$$= d_\nu e^\alpha (e^{d_\nu}+e^{2d_\nu} +...+ e^{\nu d_\nu}) = d_\nu e^\alpha e^{d_\nu}(1+e^{d_\nu} +...+ e^{(\nu-1)d_\nu})$$

Η παράσταση που βρίσκεται στην παρένθεση είναι άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο e^{d_ν}. Άρα

$$S_\nu = e^\alpha d_\nu e^{d_\nu} \frac{e^{\nu d_\nu}-1}{e^{d_\nu}-1} = e^\alpha e^{d_\nu}(e^{\nu d_\nu}-1) \cdot \frac{d_\nu}{e^{d_\nu}-1}$$

Αλλά $\nu d_\nu = \beta-\alpha$, $\lim d_\nu = \lim \frac{\beta-\alpha}{\nu} = 0$, οπότε $\lim e^{d_\nu} = 1$ και (§ 3.25, εφ. 3)

$$\lim \frac{e^{d_\nu}-1}{d_\nu} = 1 \quad \text{ή} \quad \lim \frac{d_\nu}{e^{d_\nu}-1} = 1$$

Άρα

$$\int_\alpha^\beta e^x dx = \lim S_\nu = e^\alpha(e^{\beta-\alpha}-1) \lim e^{d_\nu} \lim \frac{d_\nu}{e^{d_\nu}-1}$$

$$= e^\alpha e^{\beta-\alpha}-e^\alpha = e^\beta-e^\alpha$$

Ασκήσεις: 1, 2, 3

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Γραμμικότητα

5.5 Έστω δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο [α, β]. Τότε και η f+g είναι συνεχής στο [α, β]. Αν θεωρήσουμε λοιπόν τη διαμέριση του [α, β] η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$, τότε (§ 5.4) έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \lim \{d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} [f(\xi_k) + g(\xi_k)]\}$$

$$= \lim \{d_\nu [\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k) + \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_k)]\}$$

$$= \lim \{d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\} + \lim \{ d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_k)\}$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Επίσης, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ η λf είναι συνεχής στο [α, β], οπότε έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lim [d_\nu\, \lambda \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] = \lambda \lim [d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Αποδείξαμε λοιπόν τις ισότητες

$$\boxed{\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx} \qquad (1)$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx} \qquad (2)$$

Αν γ∈[α, β], αποδεικνύεται[1] ακόμη ότι αληθεύει η ισότητα (σχέση Chasles)

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx} \qquad (3)$$

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει, με επαγωγή, ότι:

1. $\int_\alpha^\beta [\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x) +...+ \lambda_k f_k(x)]dx =$

$$= \lambda_1 \int_\alpha^\beta f_1(x)dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta f_2(x)dx +...+ \lambda_k \int_\alpha^\beta f_k(x)dx$$

2. Αν $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ είναι *οποιαδήποτε* σημεία του $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_1} f(x)dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)dx +...+ \int_{\gamma_k}^\beta f(x)dx$$

Ασκήσεις: 4, 5

Ολοκλήρωμα και διάταξη

5.6 Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$, και τη διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $x\epsilon[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k) \geqslant 0$$

Επομένως θα είναι και $d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k) \geqslant 0$, οπότε (§ 2.11)

$$\lim [d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] \geqslant 0 \quad ή \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

Αποδείξαμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν για κάθε $x\epsilon[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού αποδεικνύεται και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Έστω f, g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν για κάθε $x\epsilon[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \leqslant g(x)$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση h με $h(x) = g(x)-f(x)$, θα είναι $h(x) \geqslant 0$ για κάθε $x\epsilon[\alpha, \beta]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1, θα είναι

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx \geqslant 0 \text{ ή } \int_\alpha^\beta [g(x)-f(x)]dx \geqslant 0 \quad ή \quad \int_\alpha^\beta g(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

Άρα $$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Απόλυτη τιμή

5.7 Στην § 5.3 είδαμε ότι για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

Αλλά (§ 1.4) $$|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} |f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$$

και αφού $x_k-x_{k-1} > 0$,

$$|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} |f(\xi_k)|(x_k-x_{k-1}) \quad (1)$$

Επειδή η $|f|$ είναι και αυτή συνεχής, θα είναι

$$\lim \sum_{k=1}^{\nu} |f(\xi_k)|(x_k-x_{k-1}) = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

Επίσης $$\lim |\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})| = |\lim \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})| = |\int_\alpha^\beta f(x)dx|$$

Έτσι έχουμε, λόγω της (1)

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

Ώστε: **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε**

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί τό ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^{2}(|x|+|x-1|)dx$

Έχουμε:

$$|x|+|x-1| = \begin{cases} x+x-1 = 2x-1, & \text{αν } x \geqslant 1 \\ x-x+1 = 1, & \text{αν } 0 \leqslant x < 1 \\ -x-x+1 = -2x+1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

οπότε το ολοκλήρωμα I γράφεται:

$$I = \int_{-2}^{0}(|x|+|x-1|)dx + \int_{0}^{1}(|x|+|x-1|)dx + \int_{1}^{2}(|x|+|x-1|)dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(-2x+1)dx + \int_{0}^{1}dx + \int_{1}^{2}(2x-1)dx$$

$$= [-x^2+x]_{-2}^{0} + [x]_0^1 + [x^2-x]_1^2$$

$$= 9$$

2. Να αποδειχτεί ότι $\frac{\pi}{100} \leqslant \int_0^{\pi/4}\frac{dt}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \frac{\pi}{76}$

Επειδή γιά κάθε $t\in[0, \frac{\pi}{4}]$ είναι $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \text{συν}t \leqslant 1$, θα έχουμε

$$3+\sqrt{2} \leqslant 3+2\text{συν}t \leqslant 5$$

$$\frac{1}{25} \leqslant \frac{1}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \frac{1}{(3+\sqrt{2})^2} < \frac{1}{19}$$

οπότε (§ 5.6)

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1}{25}dt \leqslant \int_0^{\pi/4}\frac{dt}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \int_0^{\pi/4}\frac{1}{19}dt$$

Άρα

$$\frac{\pi}{100} \leqslant \int_0^{\pi/4}\frac{dt}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \frac{\pi}{76}$$

Ασκήσεις: 6

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ

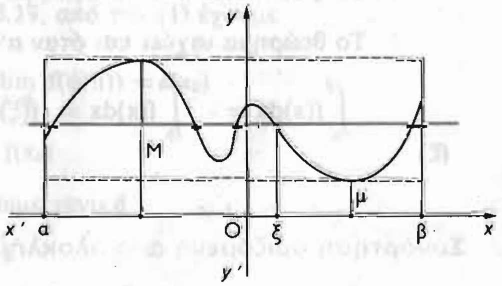
Θεώρημα μέσης τιμής

5.8 Είναι γνωστό (§ 5.3) ότι, αν μ και Μ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f, που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε

$$\mu(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant M(\beta-\alpha) \qquad (1)$$

Αν για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$, τα γινόμενα μ(β-α) και Μ(β-α) δίνουν τα εμβαδά των ορθογωνίων που έχουν κοινή βάση β-α και ύψη μ και Μ αντίστοίχως (σχ. 4).

4



Από την (1) προκύπτει ότι το εμβαδό που δίνεται από το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ περιέχεται μεταξύ των εμβαδών των δυο ορθογωνίων. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει λ μεταξύ των μ και Μ, τέτοιος ώστε[1]

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lambda(\beta-\alpha) \qquad (2)$$

Πράγματι, θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου αριθμού και μάλιστα χωρίς

(1) Τα παραπάνω δεν αποτελούν απόδειξη, γιατί στηρίζονται στην ενορατική αντίληψη της έννοιας του εμβαδού.

τον περιορισμό $f(x) \geqslant 0$. Από την (1) προκύπτει η

$$\mu \leqslant \frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} \leqslant M$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των μ και M. Επομένως υπάρχει ξ∈[α, β], τέτοιος ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Αποδείξαμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε υπάρχει ξ∈[α, β], τέτοιος ώστε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως *«θεώρημα μέσης τιμής»* του ολοκληρωτικού λογισμού

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το ξ δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό (σχ. 4)
2. Το θεώρημα ισχύει και όταν $\alpha \geqslant \beta$. Πράγματι, τότε είναι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx = -f(\xi)(\alpha-\beta) = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Συνάρτηση οριζόμενη από ολοκλήρωμα

5.9 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο [α, β], και ένα σημείο γ∈[α, β].

Τότε σε κάθε x∈[α, β] μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την τιμή του $\int_\gamma^x f(t)dt$. Έτσι ορίζεται στο [α, β] μια συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_\gamma^x f(t)dt$$

Θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, την παράγωγο της F. Έστω ένα σημείο x_0 του [α, β]. Σχηματίσουμε το λόγο μεταβολής της F μεταξύ x_0 και (x_0+h)∈[α, β] και έχουμε

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_\gamma^{x_0+h} f(t)dt - \int_\gamma^{x_0} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_\gamma^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_\gamma^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ x_0 και x_0+h τέτοιος ώστε

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(\xi)(x_0+h-x_0) = h\,f(\xi)$$

Άρα $$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\cdot hf(\xi) = f(\xi) \qquad (1)$$

Για κάθε $h \in [\alpha-x_0, \beta-x_0]$ εκλέγουμε ένα αντίστοιχο ξ (μπορεί να υπάρχουν περισσότερα). Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση φ με $\varphi(h) = \xi$. Τότε, επειδή

$$x_0 < \varphi(h) < x_0+h \quad (\text{ή } x_0+h < \varphi(h) < x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{h\to0}(x_0+h) = x_0$$

θα είναι (§ 3.11)

$$\lim_{h\to0}\varphi(h) = x_0 \qquad (2)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με όσα είπαμε στην § 3.19, από την (1) έχουμε

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to0} f(\varphi(h)) = f(x_0)$$

ή $$F'(x_0) = f(x_0) \qquad (3)$$

Επειδή η (3) ισχύει για κάθε x_0∈[α, β], έχουμε γενικά

$$F' = f$$

δηλαδή η F είναι μια παράγουσα της f. Έχουμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β]. Τότε η συνάρτηση F με $F(x) = \int_\gamma^x f(t)dt$, (γ∈[α, β]), είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και $F'(x) = f(x)$.**

Αν επαναλάβουμε την ίδια εργασία με ένα άλλο σημείο $\gamma \in [\alpha, \beta]$, ορίζουμε μια άλλη παράγουσα της f.

Ασκήσεις: 7, 8, 9, 10

Σχέση ολοκληρώματος και παράγουσας

5.10 Οι παράγουσες της συνάρτησης f μας διευκολύνουν στον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$$

Απόδειξη. Έστω F μια παράγουσα της f. Η συνάρτηση $\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι επίσης παράγουσα της f, οπότε (§ 4.17) θα είναι

$$\int_\alpha^x f(t)dt = F(x)+c \qquad (1)$$

Η ισότητα αυτή για $x = \alpha$ γίνεται (§ 5.3)

$$0 = \int_\alpha^\alpha f(t)dt = F(\alpha)+c \quad \text{άρα} \quad c = -F(\alpha)$$

Επομένως από την (1) προκύπτει ότι

$$\int_\alpha^x f(t)dt = F(x)-F(\alpha)$$

η οποία για $x = \beta$ γίνεται

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta)-F(\alpha) \qquad (2)$$

Τη διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ τη συμβολίζουμε $[F(x)]_\alpha^\beta$, οπότε η (2) γράφεται και

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = [F(x)]_\alpha^\beta$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της παράγουσας F. Πράγματι, για κάθε άλλη παράγουσα F_1 είναι $F_1(x) = F(x)+c$, οπότε

$$F_1(\beta)-F_1(\alpha) = [F(\beta)+c] - [F(\alpha)+c] = F(\beta) - F(\alpha)$$

5.11 Το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Στον υπολογισμό αυτό θα μας βοηθήσει και ο πίνακας της § 4.17, που δίνει τις παράγουσες ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\int_2^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6$

2. $\int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = 1+1 = 2$

3. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^9 = 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = 4$

4. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = [\varepsilon\varphi x]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1-(-1) = 2$

5. $\int_{-1}^1 3x^5 dx = 3\int_{-1}^1 x^5 dx = 3\left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^1 = 3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = 0$

6. $\int_{-1}^1 3x^6 dx = 3\int_{-1}^1 x^6 dx = 3\left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^1 = 3\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{6}{7}$

7. $\int_{-2}^0 (3x^2-5x+2)dx = 3\int_{-2}^0 x^2 dx - 5\int_{-2}^0 x dx + 2\int_{-2}^0 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^0 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 + 2[x]_{-2}^0$

$$= 3\cdot\frac{8}{3} + 5\cdot 2 + 2\cdot 2 = 22$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο

$$\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu^2} + \frac{\nu}{(\nu+1)^2} + \ldots + \frac{\nu}{(2\nu-1)^2}$$

Ο γενικός όρος γράφεται

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\nu})^2} + \dots + \frac{1}{(1+\frac{\nu-1}{\nu})^2}\right]$$

Παράτηρούμε ότι οι

$$1,\ 1+\frac{1}{\nu},\ \dots,\ 1+\frac{\nu-1}{\nu}$$

είναι τα αριστερά άκρα ν διαστημάτων πλάτους $d_\nu = \frac{1}{\nu}$ στα οποία έχει χωριστεί το διάστημα [1, 2].

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

θα είναι $\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} d_\nu f(\xi_k)$ με $\xi_k = 1+\frac{k-1}{\nu}$

και επομένως

$$\lim \alpha_\nu = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Ασκήσεις: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

5.12 Το θεώρημα για την παραγώγιση γινομένου (§ 4.10) οδηγεί στη μέθοδο που εκθέτουμε παρακάτω για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ενός γινομένου συνεχών συναρτήσεων f και g.

Υποθέτουμε ότι είναι γνωστή μια παράγουσα F της f και ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο [α, β]. Τότε έχουμε:

$$(Fg)' = F'g + Fg'$$

Αν υποθέσουμε ακόμη ότι η g΄ είναι συνεχής στο [α, β], τότε **ορίζονται** τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων που εμφανίζονται στην παραπάνω ισότητα και είναι:

$$\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx + \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx = [F(x)g(x)]_\alpha^\beta$$

Δηλαδή

$$\boxed{\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx} \qquad (1)$$

Έτσι με την (1) μπορούμε να ανάγουμε τον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$, δηλαδή του $\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx$, στον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx$, που πιθανόν να είναι απλούστερος, με τις προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο [α, β]
- Η F είναι μια παράγουσα της f
- Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή στο [α, β].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_0^\pi x\eta\mu x dx$.

Η συνάρτηση ημx είναι συνεχής στο [0, π] και μια παράγουσά της είναι η -συνx. Επίσης η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο [(x)΄ = 1] συνεχή στο [0, π]. Έτσι έχουμε

$$\int_0^\pi x\eta\mu x dx = \int_0^\pi (-\sigma\upsilon\nu x)'x dx = [(-\sigma\upsilon\nu x)x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sigma\upsilon\nu x)\cdot(x)'dx$$

$$= [-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x dx = [-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + [\eta\mu x]_0^\pi = \pi$$

2. Ομοίως έχουμε:

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 (e^x)'x dx = [e^x \cdot x]_0^1 - \int_0^1 e^x(x)'dx = e - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - [e^x]_0^1 = e-(e-1) = 1$$

3. Επίσης έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\eta\mu x)'e^x dx = [e^x\eta\mu x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x(e^x)'dx$$

$$= 0 - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\eta\mu x dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx = [e^x\sigma\upsilon\nu x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\,\sigma\upsilon\nu x dx$$

$$= e^\pi(-1) - e^{-\pi}(-1) - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx = e^{-\pi}-e^\pi - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx$$

Δηλαδή είναι $2\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx = e^{-\pi}-e^\pi$ και συνεπώς

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \text{συν}x\,dx = \frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}$$

Ασκήσεις: 23, 24, 25, 26

Αλλαγή μεταβλητής

5.13 Το θεώρημα για την παραγώγιση σύνθεσης συναρτήσεων (§ 4.12) παρέχει μια νέα μέθοδο ολοκλήρωσης.

Θεωρούμε μια συνάρτηση g παραγωγίσιμη, άρα και συνεχή, στο διάστημα [α, β].

Έστω ακόμη f μια συνεχής συνάρτηση στο g([α, β]) και F μια παράγουσα της f. Τότε (§ 4.12) έχουμε

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$$

Αν επιπλέον και η g′ είναι συνεχής στο [α, β], τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα της $(f\circ g)\cdot g'$ και από την προηγούμενη ισότητα έχουμε

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx = [F(g(x))]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

και επειδή η F είναι παράγουσα της f,

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(y)dy} \quad (2)$$

Έτσι με τη (2) μπορούμε να ανάγουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος από α ως β μιας συνάρτησης της μορφής $(f\circ g)\cdot g'$ στον υπολογισμό ολοκληρώματος της f από g(α) ως g(β).

Αντιστρόφως, με την αντικατάσταση y = g(x) το $\int_\gamma^\delta f(y)dy$ μπορεί να αναχθεί στο $\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx$, αφού προσδιοριστούν τα α και β, ώστε

$$\gamma = g(\alpha) \quad \text{και} \quad \delta = g(\beta)$$

Ειδική περίπτωση: $\int_\alpha^\beta f(\lambda x+\mu)dx$

Θέτουμε g(x) = λx+μ, οπότε g′(x) = λ, και συνεπώς

$$\int_\alpha^\beta \lambda\cdot f(\lambda x+\mu)dx = \int_{\lambda\alpha+\mu}^{\lambda\beta+\mu} f(y)dy$$

Άρα
$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(\lambda x+\mu)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\alpha+\mu}^{\lambda\beta+\mu} f(y)dy}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έχουμε $\int_0^{\pi/3} \text{συν}2x\, e^{\text{ημ}2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} e^{\text{ημ}2x}(\text{ημ}2x)'\,dx$

Θέτουμε y = g(x) = ημ2x, οπότε βρίσκουμε g(0) = ημ(2·0) = 0 και $g(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Έτσι θα είναι:

$$\int_0^{\pi/3} \text{συν}2x\,e^{\text{ημ}2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} e^y dy = \frac{1}{2}[e^y]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}/2} - 1)$$

2. Ομοίως είναι $\int_0^{\pi/3} \text{εφ}x\,dx = \int_0^{\pi/3}\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}dx = -\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\text{συν}x}(\text{συν}x)'\,dx$

Θέτουμε y = g(x) = συνx, οπότε g(0) = 1 και $g(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ και έτσι έχουμε

$$\int_0^{\pi/3} \text{εφ}x\,dx = -\int_1^{1/2}\frac{1}{y}dy = -[\ln y]_1^{1/2} = -(\ln\frac{1}{2} - 0) = -(-\ln 2) = \ln 2$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα** $I = \int_1^\lambda \frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$

Έχουμε $I = \int_1^\lambda e^{-\frac{1}{x}}dx + \int_1^\lambda \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$

Αλλά $\int_1^\lambda e^{-\frac{1}{x}}dx = \int_1^\lambda (x)'e^{-\frac{1}{x}}dx = [xe^{-\frac{1}{x}}]_1^\lambda - \int_1^\lambda xe^{-\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x})'dx$

$$= [xe^{-\frac{1}{x}}]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$$

Άρα $I = \int_1^\lambda e^{-\frac{1}{x}}dx + \int_1^\lambda \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx = [xe^{-\frac{1}{x}}]_1^\lambda = \lambda e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-1}$

2. Αν f είναι μια περιοδική συνάρτηση f με περίοδο T, να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα

$I = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(y)dy$ είναι ανεξάρτητο του α.

Είναι:
$$I = \int_{\alpha}^{T} f(y)dy + \int_{T}^{\alpha+T} f(y)dy$$

Αν θέσουμε $y = x+T$, για $y = T$ βρίσκουμε $x = 0$ και για $y = \alpha+T$ βρίσκουμε $x = \alpha$.

Τότε:
$$\int_{T}^{\alpha+T} f(y)dy = \int_{0}^{\alpha} f(x+T)(x+T)'dx$$
$$= \int_{0}^{\alpha} f(x+T)dx$$
$$= \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \qquad \text{[επειδή η f είναι περιοδική]}$$

Άρα
$$I = \int_{\alpha}^{T} f(y)dy + \int_{0}^{\alpha} f(y)dy = \int_{0}^{T} f(y)dy$$

δηλαδή ανεξάρτητο του α.

Ασκήσεις: 27, 28 29, 30

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Εμβαδό οριζόμενο από συνάρτηση

5.14 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **$f(x) \geqslant 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$**

Στην περίπτωση αυτή το χωρίο που μας ενδιαφέρει είναι το σύνολο των σημείων M(x, y) με

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση της § 5.3 το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

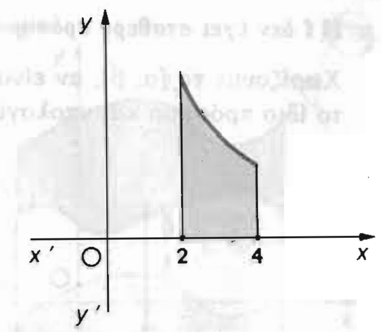
Το εμβαδό του χωρίου (σχ. 5) που ορίζεται από τις

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x} \end{cases}$$

είναι:

$$E = \int_{2}^{4} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln \frac{4}{2} = \ln 2$$

5



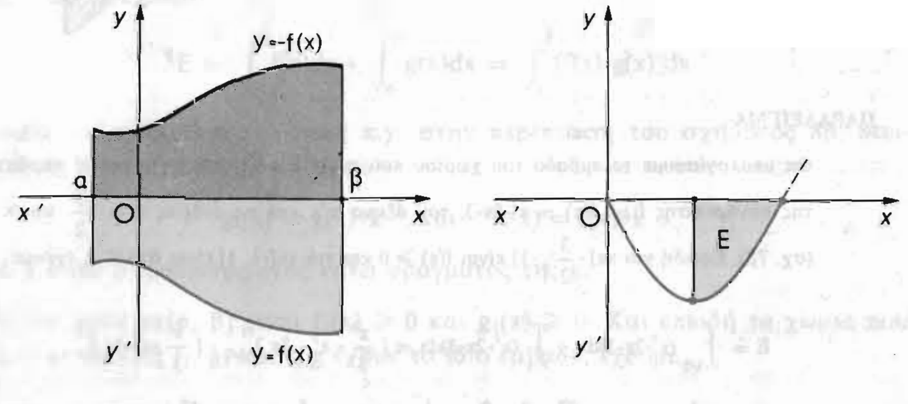
- **$f(x) \leqslant 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$**

Επειδή τα χωρία

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 0 \leqslant y \leqslant -f(x) \end{cases}$$

έχουν το ίδιο εμβαδό (σχ. 6α), αρκεί να εργαστούμε με τη συνάρτηση -f για την οποία είναι $-f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

6



α β

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το επίπεδο χωρίο (σχ. 6β) που ορίζεται από τα σημεία M (x, y) με

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ -\eta\mu x \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$$

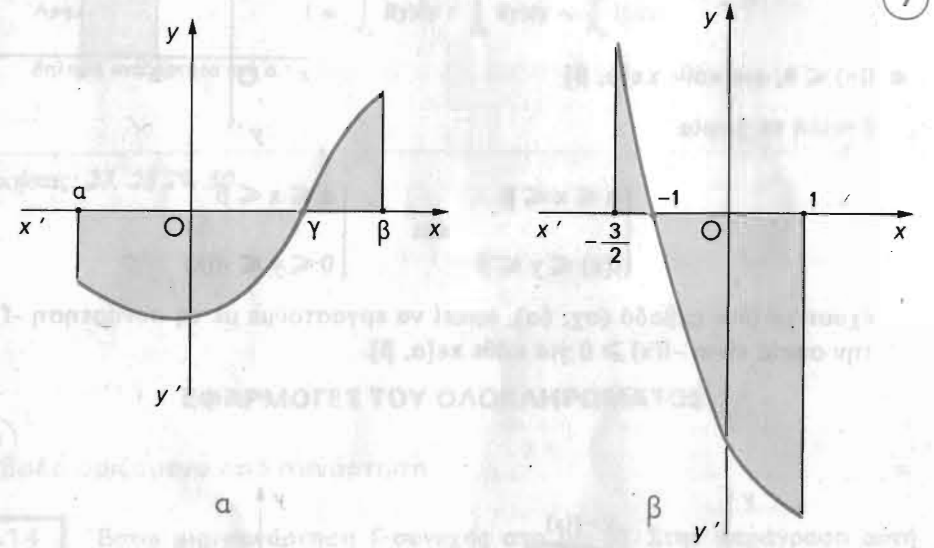
έχει εμβαδό

$$E = \int_{\pi/2}^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\pi/2}^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 1$$

Η f δεν έχει σταθερό πρόσημο

Χωρίζουμε το [α, β], αν είναι δυνατό, σε υποδιαστήματα στα οποία η f έχει το ίδιο πρόσημο και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα εμβαδά (σχ. 7α).

7



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = x^2-2x-3$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = -\frac{3}{2}$ και $x = 1$ (σχ. 7β). Επειδή για $x\epsilon[-\frac{3}{2}, -1]$ είναι $f(x) \geqslant 0$ και για $x\epsilon[-1, 1]$ είναι $f(x) \leqslant 0$, έχουμε

$$E = \int_{-3/2}^{-1} (x^2-2x-3)dx - \int_{-1}^{1} (x^2-2x-3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-3/2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{1}$$

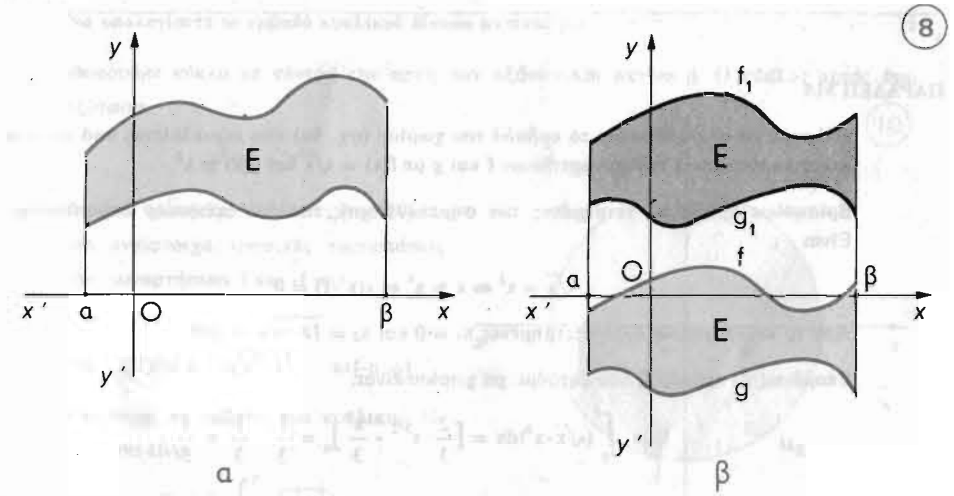
$$= (-\frac{1}{3} - 1 + 3) - (-\frac{27}{24} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}) - (\frac{1}{3} - 1 - 3) + (-\frac{1}{3} - 1 + 3) = \frac{47}{8}$$

Χωρίο που ορίζεται από δυο συναρτήσεις

5.15 Έστω δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο [α, β], τέτοιες ώστε για κάθε xϵ[α, β] να είναι $g(x) \leqslant f(x)$. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες x = α και x = β.

Θα εξετάσουμε χωριστά την περίπτωση που για κάθε xϵ[α, β] είναι $f(x) \geqslant 0$ και $g(x) \geqslant 0$. Τότε (σχ. 8α) θα είναι

8



$$E = E_1 - E_2$$

όπου E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των χωρίων που ορίζουν οι γραφικές παραστάσεις των f, g με τον άξονα x΄x.

Επομένως θα έχουμε

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)-g(x)]dx$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση, όπως π.χ. στην περίπτωση του σχήματος 8β, θεωρούμε τις συναρτήσεις g_1 και f_1 με

$$g_1(x) = g(x)+k \quad \text{και} \quad f_1(x) = f(x)+k$$

όπου k είναι ο αντίθετος ενός κάτω φράγματος τής g.

Τότε, για κάθε xϵ[α, β] είναι $f_1(x) \geqslant 0$ και $g_1(x) \geqslant 0$. Και επειδή τα χωρία που ορίζονται από τις f_1, g_1 και f, g έχουν το ίδιο εμβαδό, έχουμε

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+k-(g(x)+k)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)-g(x)]dx$$

Γενικά λοιπόν

Αν για δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο [α, β], είναι $g(x) \leqslant f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ έχει εμβαδό

$$E = \int_\alpha^\beta [f(x)-g(x)]dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου (σχ. 9α) που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2$.

Βρίσκουμε πρώτα τις τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων. Είναι

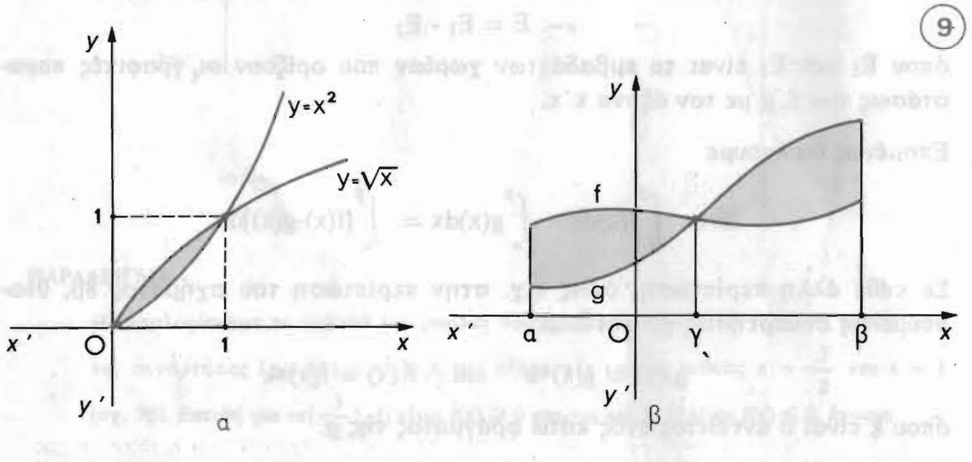
$$\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3-1) = 0$$

Άρα τα κοινά σημεία έχουν τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Επομένως το εμβαδό Ε του ζητούμενου χωρίου είναι.

$$E = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(9)



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν οι τιμές των συναρτήσεων f και g δεν έχουν την ίδια διάταξη σ' όλο το [α, β], αλλά το [α, β] μπορεί να χωριστεί σε υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία, για κάθε x να είναι

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \text{ή} \quad g(x) \leqslant f(x)$$

τότε υπολογίζουμε τα επιμέρους εμβαδά.

Έτσι π.χ. το σχήμα 9β είναι

$$E = \int_\alpha^\gamma [f(x)-g(x)]dx + \int_\gamma^\beta [g(x)-f(x)]dx$$

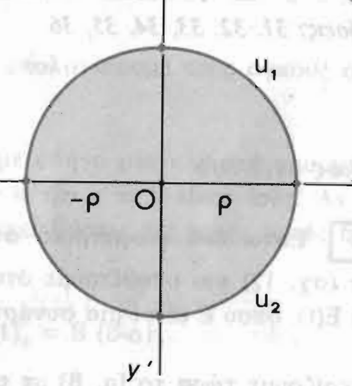
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδό κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ.

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ. Ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση

$$x^2+y^2 = \rho^2$$

(10)



Τα δυο ημικύκλια κ_1 και κ_2 (σχ. 10) είναι αντίστοιχα γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και -f με

$$f(x) = \sqrt{\rho^2-x^2}$$

και $(-f)(x) = -\sqrt{\rho^2-x^2}, \quad x \in [-\rho, \rho]$

Επομένως το εμβαδό του κυκλικού δίσκου θα είναι

$$E = 2\int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2-x^2}dx$$

Αν θέσουμε $x = \rho\eta\mu t$, τότε για $x = -\rho$ βρίσκουμε $t = -\frac{\pi}{2}$ και για $x = \rho$ βρίσκουμε $t = \frac{\pi}{2}$.

Έτσι, θα έχουμε (§ 5.12)

$$E = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2-\rho^2\eta\mu^2 t}\,(\rho\eta\mu t)'dt = 2\rho^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 t\,dt$$

$$= 2\rho^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2}dt = \rho^2\left[t+\frac{\eta\mu 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\rho^2$$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδό έλλειψης με άξονες 2α και 2β.

Αν η έλλειψη έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων (σχ. 11) η εξίσωσή της είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

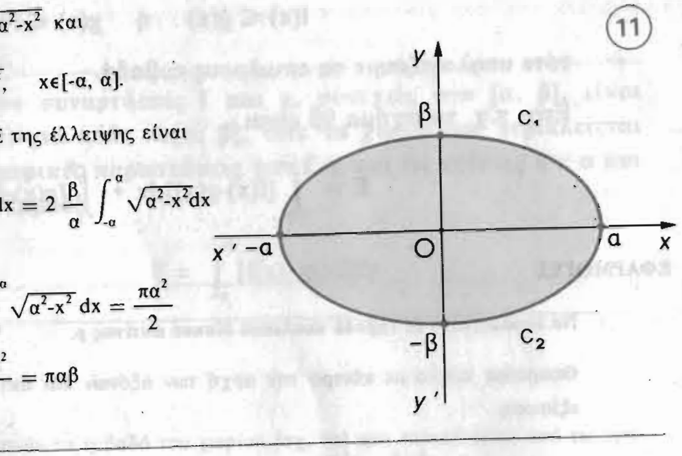
Οι δυο «ημιελλείψεις» c_1 και c_2 είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και

-f με $f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ και

$(-f)(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}, \quad x \in [-\alpha, \alpha].$

Συνεπώς το εμβαδό Ε της έλλειψης είναι

$$E = 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}dx = 2 \frac{\beta}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}dx$$



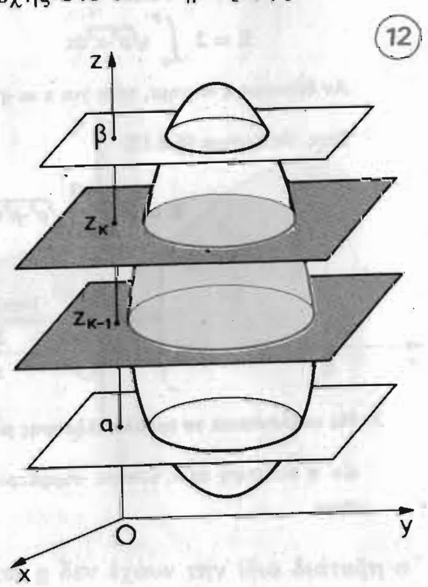
Αλλά (Εφαρμ. 1) $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi\alpha^2}{2}$

Άρα $E = 2 \frac{\beta}{\alpha} \frac{\pi\alpha^2}{2} = \pi\alpha\beta$

Ασκήσεις: 31, 32, 33, 34, 35, 36

Όγκος στερεού

5.16 Έστω ένα γεωμετρικό στερεό Σ. Θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς Oxyz (σχ. 12) και υποθέτουμε ότι η τομή του Σ με το επίπεδο z = t έχει εμβαδό E(t), όπου E είναι μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β].



Διαμερίζουμε τώρα το [α, β] με τα σημεία

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_{\nu-1}, t_\nu = \beta$$

οπότε ορίζονται ν διαστήματα πλάτους

$$d_\nu = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$$

Επειδή η E είναι συνεχής στο [α, β], θα έχει σε κάθε διάστημα $[t_{k-1}, t_k]$, k = 1, 2, ..., ν, ελάχιστη και μέγιστη τιμή μ_k και M_k αντιστοίχως. Αν λοιπόν V_K είναι ο όγκος του μέρους του Σ που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων $z = t_{k-1}$ και $z = t_k$, θα είναι

$$d_\nu \mu_k \leqslant V_k \leqslant d_\nu M_k$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον όγκο V του στερεού μεταξύ των επιπέδων z = α και z = β.

Πράγματι, αν σχηματίσουμε τα αθροίσματα

$$\underline{S}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} d_\nu \mu_k \quad \text{και} \quad \overline{S}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} d_\nu M_k$$

είναι $$\underline{S}_\nu \leqslant V \leqslant \overline{S}_\nu$$

και επειδή (§ 5.3), τα $\underline{S}_\nu$ και $\overline{S}_\nu$ έχουν κοινό όριο το $\int_\alpha^\beta E(t)dt$ θα είναι

$$\boxed{V = \int_\alpha^\beta E(t)dt} \qquad (1)$$

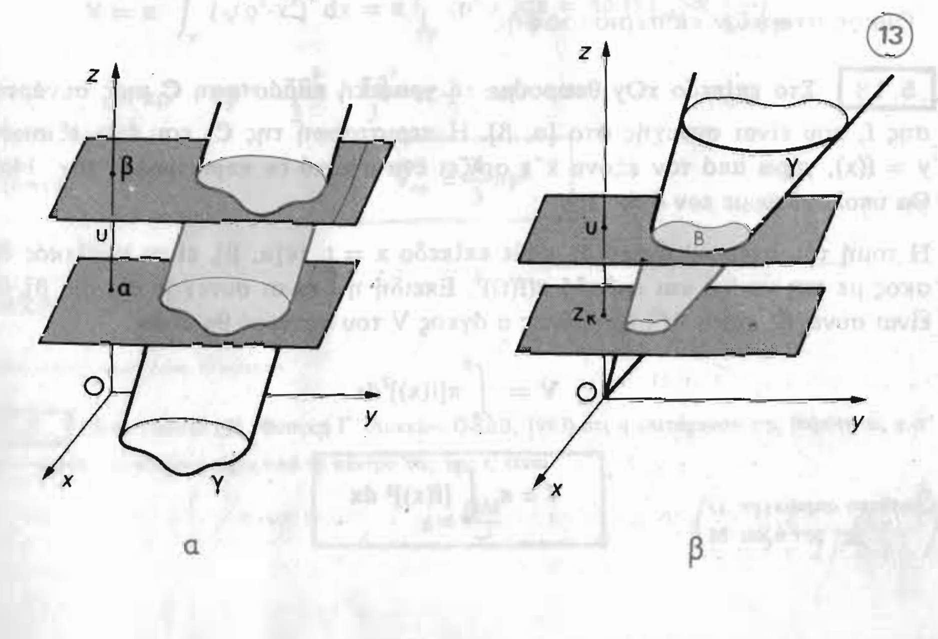
Εφαρμογή: Όγκος κυλίνδρου και κώνου

5.17 Με τη βοήθεια της ισότητας (1) θα υπολογίσουμε τους όγκους ορισμένων γνωστών στερεών.

1. Ας θεωρήσουμε μια κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό μια κλειστή γραμμή γ (σχ. 13α). Οι τομές της με τα επίπεδα z = α και z = β είναι ίσες. Αν το εμβαδό τους είναι B, τότε το στερεό που έχει βάσεις τις τομές αυτές έχει όγκο

$$V = \int_\alpha^\beta B dt = B \int_\alpha^\beta dt = B[t]_\alpha^\beta = B\,(\beta - \alpha)$$

Αν θέσουμε β-α = υ, έχουμε τελικά



$$\boxed{V = B \cdot \upsilon} \qquad (2)$$

Ο τύπος αυτός δίνει τον όγκο κυλίνδρου, πρίσματος κτλ. όταν η οδηγός της κυλινδρικής επιφάνειας είναι αντίστοιχα κύκλος, πολύγωνο κτλ.

2. Έστω τώρα μια κωνική επιφάνεια με οδηγό μια κλειστή γραμμή γ (σχ. 13β). Η τομή της με το επίπεδο $z = \upsilon$ έχει εμβαδό Β. Στη Γεωμετρία αποδεικνύεται ότι αν B_t είναι το εμβαδό της τομής της επιφάνειας με το επίπεδο $z = t$, τότε

$$\frac{B_t}{B} = \frac{t^2}{\upsilon^2} \quad \text{ή} \quad B_t = B\,\frac{t^2}{\upsilon^2}$$

Επομένως ο όγκος του στερεού που έχει βάση τη Β είναι

$$V = \int_0^{\upsilon} B\,\frac{t^2}{\upsilon^2}\,dt = \frac{B}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon} t^2 dt = \frac{B}{\upsilon^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\upsilon} = \frac{B}{\upsilon^2}\cdot\frac{\upsilon^3}{3}$$

ή τελικά

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\,B \cdot \upsilon} \qquad (3)$$

Όταν η οδηγός της κωνικής επιφάνειας είναι κύκλος, πολύγωνο κτλ, ο τύπος (3) μας δίνει αντίστοιχα τον όγκο κώνου, πυραμίδας κτλ.

Όγκος στερεών εκ περιστροφής

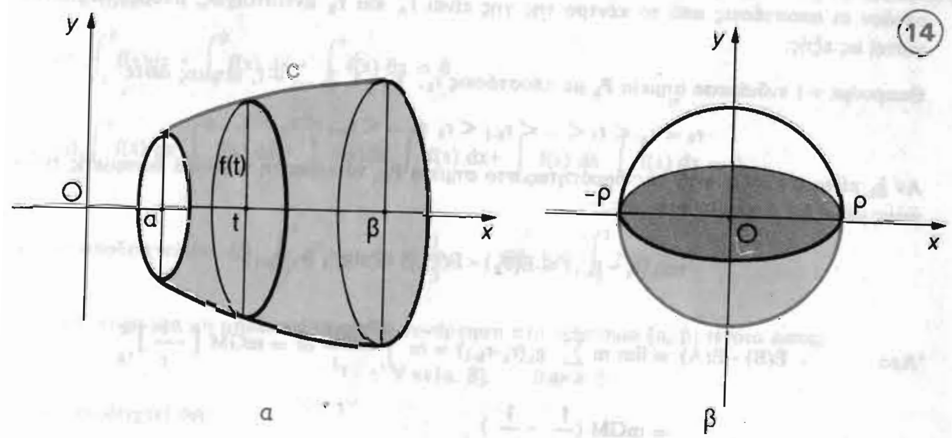
5.18 Στο επίπεδο xOy θεωρούμε τη γραφική παράσταση C μιας συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο [α, β]. Η περιστροφή της C, που έχει εξίσωση $y = f(x)$, γύρω από τον άξονα x΄x ορίζει ένα **στερεό εκ περιστροφής** (σχ. 14α). Θα υπολογίσουμε τον όγκο του.

Η τομή του στερεού αυτού με κάθε επίπεδο $x = t$, $t \in [\alpha, \beta]$, είναι κυκλικός δίσκος με ακτίνα f(t) και εμβαδό $\pi(f(t))^2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], θα είναι συνεχής και η πf^2. Επομένως ο όγκος V του στερεού θα είναι

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi[f(x)]^2 dx$$

ή

$$\boxed{V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2\,dx}$$



Εφαρμογή: Όγκος σφαίρας

5.19 Στο επίπεδο xOy θεωρούμε ένα ημικύκλιο κέντρου Ο και ακτίνας ρ, του οποίου η διάμετρος βρίσκεται στον άξονα x΄x. Όταν το ημικύκλιο στρέφεται γύρω από τον x΄x, παράγεται σφαίρα με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Επειδή το ημικύκλιο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \quad x \in [-\rho, \rho],$$

ο όγκος της σφαίρας θα είναι

$$V = \pi \int_{-\rho}^{\rho} \left(\sqrt{\rho^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-\rho}^{\rho} (\rho^2 - x^2)\,dx = \pi\rho^2[x]_{-\rho}^{\rho} - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\rho}^{\rho}$$

$$= \pi\rho^3 + \pi\rho^3 - \frac{\pi\rho^3}{3} - \frac{\pi\rho^3}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\rho^3$$

Ώστε:

$$\boxed{V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi\rho^3}$$

Ασκήσεις: 37, 38

Μια εφαρμογή στη Φυσική

5.20 Είναι γνωστό (βλ. Φυσική Γ΄ Λυκείου ΟΕΔΒ, 1983) ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας g σ' ένα σημείο, το οποίο απέχει από το κέντρο της γης r, είναι

$$g = \frac{GM}{r^2} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{G: παγκόσμια σταθερά,} \\ \text{M: μάζα της γης}\end{array}\right)$$

1. **Η διαφορά δυναμικής ενέργειας E(B)-E(A)** που έχει μια μάζα m μεταξύ δύο σημείων A και B, των οποίων οι αποστάσεις από το κέντρο της γης είναι r_A και r_B αντιστοίχως, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Θεωρούμε ν-1 ενδιάμεσα σημεία P_k με αποστάσεις r_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu-1$, τέτοιες ώστε

$$r_0 = r_A < r_1 < \ldots < r_{k-1} < r_k < \ldots < r_{\nu-1} < r_\nu = r_r$$

Αν g_k είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο P_k, τότε για τη διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ P_{k-1} και P_k έχουμε

$$mg_k(r_k - r_{k-1}) \leqslant E(P_k) - E(P_{k-1}) \leqslant mg_{k-1}(r_k - r_{k-1})$$

Άρα
$$E(B) - E(A) = \lim m \sum_{k=1}^{\nu} g_k(r_k - r_{k-1}) = m \int_{r_A}^{r_B} \frac{GM}{r^2}\,dr = mGM\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$
$$= mGM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

2. **Η ταχύτητα διαφυγής υ_δ** είναι η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να βληθεί ένα σώμα από ένα σημείο A της επιφάνειας της γης ώστε να μην επιστρέψει στη γη (δηλ. να μηδενιστεί η ταχύτητά του σε άπειρη απόσταση). Αν θεωρήσουμε την κινητική ενέργεια $E_k(A)$ ως $E_k(B)$ στις θέσεις A, B, τότε

$$E(B) - E(A) = E_k(A) - E_k(B)$$

$$mGM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 \qquad \text{(R: ακτίνα της γης)}$$

Επομένως αν $\upsilon_A = \upsilon_\delta$ και το B το θεωρήσουμε απομακρυσμένο στο άπειρο, θα έχουμε

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\upsilon_\delta^2$$

ή
$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11,2 \text{ km/sec}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχτεί ότι $40 \leqslant \int_{100}^{104} \sqrt{x}\,dx < 41$.

2. Να αποδειχτεί ότι, αν $0 < \alpha < \beta$ τότε
$$\frac{\beta-\alpha}{\beta} \leqslant \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} \leqslant \frac{\beta-\alpha}{\alpha}$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta kx\,dx \quad (\alpha < \beta)$.

4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx + \int_1^0 \frac{dx}{x^2+1} = 1$.

5. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ το οποίο περιέχει τους αριθμούς α, β, γ, δ τότε:

(i) $\int_\gamma^\delta f(x)dx + \int_\delta^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \int_\gamma^\delta f(x)\,dx + \int_\alpha^\gamma f(x)dx \int_\delta^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\delta f(x)\,dx \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = 0$

6. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\int_0^1 x^2\,\eta\mu x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$, (ii) $1 \leqslant \int_0^1 2^x dx \leqslant 2$.

7. Αν f είναι μια μη μηδενική συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] τέτοια ώστε:

$$\forall\, x \in [\alpha, \beta], \qquad f(x) \geqslant 0$$

να αποδειχτεί ότι:

(i) Υπάρχει διάστημα [γ, δ] το οποίο περιέχεται στο [α, β] τέτοιο ώστε: $\forall\, x \in [\gamma, \delta]$, $f(x) > 0$

(ii) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$.

8. Αν L είναι μια συνάρτηση με $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ και πεδίο ορισμού $\mathbb{R}_+^*$, να αποδειχτεί ότι

(i) $L(1) = 0$, (ii) Η L είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_+^*$.

9. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ το οποίο περιέχει τους αριθμούς 0, α, β. Αν F_1 και F_2 είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το Δ και

$$F_1(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \qquad F_2(x) = \int_\beta^x f(t)\,dt$$

να αποδειχτεί ότι η F_1-F_2 είναι συνάρτηση σταθερή.

10. Έστω η συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t\,dt$$

Να υπολογιστεί η παράγωγος $F'(x)$ της F στο σημείο x, θεωρώντας την F ως σύνθεση των συναρτήσεων g με $g(x) = 1+x^2$ και h με $h(x) = \int_1^x \ln t\,dt$.

11. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_1^3 (2x^2-5x+1)\,dx$, (ii) $\int_1^2 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)dx$, (iii) $\int_1^3 \frac{2x^2-5x+3}{x^2}\,dx$

(iv) $\int_0^{-2} x(2x^2-1)^3 dx$, (v) $\int_1^3 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}\,dx$, (vi) $\int_1^2 \frac{(2x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

12. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2} (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx$, (ii) $\int_1^2 4\,(3x^2+1)\,(x^3+x+1)^3 dx$, (iii) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x dx$,

(iv) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$, (v) $\int_0^x (\alpha x^\mu+\beta)^\nu x^{\mu-1} dx$, (vi) $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}\, dx$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2} (3\ \eta\mu 2x + 5\sigma\upsilon\nu 3x)\ dx$, (ii) $\int_0^1 e^{5x-1}\ dx$,

(iii) $\int_0^x \frac{dt}{t+1}$ (iv) $\int_0^{\pi/4} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx$

14. (i) Να υπολογιστούν δυο πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε

$$\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

(ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 x\ dx$, (ii) $\int_0^{\pi/4} \eta\mu^4 x\ dx$.

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_\alpha^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x \eta\mu 3x\ dx$, (ii) $\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 x\ \eta\mu 2x\ dx$.

17. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^2 x\ dx$, (ii) $\int_0^{\pi/4} \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ dx$.

18. Δίνεται η ακολουθία $I_\nu = \int_0^1 t^\nu\ \eta\mu(\pi\ t)\ dt$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$). Να αποδειχτεί ότι

(i) $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$, $0 < I_\nu < \int_0^1 t^\nu\ dt$, (ii) $\lim I_\nu = 0$.

19. Να βρεθεί πραγματικός αριθμός $\gamma \in [0, 1]$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^1 (x - \frac{1}{2})\ dx = \gamma - \frac{1}{2}$$

20. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_0^{\pi/4} \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^4 x\ dx \text{ και } J = \int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^4 x\ dx$$

Να υπολογιστούν: I+J, I-J, I και J.

21. (i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(x) = \int_0^x (1+x)^\nu dx \quad \nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

(ii) Να βρείτε μια άλλη έκφραση του I(x) χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του $(1+x)^\nu$ με το τύπο του διωνύμου.

(iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2}\binom{\nu}{1} + \frac{1}{3}\binom{\nu}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu+1}\binom{\nu}{\nu}$$

22. Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας (S_ν) με γενικό όρο

(i) $S_\nu = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ldots + \frac{1}{2\nu}$

(ii) $S_\nu = \frac{\pi}{\nu}\ [\eta\mu \frac{\pi}{\nu} + \eta\mu \frac{2\pi}{\nu} + \ldots + \eta\mu \frac{(\nu-1)\pi}{\nu}]$ $\int_0^\pi \eta\mu x\, dx$

23. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2} x\ \sigma\upsilon\nu x\ dx$, (ii) $\int_0^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu^2 x\ dx$,

(iii) $\int_0^1 xe^{-2x} dx$, (iv) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

24. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} e^x\ \eta\mu x dx$.

25. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με f(x) = 1-lnx. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_\alpha^\beta \ln x dx \quad (0 < \alpha < \beta)$, (ii) $\int_1^{e^2} |f(x)|\ dx$.

26. Αν $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx$ ($\nu \in \mathbb{N}$), να βρεθεί η σχέση που συνδέει το $I_{\nu+1}$ και το I_ν. Να υπολογιστεί το I_4.

27. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$, (ii) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$,

(iii) $\int_2^3 \frac{dt}{t\ (\ln t)^2}$, (iv) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$.

28. Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ και $x \in \mathbb{R}_+^*$ να αποδειχτεί ότι

$$\int_\alpha^{x\alpha} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

29. Αν L είναι μια συνάρτηση με $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt$ και πεδίο ορισμού $\mathbb{R}_+^*$, να αποδειχτεί ότι

(i) $L(xy) = L(x) + L(y)$

(ii) $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$

(iii) $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$

30. Αν f είναι μία συνάρτηση συνεχής και άρτια στο [-α, α] (α > 0), να αποδειχτεί ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)dt$$

31. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις

(i) $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 9 \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$

32. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 3$, $x = 6$.

33. Να υπολογιστεί το εμβαδό E_λ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = \lambda$ $(\lambda > 0)$. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda$ και $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E_\lambda$.

34. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με f(x) = συνx, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2\pi$.

35. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = 3\alpha$.

36. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $x+y-2 = 0$ και $y^2 = x$.

37. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όταν αυτή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x΄x.

38. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή γύρω από τον άξονα x΄x του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y = x^2$ και $x^2+y^2 = 2$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. (i) Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^{\nu-\mu} > 1$ κτλ. (ii) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$ κτλ.

2. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο της επαγωγής.

3. (i) Εφαρμογή της ανισότητας Bernoulli.

   (ii) Η σχέση που δόθηκε με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγει στην (i).

4. Επειδή $\alpha \geqslant 2$, υπάρχει $A \geqslant 1$ τέτοιο ώστε $\alpha = A+1$ κτλ.

5. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της επαγωγής.

6. $\sup A_1 = 2$, $\sup A_2 = 1$, $\inf A_2 = 0$, $\inf A_3 = 0$.

7. Παρατηρείστε ότι: $[x] \leqslant x < [x]+1$ κτλ.

8. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: (i) $x \in \mathbb{Z}$ (ii) $x \notin \mathbb{Z}$ κτλ.

9. (i) $f \neq g$ (ii) $h \neq t$.

10. (i) Η f είναι ο περιορισμός της g στο $A_1 = \mathbb{R} - \{1\}$.

    (ii) Η f είναι ο περιορισμός της g στο $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.

11. (i) $\alpha(N^*) = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^\nu}{\nu}, \ldots\}$ και $G = \{(1,-1), (2, \frac{1}{2}), (3, -\frac{1}{3}), \ldots, (\nu, \frac{(-1)^\nu}{\nu}), \ldots\}$

    (ii) $\beta(N^*) = \{-1, 1\}$ και $G = \{(1,-1), (2,1), (3,-1), \ldots, (\nu, (-1)^\nu), \ldots\}$

12. $f+g : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+2x+2, & \text{αν } x \in [-1, 0] \\ 2x+4, & \text{αν } x \in (0, 2) \end{cases}$

13. $(f \cdot g) : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x(2-x)}$

14. (i) περιττή, (ii) άρτια.

15. Δεν είναι περιττή.

16. Να εφαρμόσετε τους ορισμούς.

17. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο της επαγωγής.

18. Οι f, g είναι περιοδικές.

19. (i) (α_ν) γνησίως αύξουσα, (ii) (β_ν) γνησίως αύξουσα,
(iii) Η (γ_ν) δεν είναι μονότονη, (iv) (δ_ν) γνησίως φθίνουσα.

20. Αρκεί να δείξετε ότι: αν ν περιττός, τότε $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+1}$, αν ν άρτιος, τότε $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$.

21. Η f σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

22. Η f στο $(-\infty, 2)$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο $[2, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

23. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 αλλά δεν είναι μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

24. Το σύνολο τιμών είναι: $(-3, \frac{1}{3})$.

25. Τα σύνολα τιμών είναι: (i) $[-\frac{1}{4}, +\infty)$, (ii) $[\frac{2-\sqrt{6}}{4}, \frac{2+\sqrt{6}}{4}]$.

26. Τα σύνολα τιμών είναι: (i) $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\}$, (ii) $[-\frac{4\sqrt{7}}{7}, \frac{4\sqrt{7}}{7}]$, (iii) $\mathbb{R}$.

27. Είναι $= f([1, 2)) \cup f([2, 4)) = [1, 6)$.

28. (i) Είναι κάτω φραγμένη στο $(2, +\infty)$, (ii) Είναι φραγμένη στο $(1, 3)$.

29. Στο $A_1 = (1, 2)$ υπάρχει μέγιστο κάτω φράγμα το 2 και ελάχιστο άνω φράγμα το 8.
Στο A_2 ελάχιστο άνω φράγμα είναι ο 8 και μέγιστο κάτω φράγμα το 2.
Στο $\mathbb{R}$ μέγιστο κάτω φράγμα είναι το 0, ενώ δεν υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα.

30. Είναι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$: (i) $\alpha_\nu < 2$, (ii) $0 \leqslant \beta_\nu < 1$, (iii) $|\gamma_\nu| \leqslant 2$, (iv) $|\delta_\nu| < 3$.

31. (i) Αν υποθέσετε ότι (3^ν) φραγμένη, καταλήγετε σε άτοπο. (ii) Ομοίως.

32. Με επαγωγή βρίσκουμε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_\nu < 5$ και $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$.

33. Είναι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_\nu < 1$ και $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$.

34. Ορίζεται η $g \circ f$ με $(g \circ f)(\chi) = 2(\chi+1)$ και πεδίο ορισμού $A' = \mathbb{R} - \{1\}$.

35. Ορίζεται η $f \circ g$ με $(f \circ g)(x) = \sqrt{-33-14x-x^2}$ και πεδίο ορισμού $A' = \{x \in \mathbb{R}: -11 \leqslant x \leqslant -3\}$.

36. Αν π.χ. f με $f(x) = \eta\mu x$ και g με $g(x) = x^2$, τότε $(f \circ g)(x) = \eta\mu x^2$ ενώ $(g \circ f)(x) = (\eta\mu x)^2$ κτλ.

37. Οι $(f \circ g) \circ h$ και $f \circ (g \circ h)$ έχουν πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της h κτλ.

38. Είναι: (i) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}(x-\beta)$, (ii) Η αντίστροφη σχέση της f δεν είναι συνάρτηση,
(iii) $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, (iv) Η h, που έχει σύνολο αφίξεως το $\mathbb{R}$, δεν είναι συνάρτηση επί.

39. Είναι $f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{x-2}$, ενώ η g δεν είναι συνάρτηση επί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Εργαστείτε όπως στα παραδείγματα της § 2.1.

2. Όπως στην Άσκηση 1.

3. Όπως στην Άσκηση 1.

4. Να αποδείξετε ότι: (i) $\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{(-1)^\nu}{\nu^2+3\nu+15} \right| < \frac{1}{\nu^2}$, (ii) $\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{c+\sqrt{\nu}}{\nu^3} \right| < \frac{1}{\nu^2}$.
Κατόπιν να εφαρμόσετε το θεώρημα της § 2.3.

5. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμ. 1 της § 2.5.

6. (i) Είναι $\sqrt[\nu]{\alpha}-1 = \frac{(\sqrt[\nu]{\alpha}-1)(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}} + \ldots + 1)}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}} + \ldots + 1}$, (ii) Εφαρμόστε το θεώρημα της § 2.3.

7. (i) Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 1 της § 2.5.
(ii) Να λάβετε υπόψη ότι $\frac{\nu}{(-2)^\nu(\nu^2+1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{\nu}{\nu^2+1}$ κτλ.

8. Να λάβετε υπόψη σας την εφαρμογή 3 της § 2.5.

9. (i) Είναι: $\nu > \frac{2}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\nu} < \frac{1-\alpha}{2}$ κτλ.
(ii) Να λάβετε υπόψη σας ότι $\lim \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^\nu = 0$.

10. (i) Αρκεί να δείξετε ότι: $\lim \left(\frac{\nu^2}{\nu^2-1} - 1\right) = 0$, (ii) Παρατηρείστε ότι $5 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^\nu - 1\right] + 5 = 5\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$.

11. Εφαρμόστε το κριτήριο της § 2.8 με $\nu_1 = 2k$, $\nu_2 = 2k+1$, $(k \in \mathbb{N}^*)$.

12. Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα της § 2.9.

13. Αποδείξτε ότι $\left| \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[\nu]{\nu}}{\nu} - 1 \right| < \varepsilon$ κτλ.

14. (i) Όπως στο πρδ. της § 2.12 $(\lim \alpha_\nu = \frac{1}{2})$
(ii) Όπως στην εφαρμ. 2 της § 2.14 $(\lim \alpha_\nu = \frac{2}{3})$.
(iii) $\lim \alpha_\nu = 1$.

15. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\nu^{\nu+1}+2^\nu \nu!}{(2\nu)^\nu} = \frac{\nu}{2^\nu} + \frac{\nu!}{\nu^\nu}$ και $\frac{\nu}{2^\nu} < \frac{1}{\nu}$, $\frac{\nu!}{\nu^\nu} \leqslant \frac{1}{\nu}$ κτλ.

16. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 2.14. Θα βρείτε:

(i) $\lim \alpha_\nu = 0$, (ii) $\lim \alpha_\nu = \frac{5}{4}$.

17. (i) $\lim \alpha_\nu = \frac{2}{3}$, (ii) $\lim \alpha_\nu = 0$.

18. Παρατηρείστε ότι: $\mu - \frac{1}{\nu} < \alpha_\nu < M + \frac{1}{\nu}$ κτλ.

19. Εργαστείτε όπως στις εφαρμογές της § 2.16 (i) $\lim \alpha_\nu = 1$, (ii) $\lim \alpha_\nu = \frac{5}{6}$.

20. Αποδείξτε ότι: $\mu < \sqrt[\nu]{1^\nu + \ldots + \mu^\nu} < \mu\sqrt[\nu]{\mu}$ κτλ. ($\lim \alpha_\nu = \mu$).

21. Αποδείξτε ότι για το γενικό όρο α_ν ισχύει: $\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+\nu}} < \alpha_\nu < \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$ κλπ. ($\lim \alpha_\nu = 1$).

22. Εργαστείτε όπως στην § 2.17. $\lim \alpha_\nu = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$

23. Όπως στην άσκ. 22 ($\lim \alpha_\nu = 2$).

24. Ομοίως. $\lim \alpha_\nu = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

25. Εφαρμόστε την ιδιότητα 2 της § 2.18.

26. (i) $x < 0$, (ii) Δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

27. Αν $[x] = \nu \in \mathbb{N}^*$, τότε από την $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$ έπεται ότι $\nu \leqslant x < \nu+1$ κτλ.

28. Εφαρμόστε την ιδιότητα 1 της § 2.21.

29. (i) $x \in (-4, 2) \cup (3, 4)$, (ii) $x \in (\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\}$.

30. (i) Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: $x \leqslant 0$, $0 < x < 1$, $x \geqslant 1$

(ii) Είναι άμεση συνέπεια της (i).

31. Είναι $(1+\frac{2}{\nu})^\nu = \frac{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{1+\frac{1}{\nu+1}} (1+\frac{1}{\nu})^\nu$ κτλ.

32. (i) e, (ii) e, (iii) $\sqrt{e}$.

33. Να λάβετε υπόψη σας:

(i) Το παραδ. 2 της § 2.24 και την παρατ. 5 της § 2.25

(ii) Την παρατ. 5 της § 2.25 και την εφαρμ. 1 της § 2.26.

34. Εφαρμόστε τους ορισμούς των § 2.24 και 2.25.

35. Αν υποθέσετε ότι είναι φραγμένη άνω, καταλήγετε σε άτοπο.

36. (ii) Η (α_ν) δεν είναι αύξουσα.

37. (i) $+\infty$, (ii) $-\infty$, (iii) $+\infty$.

38. (i) Είναι $\lim (3\nu^2-\nu+1) = +\infty$ κτλ.

(ii), (iii) Να λάβετε υπόψη σας την παρατ. 2 της § 2.27.

39. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: $\alpha = 1$, $\alpha > 1$.

40. Παρατηρήστε ότι $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{1}{\lambda} < 1$.

41. (i) -2, (ii) $+\infty$, (iii) 0.

42. $+\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό και τα παραδείγματα της § 3.2.

2. Ομοίως, όπως στην άσκηση 1.

3. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό και τα παραδείγματα της § 3.3.

4. Ομοίως, όπως στην άσκηση 3.

5. Έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$.

6. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 3.3.

7. Να λάβετε υπόψη τις § 3.4 και 3.5

(i) $+\infty$, (ii) 1, (iii) $-\infty$, (iv) 1.

8. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

9. (i) $-\frac{1}{2}$, (ii) $-\infty$.

10. (i) $-\infty$, (ii) $+\infty$, (iii) $+\infty$.

11. (i) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, (ii) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$, (iii) $-\frac{1}{2}$, (iv) δεν υπάρχει, (v) 2.

12. (i) 0, (ii) -1, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $+\infty$.

13. Όριο είναι

(i) το $-\infty$, αν $0 \leqslant \mu < 1$
το $+\infty$, αν $\mu < 0$ ή $\mu > 1$
το 0, αν $\mu = 1$

(ii) το $+\infty$, αν $0 \leqslant \mu < 1$
το $-\infty$, αν $\mu < 0$ ή $\mu > 1$
το 0, αν $\mu = 1$

14. Όριο είναι

(i) το $+\infty$, αν $\mu > -1$
το $-\infty$, αν $\mu < -1$
το 1, αν $\mu = -1$

(ii) το $+\infty$, αν $\mu < 1$
το $-\infty$, αν $\mu > 1$
το -1, αν $\mu = 1$

15. (i) $y = x$, (ii) $y = 2x+3$, (iii) $y = x-1$ και $y = -x+1$.

16. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό και τα παραδείγματα της § 3.8.

17. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό της § 3.9.

18. Ομοίως, όπως στην άσκηση 17.

19. Να λάβετε υπόψη την § 3.11 και τα παραδείγματά της.

20. Αρκεί να εκλέξετε τα σημεία $x_1 = \frac{1}{2\nu\pi}$ και $x_2 = \frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$ κτλ.

21. (i) $\frac{8}{9}$, (ii) 6, (iii) 1, (iv) $\frac{1}{12}$, (v) 1.

22. (i) -1, (ii) $-\frac{1}{4}$

23. (i) 12, (ii) $\frac{1}{4}$, (iii) $\frac{1}{3}$, (iv) $\frac{1}{2}$

24. $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$, (ii) $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 4$, (iii) $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 4$.

25. (i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$,

(ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$,

(iii) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 0$.

26. Σύμφωνα με το θεώρημα 2 της § 3.12 και την § 3.13, είναι (i) $+\infty$, (ii) $-\infty$, (iii) $+\infty$.

27. (i) Ασυνεχής στο $x_0 = 1$, (ii) Συνεχής στο $x_0 = 0$, (iii) Συνεχής στο $x_0 = 2$,

(iv) Ασυνεχής στο $x_0 = 0$, (v) Ασυνεχής στο $x_0 = -5$.

28. (i) Συνεχής στο $\mathbb{R}$, (ii) Συνεχή στο $\mathbb{R}$, (iii) Συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

29. (i) Συνεχής στο $\mathbb{R}$-{-2}, (ii) Συνεχής στο $\mathbb{R}$-{4}, (iii) Συνεχής στο $\mathbb{R}$-{-1}.

30. Η f είναι συνεχής όταν $\alpha = -2$.

31. Η f είναι συνεχής όταν $\beta = 1$ και α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

32. (i) 1, (ii) 1, (iii) 1.

33. (i) Συνεχής στο $\mathbb{R}$. (ii) Συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

34. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.

35. $\lambda = \frac{\sqrt{2}-3}{7}$

36. (i) $\frac{5}{2}$, (ii) $\frac{\alpha}{\beta}$, (iii) $\frac{\alpha}{\beta}$, (iv) $\frac{1}{2}$, (v) -1.

37. Να πάρετε τις ακολουθίες $x_\nu = \frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$ και $x'_\nu = \frac{1}{2\nu\pi+\pi+\frac{\pi}{2}}$

38. (i) Συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, (ii) Ομοίως, όπως η (i).

39. Παρατηρήστε ότι η $\sqrt[[x]]{x}$ ορίζεται στο διάστημα $[1, +\infty)$ και είναι $\sqrt[[x]]{[x]} < \sqrt[[x]]{x} < \sqrt[[x]]{[x]+1}$.

40. (i) Συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \neq 0$ και ασυνεχής στο $x_0 = 0$

(ii) Συνεχής στο $\mathbb{R}$

(iii) Συνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$ και ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

41. Εφαρμόστε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

42. Είναι $f(0)\cdot f(1) < 0$ κτλ.

43. Να σχηματίσετε τη συνεχή συνάρτηση h με $h(x) = f(x)-g(x)$ και να εξετάσετε το πρόσημο του γινομένου $h(0)\cdot h(1)$.

44. (i) e, (ii) 1.

45. Παρατηρείστε ότι $\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\left(e^{x/2\alpha}\right)^{2\alpha}}{\left(x^{1/2}\right)^{2\alpha}} > \frac{\left(\frac{x}{2\alpha}\right)^{2\alpha}}{\left(x^{1/2}\right)^{2\alpha}}$ κτλ.

46. Εφαρμόστε τον ορισμό.

47. (i) Να λάβετε υπόψη ότι: για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x < x$ και $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln\left(x^{1/2}\right)^2}{x}$ κτλ.

(ii) Όπως η περίπτωση (i), (iii) 1, (iv) 2/3.

48. (i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$-{1}, (ii) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

49. (i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$-{1}, (ii) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*_+$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Εργαστείτε όπως στα πρδ. της § 4.4 (i) -3, (ii) $-\frac{4}{23}$

2. Να βρείτε τα $\lim_{x\to -5^-} \lambda(x)$, $\lim_{x\to -5^+} \lambda(x)$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -5$.

3. Ομοίως, όπως στην άσκηση 2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\lambda(x)$.

5. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\lambda(x)$.

6. Είναι $\lim_{x\to 0}\lambda(x) = +\infty$.

7. Είναι $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x\in(-\infty, 0) \\ 3, & \text{αν } x\in(0, +\infty) \end{cases}$

8. Είναι $f'(x) = 6x+6$ και $f''(x) = 6$.

9. (i) $y = -3(x+1)$, (ii) $x = 2$.

10. Η εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(2x_0, 0)$ και $B(0, \frac{2}{x_0})$.

$E_{AOB} = 2$.

11. Είναι $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$ αλλά $\lim_{x\to 4^+} \lambda(x) \neq \lim_{x\to 4^-} \lambda(x)$.

12. Ομοίως, όπως στην άσκηση 11.

13. (i) $y-27 = 27(x-3)$, (ii) $y = 0$, (iii) $y = x+\frac{1}{4}$, (iv) Δεν υπάρχει.

14. (i) $y = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, (ii) $y = -\frac{3}{2}x+5$

15. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A' = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

16. (i) $f'(-2) = -17$, (ii) $f'(1) = e$, (iii) $f'(-7) = -\frac{635}{49}$, (iv) $f'(1) = -\frac{1}{2}$

17. Να βρείτε τις $f'(0), f''(0), \ldots, f^{(5)}(0)$ κ.τ.λ.

18. (i) $f'(x) = 3x^2+2x$, (ii) $f'(x) = 8x^3+3x^2$, (iii) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2}$

(iv) $f'(x) = \frac{2x^3(x+1)(2x^3+x^2+3x+2)}{(x^2+1)^2}$, (v) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{2}{x^3}$, (vi) $f'(x) = e^x\ln x + xe^x\ln x + \frac{e^x}{x}$

19. (i) $f'(x) = -(2\eta\mu x+2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x)$ (ii) $f'(x) = 5\sigma\upsilon\nu 2x-1$ (iii) $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x(1+\varepsilon\varphi^2 x)}$

20. (i) $f'(x) = 2e^x\eta\mu x$, (ii) $f'(x) = \ln x$, (iii) $f'(x) = -\eta\mu x\ln x+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$, (iv) $f'(x) = \frac{e^x}{\eta\mu^2 x}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$.

21. Είναι $\lambda = 2x_0$ και το σημείο είναι το (2,5).

22. Είναι $\alpha = 3$ και $\beta = -5$.

23. Είναι $\lambda = 4$ και $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ή $\lambda = 0$ και $(x_0, y_0) = (-1, -3)$.

24. (i) Από το διώνυμο του Newton βρίσκετε τη σχέση $x(x+1)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} x^{k+1}$ κτλ.

(ii) Προκύπτει από την (i).

25. Να βρείτε την F΄ στο x_0 αφού λάβετε υπόψη ότι $F'(x_0) = 0$.

26. (i) $x\in\{-\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2+\sqrt{5}}\}$, (ii) $x\in\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}, 2\pi\}$, (iii) $x\in\{0, 2\}$.

27. Να βρείτε τις παραγώγους στο $x_0 = -2$ των f+g, f, g.

28. (i) $f'(x) = 16(2x+5)^7$, (ii) $f'(x) = 15(3x+1)^4 - \frac{10x}{(x^2+3)^6}$, (iii) $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$

(iv) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x-1}}$ (v) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$

29. (i) $f'(x) = -6ημ(2x+5)$, (ii) $f'(x) = 3ημ6x$, (iii) $f'(x) = 2συν(2x+3)+20xσυν^4(2x^2)$,
(iv) $f'(x) = -ημ2xσυν(συν^2x-ημ^2x)$.

30. (i) $f'(x) = \dfrac{3}{3x-1}$, (ii) $f'(x) = 15e^{3x}$, (iii) $f'(x) = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$, (iv) $f'(x) = e^{2x}(3ημx-συνx)$.

31. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

32. $f''(x) = k^2e^{kx}\,[g'(e^{kx})+e^{kx}\cdot g''(e^{kx})]$.

33. $y = x+\sqrt{29}$.

34. (i) Να δείξετε ότι: $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ και $f'(-x) = -f'(x)$
(ii) Να δείξετε ότι: $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\exists\, T\in\mathbb{R}^*$, $(x+T)\in\mathbb{R}$ και $f'(x) = f'(x+T)$.

35. Είναι $A = (2, 11) \cup (11, +\infty)$.

36. $f'(x) = (x^2+1)^x\left[\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right]$.

37. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της επαγωγής.

38. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της επαγωγής.

39. Τα πιθανά ακρότατα της f είναι στα σημεία $\dfrac{\pi}{2}$ και $\dfrac{3\pi}{2}$.

40. $x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{3}$

41. (i) Δεν είναι συνεχής στο [-1, 0], (ii) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο (-4, 0)
(iii) Είναι $f(4) \neq f(5)$, (iv) Είναι $f(-1) \neq f(1)$ ενώ υπάρχει $x\in[-1, 1]$ με $f'(x) = 0$.

42. Η περίπτωση (iv) της 40 με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δίνουν την απάντηση.

43. Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[-3, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 5]$, [5, 7] κτλ.

44. Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$, = 1, 2, ...(k-1), αν ρ_i, ρ_{i+1} είναι «διαδοχικές» ρίζες της $f(x) = 0$.

45. Να λάβετε υπόψη την § 3.10 και το θεώρημα Rolle.

46. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

47. (i) Να δείξετε ότι ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση F.

(ii) Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης επαληθεύεται για $x = c$ και $y = 0$.

48. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής.

49. Ομοίως, όπως η άσκηση 48.

50. Να εφαρμόσετε το θεώρημα της μέσης τιμής στις περιπτώσεις $x > 1$ και $0 < x < 1$.

51. Να εφαρμόσετε το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα [0, x].

52. Εφαρμόστε το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με $x_2 > x_1 > 0$.

53. (i) $\dfrac{x^6}{2}$, (ii) $-x^{-1}$, (iii) $3ημx$, (iv) $-\dfrac{2}{5}συνx$, (v) $3\ln x$, (vi) $\dfrac{3}{5}e^x$.

54. (i) $\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x$, (ii) $\dfrac{x^2}{2}-\ln x$, (iii) $x+ημx$
(iv) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}-2\sqrt{x}$, (v) e^{2x+1}, (vi) xe^x, (vii) $xσυνx$, (viii) $\dfrac{ημx}{x}$

55. $y = x^2-2$.

56. (i) $\dfrac{2}{5}$, (ii) $\dfrac{3}{2}$, (iii) 0, (iv) $\dfrac{1}{6}$, (v) 2, (vi) 2, (vii) 1, (viii) $+\infty$, (ix) 1.

57. (i) $\dfrac{1}{2}$, (ii) 0, (iii) 1, (iv) $+\infty$

58. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$

59. (i) 0, (ii) 0.

60. (i) 1, (ii) 1.

61. (i) Στο $(-\infty, 1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(1, +\infty)$ γνησίως φθίνουσα.
(ii) Στο $(-2, 0)\cup(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(-\infty, -2)\cup(0, 2)$ γνησίως φθίνουσα.
(iii) Στο (0, 1) η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(1, +\infty)$ γνησίως φθίνουσα.
(iv) Στο $(0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(-\infty, 0)$ γνησίως φθίνουσα.

62. (i) Στο $[0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
(ii) Στο $(0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και φθίνουσα στο (-1, 0].

63. (i) Τοπικό μέγιστο το f $\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$, τοπικό ελάχιστο το f $\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$
(ii) Τοπικά ελάχιστα τα $f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = 6$.

64. (i) Τοπικά μέγιστα τα $f(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = f(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 1$ και τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

(ii) Τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

(iii) Μέγιστη τιμή το $f(e) = \frac{1}{e}$

65. Για $\alpha = 5$ έχουμε τα τοπικά ελάχιστα $f(-1-\sqrt{2}) = -2{,}4$, $f(-1+\sqrt{2}) = 8{,}9$ και το τοπικό μέγιστο $f(-\frac{1}{2}) = 0$.

66. Να λάβετε υπόψη ότι $\ln x \leqslant x-1$.

67. (i) $f(0) = 1$ τοπικό μέγιστο, $f(\frac{4}{3}) = -\frac{5}{27}$ τοπικό μέγιστο.

(ii) $f(2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}) = 2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ τοπικό ελάχιστο

$f(2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}$ τοπικό μέγιστο.

(iii) $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ τοπικό ελάχιστο.

(iv) $f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{1/e}$ τοπικό ελάχιστο.

68. Το εμβαδό εκφράζεται ως συνάρτηση του ύψους $x \in (0, 2)$. Μέγιστο εμβαδό για $x = \sqrt{3}$ cm.

69. Να εκφράσετε τον όγκο ως συνάρτηση του ύψους y. Μέγιστος όγκος για $y = 2\sqrt{3}$ cm.

70. Εργαστείτε όπως στις προηγούμενες ασκήσεις.

71. Ελάχιστο κόστος $K(\frac{1}{2}) = 4800$.

72. Η ζητούμενη απόσταση είναι $\sqrt{(\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}$.

73. Να γράψετε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$

74. Να βρείτε το πρόσημο της f'' στα διαστήματα που αναφέρονται.

75. (i) Στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1, +\infty)$ και τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 1)$.

(ii) Στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2\kappa\pi+\pi, 2\kappa\pi+2\pi)$ και τα κοίλα κάτω στο $(2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\pi)$

(iii) Στρέφει τα κοίλα κάτω για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$.

76. Σημεία καμπής είναι: (i) το $x_0 = 0$, (ii) τα $x_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_0' = \sqrt{\frac{2}{3}}$

77. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 § 4.26.

78. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ και να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 § 4.26.

79. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 4.21.

80. Εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

81. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 4.26.

82. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 4.26 και να διακρίνετε τις περιπτώσεις:

$$\alpha\delta-\beta\gamma > 0, \quad \alpha\delta-\beta\gamma < 0$$

83. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 4.26.

84. Ομοίως.

85. Ομοίως.

85. Ομοίως.

86. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 4 της § 4.26.

87. Εργαστείτε ομοίως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. Εφαρμόστε τη σχέση 5 της § 5.3.

2. Ομοια με την άσκηση 1.

3. Εργαστείτε όπως στο παράδ. της § 5.4.

4. Βλ. § 5.5 και εφαρμογή 1 της § 5.4.

5. Βλ. § 5.5.

6. Βλ. § 5.6 και εφαρμογή 1 της § 5.4.

7. (i) Αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει διάστημα $(\gamma, \delta) \subseteq [\alpha, \beta]$ που περιέχεται το x_0, τέτοιο ώστε:

$$\forall\, x \in (\gamma, \delta), \quad f(x) > 0$$

(ii) Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής.

8. Βλ. § 5.9.

9. Βλ. § 5.9.

10. Βλ. § 5.9.

11. (i) $-\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{13}{8}$, (iii) $6-5\ln 3$, (iv) 150, (v) $-4\sqrt{3}$, (vi) $\frac{-3\sqrt[3]{4}+24}{10}$

12. (i) $\frac{\pi}{2}$, (ii) 14560 (iii) $\frac{1}{3}$, (iv) $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{4}$, (v) $\frac{1}{\alpha(\nu+1)}[(\alpha x^{\mu}+\beta)^{\nu+1}-\beta^{\nu+1}]$ (vi) $2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

13. (i) $\frac{4}{3}$, (ii) $\frac{1}{5}\left(\frac{e^5-1}{e}\right)$, (iii) $\ln|x+1|$, (iv) $-2\left[\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}-1\right]$.

14. (i) $\alpha=-1$, $\beta=1$ (ii) $\ln\frac{3}{2}$

15. (i) Είναι $συν^2x=\frac{1+συν2x}{2}$. Βρίσκουμε $\frac{\pi}{4}$

(ii) Να εκφραστεί το $ημ^4x$ με το συν2x. Βρίσκουμε $\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}$

16. (i) Να εκφράσετε το γινόμενο συνxημ3x ως άθροισμα ημιτόνων. Βρίσκουμε $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{2}$

17. (i) Είναι $εφ^2x=1+εφ^2x-1$. Βρίσκουμε $1-\frac{\pi}{4}$, (ii) $\frac{1}{2}$.

18. Είναι: $\forall\, t\in[0,1]\quad 0\leqslant t^{\nu}ημ(\pi t)<t^{\nu}$ κτλ.

19. $\gamma=\frac{1}{2}$.

20. $I+J=\frac{\pi}{32}$, $I-J=\frac{1}{24}$, $I=\frac{\pi}{64}+\frac{1}{48}$, $J=\frac{\pi}{64}-\frac{1}{48}$.

21. $\frac{1}{\nu+1}(2^{\nu+1}-1)$.

22. Εργαστείτε όπως στην εφαρ. της § 5.11. Θα βρείτε: (i) $\lim S_{\nu}=\ln 3$ και (ii) $\lim S_{\nu}=2$.

23. (i) $\frac{\pi}{2}-1$, (ii) $\frac{\pi^2+4}{16}$, (iii) $\frac{1}{4}(1-3e^{-2})$, (iv) $\frac{1}{3}(8\ln 2-\frac{7}{3})$

24. $I=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$.

25. (i) $\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha-(\beta-\alpha)$, (ii) Είναι $\int_1^{e^2}|f(x)|dx=\int_1^{e}(1-\ln x)dx+\int_e^{e^2}(\ln x-1)dx$.

Βρίσκουμε $2(e-1)$.

26. $I_{\nu}=e-\nu I_{\nu-1}$. Βρίσκουμε $I_4=3(3e-8)$.

27. (i) Θέτουμε $g(x)=1+4x^2$. Βρίσκουμε $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

(ii) Θέτουμε $g(x)=συνx$ και βρίσκουμε $\frac{1}{3}$.

(iii) $-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 2}$

(iv) Θέτουμε $x=ημt$. Βρίσκουμε $\frac{\pi}{2}$

28. Θέτουμε $g(t)=\frac{t}{\alpha}$ κτλ.

29. Να εφαρμόσετε την ιδιότητα Chasles και να λάβετε υπόψη την άσκηση 28.

30. Θέτουμε $g(t)=-t$ κτλ.

31. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) 2.

32. $19{,}5+\ln 4$

33. Διακρίνετε τις περιπτώσεις $\lambda\geqslant 1$, $0<\lambda\leqslant 1$.

34. 4.

35. $8\alpha^2\sqrt{3}$.

36. Από τη λύση του συστήματος $\begin{cases}x+y=2\\ y^2=x\end{cases}$ βρίσκουμε $\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$ ή $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Τελικά βρίσκουμε ότι το εμβαδό του χωρίου είναι $4\frac{1}{2}$

37. $V=\frac{4}{3}\pi\alpha\beta^2$.

38. $\begin{cases}y=x^2\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$ ή $\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$ Βρίσκουμε $V=2{,}9\,\pi$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελίδα	Στίχος	Αντί	Γράφε
13	3^-	$[\alpha_{\nu-1}, \beta_{\nu-1}] \subset [\alpha_\nu, \beta_\nu]$	$[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}] \subset [\alpha_\nu, \beta_\nu]$
20	8^-	$\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{2})$	$\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{4})$
35	2^+	$\frac{x+1}{x^2-x+1}$	$\frac{x+1}{x^2+x+1}$
35	5^-	$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{N}^*$
36	11^-	$\frac{x}{x+1}$	$\frac{x}{x-1}$
37	2^-	$f:\mathbb{R}-\{4\}$	$f:(-1, 1)$
47	7^+	§ 1.13	§ 1.14
68	1^+	α^x	α^x με $\alpha \neq 1$
81	2^+	άνω	κάτω
87	11^+	§ 2.25 εφαρμ. 2	§ 2.26 εφαρμ. 1
87	3^-	$\lim \frac{1+\sqrt{\nu}}{\nu^2}$	$\lim \frac{1+\sqrt{\nu}}{\nu^2} = 0$
89	10^+	$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \frac{3^2}{\alpha_\nu})$	$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \frac{2^2}{\alpha_\nu})$
90	11^-	συγκλίνει στο $+\infty$	έχει όριο το $+\infty$
90	8^-	$\alpha_\nu = 3\nu^2-\nu+1$	$\alpha_\nu = -3\nu^2+\nu-1$
108	4^-	$h \to -\infty$	$x \to -\infty$
115		στό σχήμα 8β να τεθεί το x_0	
120	4^+	σε περιοχή	σε μια περιοχή
127	12^-	$f_1(x+2)$	$(\chi+2)$
128	1^+	διαστήματος	συνόλου
128	2^+	**διάστημα**	**σύνολο**
129	6^-	$x \to x^-$	$x \to x_0^-$
131	3^-	να γραφτεί χωρίς το σύμβολο | | του απόλυτου και αντί (AM) να τεθεί $\lvert\overset{\frown}{AM}\rvert$	
144	Υποσημ.	$\alpha_\nu \neq 1$	$\alpha_\nu = 1$
149	2^-	$x \to 0$	$x \to 1$
155	3^+	$-+\infty$	$-\infty$
166	8^+	$\nu > 4$	$\nu \geqslant 4$
178	11^+	$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$	$\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'$
187	8^+	Να προστεθεί η φράση: «Είναι $f(\rho) = f(-\rho) = 0$»	
187	σχ. 10_β στον Ox΄	2 και 1	-2 και -1
190	1^+	$F(\alpha)$	$F(x)$
198	4^+	$g'(x)$	$\iota'(x)$
200	10^+	$x \to 0$	$x \to x_0$
205	7^-	Η ένδειξη «[λόγω της (1)]» να τεθεί στο στίχο 5^-	
212		Στην τελευταία γραμμή του πίνακα να τεθούν τα $-\infty$, $+\infty$ εκατέρωθεν της διπλής διαχωριστικής γραμμής.	
213		Να συμπληρωθεί η τελευταία γραμμή του πίνακα όπως προηγουμένως	

Σελίδα	Στίχος	Αντί	Γράφε
220	11^+	$c\in[\alpha, \beta]$	$c\notin[\alpha, \beta]$
221	11^+	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \frac{1+e^x}{x+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x+1}$
222	7^-	$f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$	$f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$
231		Στο σχήμα να τεθούν τα σημεία ξ_1 και $\eta_{\nu-1}$ μεταξύ των x_0, x_1 και y_ν, $y_{\nu-1}$ αντιστοίχως.	
235	9^+	$\int_\alpha^\beta (\chi)dx$	$\int_\alpha^\beta g(x)dx$
238		Η εφαρμογή 1 μεταφέρεται στο τέλος της § 5.11	
238	7^-	0	9
247	5^+	$\frac{1}{2} \;{}_0^{\pi/3}$	$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}$
247	8^+	$\frac{1}{2} \;{}_0^{\sqrt{3}/2}$	$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2}$

A

Στα αντίτυπα του βιβλίου που δεν υπάρχει η ένδειξη «δωρεάν», υπάρχει το παρακάτω βιβλιόσημο για απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που δεν έχει το βιβλιόσημο αυτό θεωρείται κλεψίτυπο και όποιος το διαθέτει, το πουλά ή το χρησιμοποιεί θα διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15)21 Μαρτίου 1946 (Εφ. Κυβ. 1946, Α΄ 108).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Κ.Α 459α ΕΚΔΟΣΗ Α΄ 1983 ΑΝΤΙΤΥΠΑ 45.000

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ Π. ΟΚΤΩΡΑΤΟΣ - ΚΛ. ΚΟΥΚΙΑΣ Ο.Ε.