ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Γενικά

3.1 Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάζοντας τη συμπεριφορά μιας ακολουθίας (α_ν) για «μεγάλες» τιμές του ν, ξεχωρίσαμε τις περιπτώσεις που η ακολουθία μπορεί να έχει όριο (πεπερασμένο ή άπειρο).

Έτσι π.χ. για την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{2\nu-3}{\nu}$ έχουμε $\lim\alpha_\nu = 2$. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές της (α_ν) «συσσωρεύονται» γύρω από το 2, που σημαίνει, όπως ξέρουμε, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της (α_ν) που αντιστοιχούν σε δείκτη μεγαλύτερο από ένα φυσικό ν_0 (που εξαρτάται από το ε) βρίσκονται στο διάστημα $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.

Ανάλογα φαινόμενα συναντάμε γενικότερα και στη συμπεριφορά συναρτήσεων για «μεγάλες» τιμές της μεταβλητής x. Ας θεωρήσουμε π.χ. τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2x-3}{x}$, της οποίας ο περιορισμός στο $\mathbb{N}^*$ είναι η προηγούμενη ακολουθία (α_ν) με όριο 2. Μπορούμε να ζητήσουμε, αν δοθεί οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$, με ποιες προϋποθέσεις θα έχουμε $f(x) \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, δηλαδή $|f(x)-2| < \varepsilon$.

Είναι:

$$
\begin{aligned}
|f(x)-2| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{2x-3}{x} - 2\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \left|-\frac{3}{x}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |x| > \frac{3}{\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow x > \frac{3}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad x < -\frac{3}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Άρα οι τιμές της f θα βρίσκονται στο διάστημα $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, όταν ο x είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{\varepsilon}$ ή μικρότερος του $-\frac{3}{\varepsilon}$. Μάλιστα όσο πιο μικρός είναι ο ε, δηλαδή, όσο πιο «κοντά» στο 2 θέλουμε τις τιμές f(x), τόσο πιο μεγάλο, κατ' απόλυτη τιμή, x πρέπει να πάρουμε.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε το 2 ως *όριο* της συνάρτησης f.

Εξάλλου, όπως και στις ακολουθίες με όριο +∞ ή -∞, μπορεί για κάθε $M > 0$ οι τιμές f(x) μιας συνάρτησης, για «μεγάλες» τιμές του x, να γίνονται μεγαλύτερες του M ή μικρότερες του -M.

Έστω π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^2$. Για να έχουμε

$$x^2 > M, \text{ αρκεί να πάρουμε } x > \sqrt{M}$$

Ακόμη για τις ίδιες τιμές του x οι αντίστοιχες τιμές της -f είναι μικρότερες του -M.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ως όριο της f το +∞ και της -f το -∞. Με αυτή την έννοια του «ορίου συνάρτησης» θα ασχοληθούμε στα επόμενα.

Όριο συνάρτησης στο +∞

3.2 Για να μελετήσουμε γενικά τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης f για μεγάλες τιμές της μεταβλητής x, είναι φυσικά απαραίτητο **το πεδίο ορισμού της να μην είναι φραγμένο άνω.**

Στα επόμενα θα θεωρούμε ειδικότερα συναρτήσεις των οποίων **το πεδίο ορισμού A περιέχει ένα διάστημα της μορφής (α, +∞).** Δηλαδή συναρτήσεις που ορίζονται σε κάθε $x > α$, όπως π.χ. οι συναρτήσεις που ορίζονται σε ολόκληρο το ℝ, εκτός, ίσως, από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του.

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε την έννοια του ορίου ακολουθίας με τον εξής ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού A δεν είναι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι** *η f έχει στο + ∞ όριο:*

ΣΗΜ: Όχι απαραίτητα $X_0 > 0$

- *το* $l \in \mathbb{R}$, **όταν για κάθε** $ε > 0$ **υπάρχει** $X_0 > 0$, **τέτοιο ώστε**

$$\forall x \in A, \quad x > X_0 \Rightarrow |f(x) - l| < ε \qquad (1)$$

- *το* + ∞, **όταν για κάθε** $M > 0$ **υπάρχει** $X_0 > 0$, **τέτοιο ώστε**

$$\forall x \in A, \quad x > X_0 \Rightarrow f(x) > M \qquad (2)$$

- *το* -∞, **όταν για κάθε** $M > 0$ **υπάρχει** $X_0 > 0$, **τέτοιο ώστε**

$$\forall x \in A, \quad x > X_0 \Rightarrow f(x) < -M \qquad (3)$$

$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}'$

Στην περίπτωση που η f είναι ακολουθία (A = ℕ) ο ορισμός αυτός καλύπτει τους ορισμούς των § 2.6, 2.24, και 2.25.

Επειδή (§ 1.5) ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$|f(x) - l| < ε \Leftrightarrow l-ε < f(x) < l+ε$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in (l-ε, l+ε)$$
$$f(x) > M \Leftrightarrow f(x) \in (M, +\infty)$$
$$f(x) < -M \Leftrightarrow f(x) \in (-\infty, -M)$$

από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

Η συνάρτηση f έχει στο +∞ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε διάστημα $Δ_L$ της μορφής

- $(L-ε, L+ε)$, αν $L \in \mathbb{R}$
- $(M, +\infty)$, αν $L = +\infty$
- $(-\infty, -M)$, αν $L = -\infty$

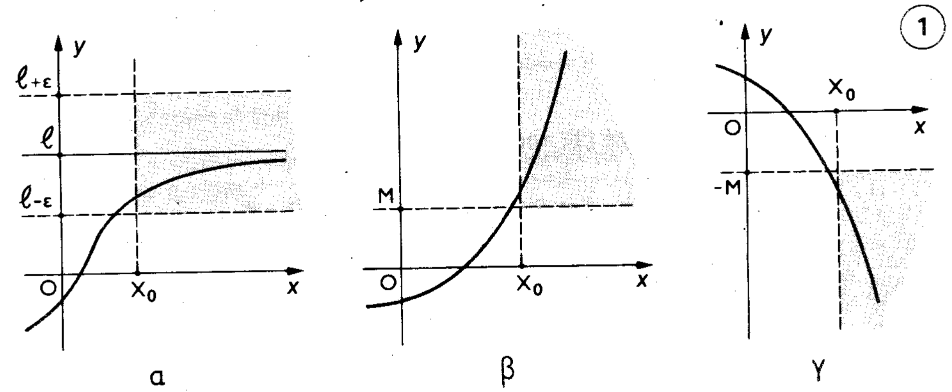
υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x > X_0$ *που ανήκει και στο A*, δηλαδή για κάθε $x \in (X_0, +\infty) \cap A$, να έχουμε $f(x) \in Δ_L$.

Τα παραπάνω εκφράζονται με ενιαία συντομευμένη διατύπωση ως εξής:

> *Η συνάρτηση f έχει στο +∞ όριο* $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, *αν και μόνο αν για κάθε διάστημα* $Δ_L$, *οι τιμές της* **σε μια περιοχή του** +∞ *ανήκουν όλες στο* $Δ_L$.

Στο σχήμα 1 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού αυτού. Αν π.χ. η f έχει στο +∞ όριο $l \in \mathbb{R}$, τα σημεία της γραφικής της παράστασης C που έχουν

1



τετμημένη $x > X_0$ βρίσκονται στο εσωτερικό της ταινίας που ορίζεται από τις παράλληλες $y = l-ε$ και $y = l+ε$. Έτσι τα σημεία με κοινή τετμημένη $x > X_0$

που βρίσκονται στη C και τη μεσοπαράλληλο $y = l$, απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ε. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η C πλησιάζει την ευθεία $y = l$ «όσο θέλουμε», δηλαδή λιγότερο από ένα αυθαίρετο (οσοδήποτε μικρό) $\varepsilon > 0$, αρκεί να θεωρήσουμε τα σημεία της με τετμημένη μεγαλύτερη από ένα κατάλληλο X_0 (που εξαρτάται από το ε). Γι αυτό η ευθεία

$$y = l$$

λέγεται **(οριζόντια) ασύμπτωτη** της C.

Στην περίπτωση ορίου $l \in \mathbb{R}$ αποδεικνύεται, όπως ακριβώς και στις ακολουθίες (§ 2.7), **η μοναδικότητα του ορίου.**

Εξάλλου, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό, οι περιπτώσεις που η συνάρτηση έχει όριο $l \in \mathbb{R}$ ή $+\infty$ ή $-\infty$, είναι ανά δύο ασυμβίβαστες, δηλαδή καθεμιά αποκλείει τις δυό άλλες.

Γενικά, για να δηλώσουμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, γράφουμε συμβολικά

$$\lim_{+\infty} f = L \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{ή} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$$

Ισοδύναμες με την έκφραση:

«η f έχει στο $+\infty$ όριο L»

είναι και οι:

«η f(x) τείνει στο L, όταν το x τείνει στο $+\infty$»

και *«η f(x) έχει όριο το L, όταν το x τείνει στο $+\infty$».*

Ειδικότερα, αν το όριο είναι ο πραγματικός αριθμός l χρησιμοποιείται και η έκφραση *«η f(x) συγκλίνει προς τον l, όταν το x τείνει στο $+\infty$».*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από τη συνεπαγωγή (1) προκύπτει ότι:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x)-l] = 0}$$

2. Επειδή: $|f(x)-l| < \varepsilon \Leftrightarrow |-f(x)-(-l)| < \varepsilon$

   από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = l \Leftrightarrow \lim_{+\infty}(-f) = -l}$$

Ομοίως επειδή: $f(x) > M \Leftrightarrow -f(x) < -M$ προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{+\infty}(-f) = -\infty}$$

3. Καθεμιά από τις συνεπαγωγές (1), (2), (3), αν ισχύει για ένα συγκεκριμένο $X_0 > 0$, θα ισχύει και για κάθε $X_0' > X_0$.

4. Έστω f_1 ο περιορισμός της f σ' ένα διάστημα $(\alpha, +\infty)$. Τότε:

   - Αν $\lim_{+\infty} f = L$ και είναι π.χ. $L \in \mathbb{R}$, η συνεπαγωγή (1) του ορισμού, που ισχύει για κάθε $x \in A$, θα ισχύει και για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$. Άρα $\lim_{+\infty} f_1 = L$.
   - Αντιστρόφως, αν $\lim_{+\infty} f_1 = L$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να εκλέγουμε το $X_0 \in (\alpha, +\infty)$, οπότε για κάθε $x > X_0$ ισχύει η $|f(x)-L| < \varepsilon$, άρα και η συνεπαγωγή (1) του ορισμού. Δηλαδή $\lim_{+\infty} f = L$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και όταν $L = +\infty$ (ή $-\infty$). Ώστε:

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = L \Leftrightarrow \lim_{+\infty} f_1 = L}$$

Έτσι, κατά την αναζήτηση του ορίου στο $+\infty$ μιας συνάρτησης f μπορούμε να περιοριζόμαστε σ' ένα διάστημα $(\alpha, +\infty)$, να υποθέτουμε δηλαδή $x > \alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το όριο στο $+\infty$ της σταθερής συνάρτησης u με τιμή c είναι το c, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $|u(x)-c| = 0 < \varepsilon$.

2. Οι συναρτήσεις x, x^2, x^3 και γενικά $x^k (k \in \mathbb{N}^*)$ έχουν στο $+\infty$ όριο $+\infty$.

   Η συνάρτηση x^k έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

   Έστω ένας οποιοσδήποτε $M > 0$. Τότε, περιορίζοντας τη συνάρτηση στο $\mathbb{R}_+$, δηλαδή για $x \geqslant 0$, έχουμε:

$$x^k > M \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{M}$$

   Έτσι, αν εκλέξουμε ως X_0 το $\sqrt[k]{M}$ (ή οποιοδήποτε μεγαλύτερό του) έχουμε

$$\forall x \in A, \quad x > X_0 \Rightarrow x^k > M$$

   που σημαίνει $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$

3. Επίσης οι συναρτήσεις $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ και γενικά $\frac{1}{x^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ έχουν στο $+\infty$ όριο 0.

Η συνάρτηση $\frac{1}{x^k}$ έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Έστω ένας οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^k} < \varepsilon \Leftrightarrow x^k > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$$

Έτσι, αν εκλέξουμε $X_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ έχουμε

$$\forall x \in A, \quad x > X_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon$$

που σημαίνει $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

4. Θα δείξουμε ότι είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-7}{x-3} = 2$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Έστω (ένας οποιοσδήποτε) $\varepsilon > 0$. Τότε για $x \in (3, +\infty)$ έχουμε:

$$\left|\frac{2x-7}{x-3} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{x-3}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x-3 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x > 3 + \frac{1}{\varepsilon}$$

Αν εκλέξουμε ως X_0 το $3+\frac{1}{\varepsilon}$ (ή οποιοδήποτε αριθμό μεγαλύτερό του), έχουμε

$$\forall x \in A, \quad x > X_0 \Rightarrow \left|\frac{2x-7}{x-3} - 2\right| < \varepsilon$$

που σημαίνει $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-7}{x-3} = 2$

5. Από την παρατήρηση 2 προκύπτει επίσης ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^k) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{x^k}) = 0$.

Ασκήσεις: 1, 2

Όριο συνάρτησης στο $-\infty$

3.3 Θεωρούμε τώρα συναρτήσεις που **το πεδίο ορισμού τους δεν είναι φραγμένο κάτω** και ειδικότερα συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους A περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$. Μπορούμε να ορίσουμε το όριο στο $-\infty$ μιας τέτοιας συνάρτησης, αρκεί στον ορισμό της § 3.2 να αντικαταστήσουμε την ανίσωση $x > X_0$ με την $x < -X_0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού A δεν είναι φραγμένο κάτω. Θα λέμε ότι** *η f έχει στο $-\infty$ όριο:*

- *το* $l \in \mathbb{R}$, **όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε**

$$\forall x \in A, \quad x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{4}$$

- *το* $+\infty$, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε**

$$\forall x \in A, \quad x < -X_0 \Rightarrow f(x) > M \tag{5}$$

- *το* $-\infty$, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε**

$$\forall x \in A, \quad x < -X_0 \Rightarrow f(x) < -M \tag{6}$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι:

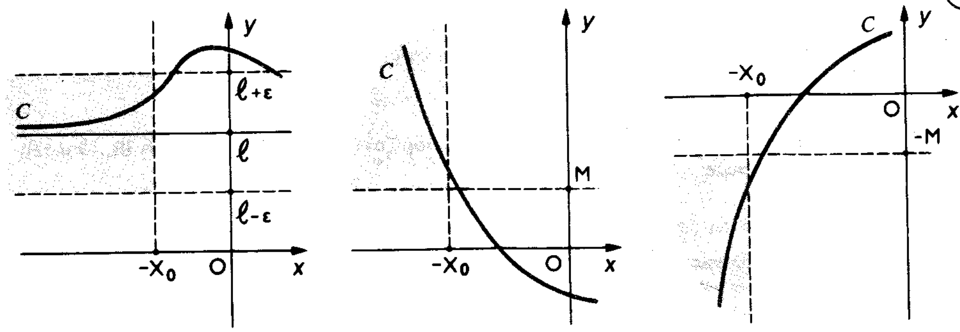
Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό διάστημα Δ_L υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x < -X_0$ *που ανήκει και στο A,* δηλαδή για κάθε $x \in (-\infty, -X_0) \cap A$, να έχουμε $f(x) \in \Delta_L$ ή συντομότερα:

> *Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε διάστημα Δ_L, οι τιμές της* **σε μια περιοχή του $-\infty$** *ανήκουν όλες στο Δ_L.*

Στο σχήμα 2 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορίου στο $-\infty$ μιας συνάρτησης f. Ειδικά στο σχήμα 2α η ευθεία $y = l$ είναι *(οριζόντια) ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f.

Όπως και στην περίπτωση του ορίου στο $+\infty$, αποδεικνύεται η μοναδικότητα και του ορίου στο $-\infty$.

2



α β γ

Για να δηλώσουμε ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ γράφουμε συμβολικά:

$$\lim_{-\infty} f = L \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{ή} \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} L$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για το όριο στο $-\infty$ μιας συνάρτησης f διατυπώνουμε ανάλογες παρατηρήσεις με εκείνες της § 3.2. Δηλαδή:

- Είναι

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-l] = 0 \\ \lim_{-\infty} f = l \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f) = -l \\ \lim_{-\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f) = -\infty \end{array}}$$

- Οι συνεπαγωγές (4), (5), (6) ισχύουν και όταν αντί $X_0 > 0$ πάρουμε $X_0' > X_0$.
- Αν f_1 είναι ο περιορισμός της f στο $(-\infty, \beta)$, τότε

$$\boxed{\lim_{-\infty} f = L \Leftrightarrow \lim_{-\infty} f_1 = L}$$

Έτσι, για την αναζήτηση του ορίου στο $-\infty$ μπορούμε να περιοριζόμαστε σ' ένα διάστημα $(-\infty, \beta)$, να υποθέτουμε δηλαδή $x < \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το όριο στο $-\infty$ της σταθερής συνάρτησης με τιμή c είναι το c.

2. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

   Έστω (ένας οποιοσδήποτε) $M > 0$. Τότε περιορίζοντας τη συνάρτηση στο $\mathbb{R}_-$, δηλαδή για $x \leqslant 0$, έχουμε:

$$x^2 > M \Leftrightarrow -x > \sqrt{M} \Leftrightarrow x < -\sqrt{M}$$

   Έτσι, αν εκλέξουμε ως X_0 το $\sqrt{M}$ (ή οποιοδήποτε μεγαλύτερό του), έχουμε:

$$\forall x \in A, \qquad x < -X_0 \Rightarrow x^2 > M$$

   που σημαίνει $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

   Γενικότερα ισχύει και αποδεικνύεται ομοίως ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2k} = +\infty \ (k \in \mathbb{N}^*)$$

3. Επίσης είναι $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

   Έστω $M > 0$. Τότε για $x < 0$ έχουμε

$$x^3 < -M \Leftrightarrow x < -\sqrt[3]{M}$$

   Έτσι, αν εκλέξουμε $X_0 \geqslant \sqrt[3]{M}$, τότε η $x^3 < -M$ θα ισχύει για κάθε $x < -X_0$, που σημαίνει $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

   Γενικότερα είναι

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty \ (k \in \mathbb{N})$$

4. Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ είναι $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

   Έστω (ένας οποιοσδήποτε) $\varepsilon > 0$. Τότε για $x < 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^k| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$$

$$\Leftrightarrow -x > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$$

   Αν εκλέξουμε ως X_0 το $\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ (ή οποιοδήποτε μεγαλύτερό του), τότε η $\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon$ θα ισχύει για κάθε $x < -X_0$, που σημαίνει ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να δειχτεί ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$**

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

   Έστω $M > 0$. Τότε για $x < 2$ έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-2} < -M \Leftrightarrow x^2 > -Mx+2M \Leftrightarrow x^2+Mx-2M > 0$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-M-\sqrt{M^2+8M}}{2} \quad \text{ή} \quad x > \frac{-M+\sqrt{M^2+8M}}{2}$$

   Περιορίζοντας τώρα τη συνάρτηση στο $\mathbb{R}_-$ και εκλέγοντας ως X_0 το $\frac{M+\sqrt{M^2+8M}}{2}$, θα έχουμε ότι η $\frac{x^2}{x-2} < -M$ θα ισχύει για κάθε $x < -X_0$, που σημαίνει ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$.

2. **Αν $g(x) = \frac{2x-|x-1|}{x}$ να βρεθούν τα όρια της $g(x)$ στο $+\infty$ και το $-\infty$.**

   Η g έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

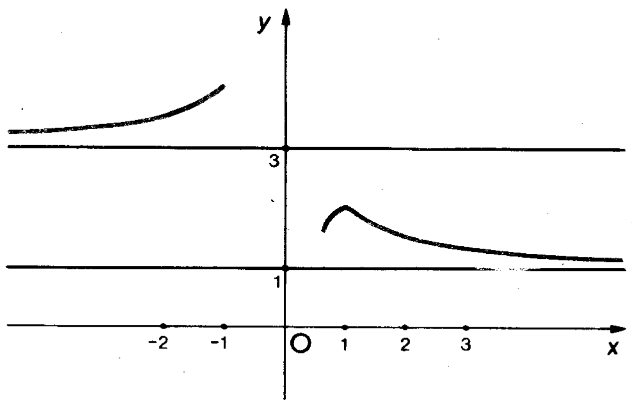
   Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• $x \geqslant 1$. Τότε έχουμε:

$$g(x) = \frac{2x-(x-1)}{x} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x) - 1 = \frac{1}{x}$$

Επειδή όμως (§ 3.2, πρδ. 3) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-1] = 0$, που σημαίνει $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

3



Έτσι η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g (σχ. 3).

• $x < 1$ και $x \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$g(x) = \frac{2x+(x-1)}{x} = \frac{3x-1}{x} = 3 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x)-3 = -\frac{1}{x}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x)-3] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 3$

Δηλαδή και η ευθεία $y = 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g (σχ. 3).

Ασκήσεις: 3, 4, 5, 6

Ιδιότητες ορίου

3.4 Όπως είδαμε ο ορισμός που δόθηκε στην § 3.2 για το όριο συνάρτησης στο $+\infty$ αποτελεί γενίκευση των ορισμών των § 2.6, 2.24 και 2.25 για το όριο ακολουθίας. Γι' αυτό ισχύουν, και αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο, οι ίδιες ιδιότητες των ορίων και για συναρτήσεις (στη θέση των ν, ν_0, α_ν θέτουμε x, x_0, $f(x)$ αντιστοίχως). Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε τα θεωρήματα των

ακολουθιών ώστε να ισχύουν και για συναρτήσεις που έχουν όριο στο $+\infty$ με την ακόλουθη διευκρίνιση:

Όταν σε θεώρημα ακολουθιών αναφέρεται ότι

«*υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $\nu > k$ η ακολουθία έχει μια ιδιότητα p*
(π.χ. είναι φραγμένη, έχει τιμές θετικές κτλ.)»

το αντίστοιχο θεώρημα για συναρτήσεις διατυπώνεται με την έκφραση ότι

«*σε μια περιοχή του $+\infty$ η συνάρτηση έχει την ιδιότητα p*»

που σημαίνει ακριβώς ότι

«υπάρχει $\alpha > 0$, τέτοιο ώστε ο περιορισμός της συνάρτησης στο $(\alpha, +\infty) \cap A$ έχει την ιδιότητα p»

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεώρημα ακολουθιών	**Θεώρημα συναρτήσεων**
Αν $\lim \alpha_\nu = 0$ **και** *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$, *τέτοιο ώστε για κάθε* $\nu > k$ **είναι:**	**Αν** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **και** *σε μια περιοχή του* $+\infty$ **είναι:**
• $\alpha_\nu > 0$, **τότε** $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = +\infty$	• $f(x) > 0$, **τότε** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
• $\alpha_\nu < 0$, **τότε** $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = -\infty$	• $f(x) < 0$, **τότε** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Εξάλλου ο ορισμός του ορίου στο $-\infty$ είναι εντελώς ανάλογος με εκείνον του ορίου στο $+\infty$.

Με την αντικατάσταση λοιπόν του $+\infty$ με $-\infty$ στις φράσεις «όριο στο $+\infty$» και «σε μια περιοχή του $+\infty$» έχουμε αντίστοιχα θεωρήματα για συναρτήσεις με όριο στο $-\infty$. Π.χ. το αντίστοιχο για όριο στο $-\infty$ του παραπάνω θεωρήματος είναι το εξής:

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ **και** *σε μια περιοχή του* $-\infty$ **είναι:**

• $f(x) > 0$, **τότε** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

• $f(x) < 0$, **τότε** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Το θεώρημα που αφορά πράξεις συναρτήσεων με όρια στο $+\infty$ πεπερασμένα διατυπώνεται ως εξής:

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A που δεν είναι φραγμένο άνω. Αν οι f, g έχουν στο $+\infty$ πεπερασμένα όρια, τότε:

(i) $\lim_{+\infty}(f+g) = \lim_{+\infty} f + \lim_{+\infty} g$

(ii) $\lim_{+\infty}(f\cdot g) = \lim_{+\infty} f \cdot \lim_{+\infty} g$

(iii) $\forall \lambda\in\mathbb{R}, \quad \lim_{+\infty}(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot\lim_{+\infty} f$

(iv) **Αν** $\lim_{+\infty} g \neq 0$, **τότε** $\lim_{+\infty}\frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{+\infty} g}$ **και** $\lim_{+\infty}\frac{f}{g} = \frac{\lim_{+\infty} f}{\lim_{+\infty} g}$

(v) **Αν** $\lim_{+\infty} f > 0$ **και** $k\in\mathbb{N}^*$, **τότε** $\lim_{+\infty}\sqrt[k]{f} = \sqrt[k]{\lim_{+\infty} f}$

Ανάλογη είναι η διατύπωση για πράξεις με συναρτήσεις που έχουν στο $-\infty$ πεπερασμένα όρια.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι προτάσεις (i) και (ii) επεκτείνονται επαγωγικά και για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων οι οποίες έχουν κοινό πεδίο ορισμού που δεν είναι φραγμένο άνω (κάτω).
2. Στην περίπτωση (iv), επειδή $\lim_{+\infty} g \neq 0$, σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $g(x) \neq 0$ και επομένως εκεί ορίζεται η $\frac{1}{g}$. Επίσης στην περίπτωση (v) σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $f(x) > 0$ και εκεί ορίζεται η $\sqrt[k]{f}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Επειδή $\frac{3x-2}{x} = 3 - \frac{2}{x} = 3 - 2\cdot\frac{1}{x}$, θα έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{x} = \lim_{x\to-\infty}(3-2\cdot\frac{1}{x}) = 3-\lim_{x\to-\infty}(2\cdot\frac{1}{x}) = 3-2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 3-2\cdot 0 = 3$$

2. Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})(4+\frac{5}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})\cdot\lim_{x\to+\infty}(4+\frac{5}{x^2}) = 1\cdot 4 = 4$ και ομοίως

$$\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})(4+\frac{5}{x^2}) = 4$$

3. Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{x} = 5$, θα έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x-1}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{x}} = \sqrt{5}$.

Εφαρμογή. Όριο ρητής συνάρτησης

3.5 Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το όριο στο $+\infty$ της μονωνυμικής συ-

νάρτησης αx^k ($k\in\mathbb{N}^*$) με $\alpha\neq 0$ είναι το $+\infty$, όταν $\alpha > 0$ και το $-\infty$, όταν $\alpha < 0$.

Πράγματι, έστω ένας οποιοσδήποτε $M > 0$. Τότε:

- Αν $\alpha > 0$, έχουμε για $x\in(0, +\infty)$

$$\alpha x^k > M \Leftrightarrow x^k > \frac{M}{\alpha} \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{M}{\alpha}}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^k) = +\infty$$

- Αν $\alpha < 0$, βρίσκουμε επίσης ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^k) = -\infty$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το όριο στο $-\infty$ της συνάρτησης αx^k ($k\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\neq 0$):

- Αν $\alpha > 0$, είναι $\begin{cases} +\infty, & \text{όταν } k \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{όταν } k \text{ περιττός} \end{cases}$
- Αν $\alpha < 0$, είναι $\begin{cases} -\infty, & \text{όταν } k \text{ άρτιος} \\ +\infty, & \text{όταν } k \text{ περιττός} \end{cases}$

Ας θεωρήσουμε τώρα την πολυωνυμική συνάρτηση P με

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu \neq 0$$

Έχουμε για $x\neq 0$

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu\left(1 + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x^\nu}\right)$$

Αλλά $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x^\nu}\right) = 1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\nu} = 1$

και συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty}P(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}P(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Δηλαδή:

Το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) του μεγιστοβάθμιου όρου της:

Εξάλλου η ρητή συνάρτηση Q με $Q(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_0}$ και $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, γράφεται για $x\neq 0$.

$$Q(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x^\nu}}{1 + \frac{\beta_{\mu-1}}{\beta_\mu}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\beta_0}{\beta_\mu}\cdot\frac{1}{x^\mu}}$$

και συνεπώς έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}, \qquad \lim_{x\to-\infty} Q(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$$

Δηλαδή:

Το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) κάθε ρητής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) του λόγου των μεγιστοβάθμιων όρων του αριθμητή και του παρονομαστή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι: $\lim_{x\to+\infty}(5x^3-12x+4) = \lim_{x\to+\infty}(5x^3) = +\infty$
2. Ομοίως είναι: $\lim_{x\to-\infty}(-3x^4+7x^2-2x) = \lim_{x\to-\infty}(-3x^4) = -\infty$
3. Επίσης είναι: $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-7x^3+6x-2}{-4x^2-5x+11} = \lim_{x\to-\infty}(-\dfrac{3}{4}x^3) = +\infty$

Πλάγια ασύμπτωτη

3.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-3}$$

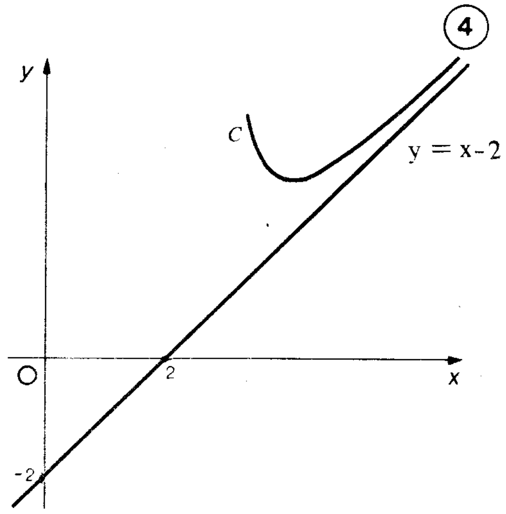
Έχουμε $f(x) = x - \dfrac{2x-7}{x-3}$ και συνεπώς

$$f(x)-x = -\frac{2x-7}{x-3}$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x-7}{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x} = 2$,

θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = -2$

ή $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = 0 \qquad (7)$



Ας δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία της (7). Θεωρούμε τη γραφική παράσταση C της f και την ευθεία με εξίσωση

$$y = x-2$$

Τότε τα σημεία με κοινή τετμημένη x που βρίσκονται στη C και την $y = x-2$ (σχ. 4), θα απέχουν μεταξύ τους $|f(x)-(x-2)|$. Αυτό σημαίνει, λόγω της (7),ότι η C πλησιάζει την ευθεία $y = x-2$ «όσο θέλουμε», δηλαδή λιγότερο από ένα αυθαίρετο $\varepsilon > 0$, αρκεί να θεωρήσουμε τα σημεία της με τετμημένη αρκετά μεγάλη. Γι αυτό η ευθεία $y = x-2$ λέγεται *(πλάγια) ασύμπτωτη της C*.

Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x+\beta$ λέγεται *(πλάγια) ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, όταν:**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0 \qquad (8)$$

Αν η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη, θα έχουμε π.χ. $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0$, δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \beta \qquad (9)$$

Τότε όμως,επειδή $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$,θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\lambda x}{x} = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

και συνεπώς $\qquad \lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - \lambda\right] = 0$

ή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \qquad (10)$$

Αντιστρόφως, αν ισχύουν οι (10) και (9), η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f (όταν υπάρχει), προσδιορίζεται από τα όρια στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ του λόγου $\dfrac{f(x)}{x}$ και της διαφοράς $f(x)-\lambda x$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το όριο στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ του λόγου $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι 0, οπότε $\lambda = 0$, τότε η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ γίνεται $y = \beta$. Συνεπώς το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει και για την εύρεση, αν υπάρχει, οριζόντιας ασύμπτωτης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρείτε, αν υπάρχουν, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+3}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2+x+3 είναι $\Delta = -11 < 0$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, τότε θα είναι

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x\to+\infty} [f(x)-\lambda x]$$

ή

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x\to-\infty} [f(x)-\lambda x]$$

- Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$, θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, δηλαδή $\lambda = 1$.

Τότε είναι

$$f(x)-x = \sqrt{x^2+x+3}-x = \frac{(\sqrt{x^2+x+3}-x)\,(\sqrt{x^2+x+3}+x)}{\sqrt{x^2+x+3}+x} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+x} = \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$

και συνεπώς $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \frac{1}{2}$, δηλαδή $\beta = \frac{1}{2}$

Άρα η ευθεία $y = x+\frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

- Για $x < 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x} = -\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

και συνεπώς $\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

Τότε είναι $f(x)+x = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}-x} = \frac{-1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$ και συνεπώς

$\beta = \lim_{x\to-\infty} [f(x)+x] = -\frac{1}{2}$

Άρα και η ευθεία $y = -x-\frac{1}{2}$ είναι επίσης ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Ασκήσεις: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

Γενικά

3.7 Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης όχι μόνο σε μια περιοχή του $+\infty$ ή του $-\infty$, αλλά και σε σημεία «γειτονικά» ενός $x_0 \in \mathbb{R}$ (όταν μάλιστα η συνάρτηση δεν ορίζεται στο ίδιο το x_0). Και στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται φαινόμενα όπως αυτά που είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους, δηλαδή «συσσώρευση» των τιμών της συνάρτησης σε διαστήματα με ακτίνα ε (οσοδήποτε μικρή) ή σε διαστήματα της μορφής $(M, +\infty)$ $(-\infty, -M)$ με $M > 0$. Θα το διαπιστώσουμε με τα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x-1$.

   Για σημεία «γειτονικά» π.χ. του 3, δηλαδή για σημεία $x \neq 3$ που ανήκουν στο διάστημα $(3-\delta, 3+\delta)$, έχουμε:

$$3-\delta < x < 3+\delta \Leftrightarrow 6-2\delta < 2x < 6+2\delta$$
$$\Leftrightarrow 5-2\delta < 2x-1 < 5+2\delta$$
$$\Leftrightarrow 5-2\delta < f(x) < 5+2\delta \Leftrightarrow |f(x)-5| < 2\delta$$

   Άρα οι τιμές της f συσσωρεύονται σε ένα διάστημα κέντρου 5 και μάλιστα τόσο πιο «κοντά» στο 5 όσο πιο κοντά στο 3 πάρουμε το x. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε το 5 ως *όριο* της f στο σημείο $x_0 = 3$.

2. Η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{1}{x^2}$ δεν ορίζεται στο 0. Αλλά «γύρω» από το 0 παίρνει τιμές θετικές και μεγαλύτερες από οποιοδήποτε συγκεκριμένο $M > 0$, αρκεί να πάρουμε το $|x| > \frac{1}{\sqrt{M}}$

   Εξάλλου για τις ίδιες τιμές του x οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης -g είναι μικρότερες του -M.

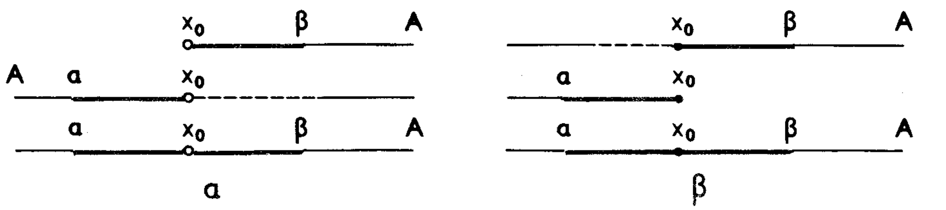
   Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε στο $x_0 = 0$ ως όριο της g το $+\infty$ και της -g το $-\infty$.

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

3.8 Η μελέτη μιας συνάρτησης f σε «γειτονικά» σημεία ενός $x_0 \in \mathbb{R}$ προϋποθέτει ότι στο πεδίο ορισμού της A υπάρχουν τέτοια σημεία, ανεξάρτητα αν το ίδιο το x_0 ανήκει ή όχι στο A. Αυτή η προϋπόθεση σημαίνει πιο συγκεκριμένα ότι:
σε κάθε ανοικτό διάστημα Δ_{x_0} κέντρου x_0 υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το x_0.

Αυτό συμβαίνει ειδικότερα, όταν το πεδίο ορισμού A περιέχει τουλάχιστο ένα ανοικτό διάστημα με άκρο x_0, πράγμα που σημαίνει ότι το A περιέχει οπωσδήποτε (σχ. 5α):

5



- ή ένα διάστημα της μορφής (x_0, β)
- ή ένα διάστημα της μορφής (α, x_0)
- ή ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Αν $x_0 \in A$, τα παραπάνω σύνολα (σχ. 5β) γίνονται αντιστοίχως $[x_0, \beta)$, $(\alpha, x_0]$ και (α, β).

Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και f μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού A περιέχει τουλάχιστο ένα ανοικτό διάστημα με άκρο x_0. Θα λέμε ότι** *η f έχει στο x_0 όριο:*

- *το* **$l \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε**
$$\forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \qquad (1)$$
- *το* **$+\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε**
$$\forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \qquad (2)$$
- *το* **$-\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε**
$$\forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M \qquad (3)$$

Επειδή:
$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \neq x_0 \text{ και } |x - x_0| < \delta$$
$$\Leftrightarrow x \neq x_0 \text{ και } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

Η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε διάστημα Δ_L υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ *που ανήκει και στο A,* δηλαδή για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, εκτός ίσως(1) από το x_0, έχουμε $f(x) \in \Delta_L$.

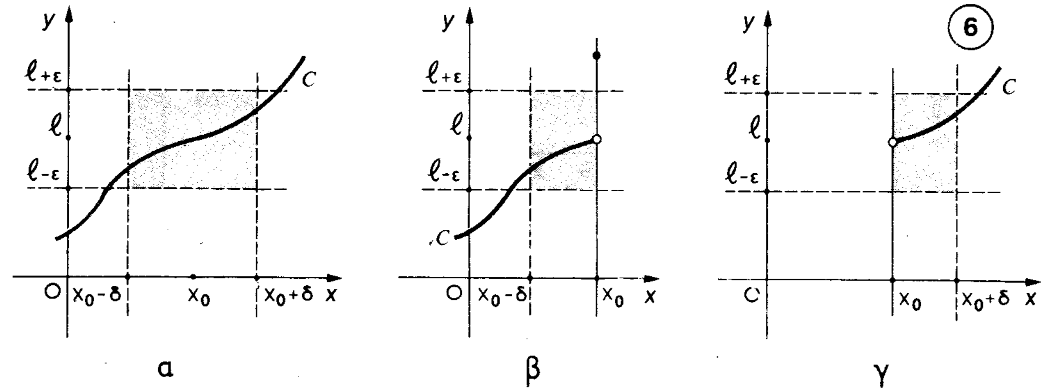
(1) Η εξαίρεση είναι περιττή, αν $x_0 \notin A$.

Τα παραπάνω εκφράζονται με συντομευμένη ενιαία διατύπωση ως εξής:

Η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε διάστημα Δ_L, οι τιμές της **σε μια περιοχή του x_0** *ανήκουν όλες στο Δ_L.*

Στο σχήμα 6 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω ορισμού στην περίπτωση που το όριο της f στο x_0 είναι $l \in \mathbb{R}$. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C της f με τετμημένη $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, εκτός ίσως εκείνου που αντιστοιχεί στο x_0, βρίσκονται στο ορθογώνιο που ορίζεται από την ταινία των ευθειών $y = l - \varepsilon$, $y = l + \varepsilon$ και την ταινία των ευθειών $x = x_0 - \delta$ και $x = x_0 + \delta$ (σχ. 6α).

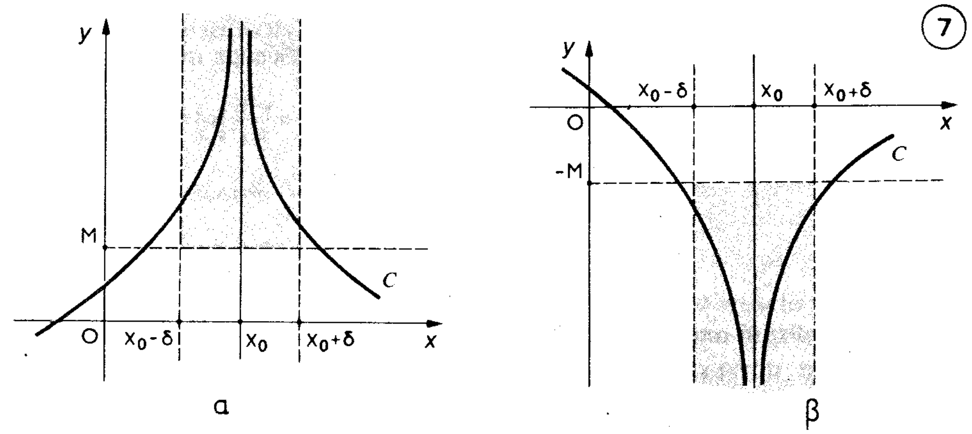
6



Ειδικότερα στο σχήμα 6β το ορθογώνιο περιορίζεται από τις ευθείες $x = x_0 - \delta$ και $x = x_0$, γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται στο διάστημα $(x_0, x_0 + \delta)$. Ανάλογη είναι η ερμηνεία του σχήματος 6γ.

Εξάλλου, αν η f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ ($-\infty$) τα σημεία της γραφικής της παράστασης με τεταγμένη $f(x) > M$ ($f(x) < -M$) βρίσκονται στο εσωτερικό της ταινίας των ευθειών $x = x_0 - \delta$ και $x = x_0 + \delta$ (σχήματα 7α και 7β). Τα σημεία αυτά απέχουν από την ευθεία $x = x_0$ λιγότερο από δ. Διαπιστώνουμε ότι η C πλησιά-

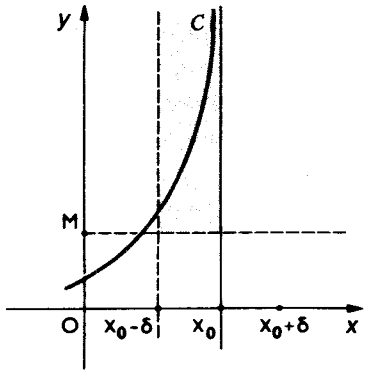
7



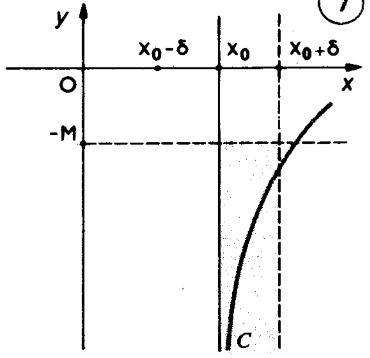
ζει την ευθεία $x = x_0$ όλο και «περισσότερο», αρκεί να θεωρήσουμε σημεία της με τεταγμένη μεγαλύτερη από ένα αρκετά μεγάλο $M > 0$ (μικρότερη του $-M$).

Ανάλογες καταστάσεις αισθητοποιούν και τα σχήματα 7γ και 7δ.

7



γ



δ

Στις περιπτώσεις του σχήματος 7 η ευθεία

$$x = x_0$$

λέγεται **(κατακόρυφη) ασύμπτωτη της $\mathcal{C}$**.

΄Οπως και στην περίπτωση ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$, αποδεικνύεται η μοναδικότητα και του ορίου στο x_0.

Για να δηλώσουμε ότι η f έχει στο x_0 όριο L, γράφουμε συμβολικά:

$$\lim_{x_0} f = L \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \text{ή} \qquad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} L$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ διατυπώνουμε ανάλογες παρατηρήσεις με εκείνες της § 3.2. Δηλαδή

- Είναι $$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-l] = 0$$
$$\lim_{x_0} f = l \Leftrightarrow \lim_{x_0}(-f) = -l$$
$$\lim_{x_0} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x_0}(-f) = -\infty$$
- Καθεμιά από τις συνεπαγωγές (1), (2), (3) του ορισμού, αν ισχύει για ένα συγκεκριμένο $\delta > 0$, θα ισχύει και για οποιοδήποτε θετικό $\delta' < \delta$.

- Αν f_1 είναι ο περιορισμός της f στην τομή του $A-\{x_0\}$ μ' ένα διάστημα κέντρου x_0, τότε

$$\lim_{x_0} f = L \Leftrightarrow \lim_{x_0} f_1 = L$$

΄Ετσι κατά την αναζήτηση του ορίου στο x_0 μπορούμε να περιοριζόμαστε στα σημεία $x \neq x_0$ του A που ανήκουν σ' ένα διάστημα κέντρου x_0.

΄Ενας τρόπος για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο l, είναι να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει $\theta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|f(x)-l| \leqslant \theta|x-x_0| \tag{4}$$

Πράγματι, έστω ένας οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε, αν εκλέξουμε $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{\theta}$, θα έχουμε

$$\forall x \in A, \quad 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{\theta} \Rightarrow \theta|x-x_0| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \qquad [\text{λόγω της (4)}]$$

που σημαίνει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το όριο στο x_0 της σταθερής συνάρτησης u με τιμή c είναι το c, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $|u(x)-c| = 0 < \varepsilon$.

2. Το όριο στο x_0 της ταυτοτικής συνάρτησης ι με $\iota(x) = x$ είναι το x_0. Πράγματι, έστω (ένας οποιοσδήποτε) $\varepsilon > 0$. Τότε

$$|\iota(x)-x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-x_0| < \varepsilon$$

΄Ετσι, αν εκλέξουμε ως δ το ε (ή οποιοσδήποτε μικρότερό του) έχουμε

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |\iota(x)-x_0| < \varepsilon$$

που σημαίνει $\lim\limits_{x\to x_0} \iota(x) = x_0$

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Η συνάρτηση $\frac{x^2-4}{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$.

΄Εστω $\varepsilon > 0$. Τότε για $x \neq 2$ έχουμε:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+2-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon$$

΄Ετσι, αν εκλέξουμε ως δ το ε (ή οποιοσδήποτε μικρότερό του), τότε η $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$ θα ισχύει για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ με $x \neq 2$, που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

4. Η συνάρτηση g με $g(x) = |x-1|+2x$ έχει στο $x_0 = 1$ όριο 2.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$|g(x)-2| = \big||x-1|+2x-2\big| = \big||x-1|+2(x-1)\big| \leqslant |x-1|+2|x-1| = 3|x-1|$$

Τότε, λόγω της (4), έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο 0.

Η f ορίζεται στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Δηλαδή η f είναι φραγμένη και συνεπώς δε μπορεί να έχει όριο $+\infty$ ή $-\infty$.

Έστω ότι η f έχει στο 0 όριο $l \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in (-\delta, \delta)-\{0\}$ να έχουμε

$$|f(x)-l| < \varepsilon$$

Έτσι όμως για $x > 0$ θα είναι

$$|1-l| < \varepsilon$$

ενώ για $x < 0$

$$|-1-l| < \varepsilon \Leftrightarrow |1+l| < \varepsilon$$

Τότε όμως θα έχουμε και

$$2\varepsilon > |1-l| + |1+l| \geqslant |1-l+1+l| = 2$$

Αλλά η σχέση αυτή δεν αληθεύει για κάθε $\varepsilon > 0$ (π.χ. για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ γίνεται $1 > 2$).

Άρα η f δεν έχει όριο στο 0.

Πλευρικά όρια συνάρτησης

3.9 Αν μια συνάρτηση f δεν έχει όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, δεν αποκλείεται να έχει στο x_0 όριο ο περιορισμός της σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ή της μορφής (α, x_0). Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο 0 (§ 3.8, εφαρ.). Αλλά ο περιορισμός f_1 της f στο $(0, +\infty)$ είναι η σταθερή συνάρ-

τηση με τιμή 1 και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$. Επίσης ο περιορισμός f_2 της f στο $(-\infty, 0)$ είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή -1 και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = -1$. Τα όρια των συναρτήσεων f_1 και f_2 στο 0 χαρακτηρίζονται αντιστοίχως ως *όριο από δεξιά* και *όριο από αριστερά της f στο 0*.

Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A.**

- **Αν το A περιέχει τουλάχιστο ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και ο περιορισμός f_1 της f στο (x_0, β) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 *όριο από δεξιά* το L.**
- **Αν το A περιέχει τουλάχιστο ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) και ο περιορισμός f_2 της f στο (α, x_0) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 *όριο από αριστερά* το L.**

Γράφουμε συμβολικά:

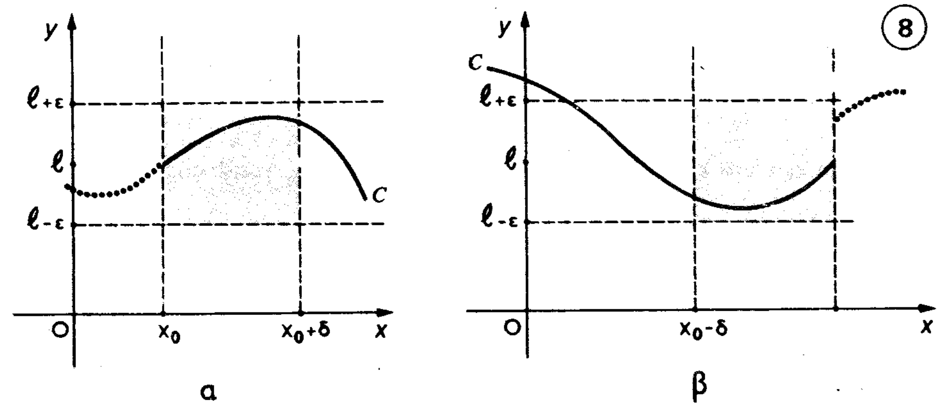
$\lim\limits_{x_0^+} f = L$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ ή $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$ για το όριο από δεξιά και

$\lim\limits_{x_0^-} f = L$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ ή $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$ για το όριο από αριστερά.

Τα «από δεξιά» και «από αριστερά» όρια μιας συνάρτησης χαρακτηρίζονται και ως «*πλευρικά όρια*».

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

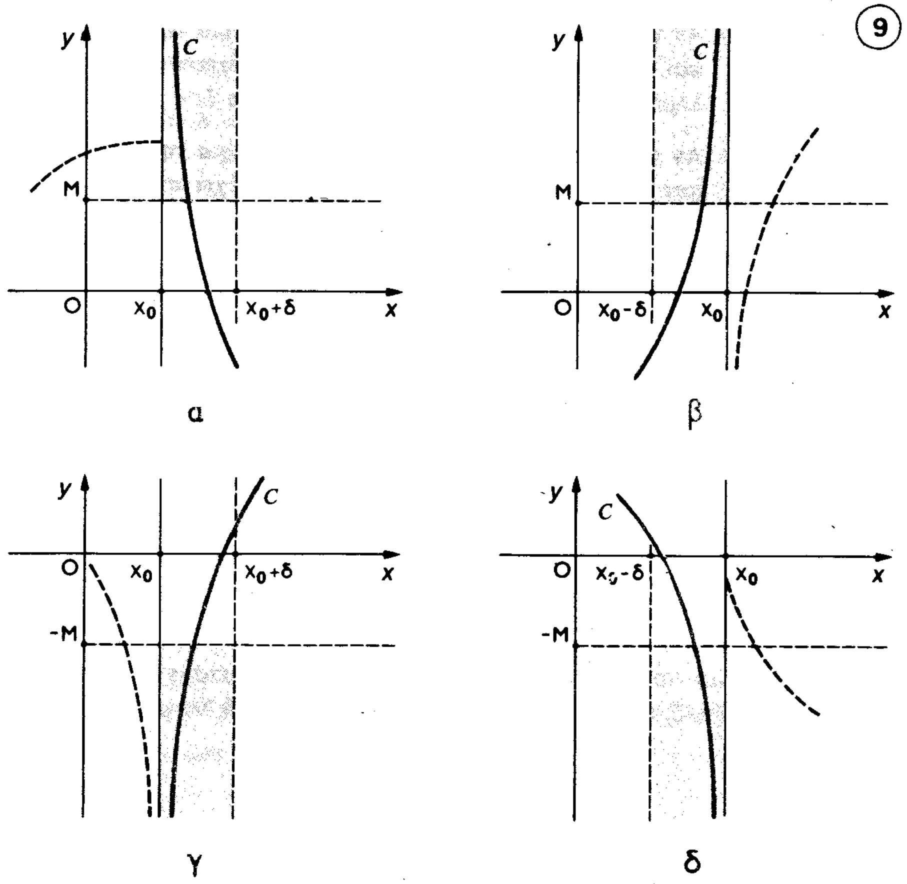
Αν η f δεν ορίζεται «αριστερά» του x_0, δηλαδή υπάρχει διάστημα της μορφής $(x_0-\delta, x_0)$ έξω από το A, δεν υπάρχει λόγος να μιλάμε για «όριο



από δεξιά στο x_0», αφού ως έννοια συμπίπτει με το «όριο στο x_0». Επίσης στην περίπτωση που η f δεν ορίζεται «δεξιά» του x_0, οι έννοιες «όριο από αριστερά στο x_0» και «όριο στο x_0» ταυτίζονται.

Στο σχήμα 8 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των πλευρικών ορίων της f στο x_0, όταν τα όρια αυτά είναι πεπερασμένα.

Επίσης στο σχήμα 9 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των πλευρικών ορίων στο x_0, όταν είναι $+\infty$ (σχ. 9α,β) ή $-\infty$ (σχ. 9γ,δ). Ειδικότερα στην περίπτωση αυτή



η ευθεία $x = x_0$ είναι επίσης (*κατακόρυφη*) *ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης της C γίνεται φανερό ότι η αναζήτησή της πρέπει να περιορίζεται στα σημεία $x_0 \in \mathbb{R}$ στα οποία η f δεν ορίζεται.

Σχετικά με τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω f μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού Α περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Η f έχει στο x_0 όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά της όρια στο x_0 και είναι ίσα με L.**

Απόδειξη. Αν $\lim\limits_{x_0} f = L$, τότε και ο περιορισμός της f στο διάστημα (x_0, β) ή (α, x_0) έχει επίσης όριο το L. Είναι δηλαδή

$$\lim_{x_0^+} f = L \qquad \text{και} \qquad \lim_{x_0^-} f = L \tag{4}$$

Αντιστρόφως, αν ισχύουν οι (4) και είναι π.χ. L πραγματικός, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$, τέτοια ώστε

$$\forall\, x \in (x_0, \beta), \quad 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall\, x \in (\alpha, x_0), \quad 0 < x_0 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Τότε, αν πάρουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ θα έχουμε

$$\forall\, x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x_0} f = L$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι το όριο στο 2 της συνάρτησης f με $f(x) = |x-2| + x$ είναι 2.**

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ο περιορισμός της f στο $(2, +\infty)$ είναι η συνάρτηση $f_1(x) = x - 2 + x = 2x - 2$ και το όριό της στο $x_0 = 2$ είναι 2.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$|f_1(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(2x-2) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Έτσι, αν εκλέξουμε $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, θα έχουμε

$$\forall\, x \in (2, +\infty), \quad 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - 2| < \varepsilon$$

που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x) = 2$.

Άρα θα έχουμε και $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$.

Επίσης ο περιορισμός της f στο $(-\infty, 2)$ είναι η σταθερή συνάρτηση $f_2(x) = -x + 2 + x = 2$ για την οποία είναι $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x) = 2$. Άρα θα έχουμε και $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, θα είναι και $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$.

2. **Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{αν } x \geqslant 1 \\ -x+4, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ έχει στο $x_0 = 1$ όριο 3.**

Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ο περιορισμός της g στο $(1,+\infty)$ είναι η συνάρτηση $g_1(x) = 3x$ καί βρίσκουμε εύκολα ότι είναι $\lim\limits_{x \to 1} g_1(x) = 3$.

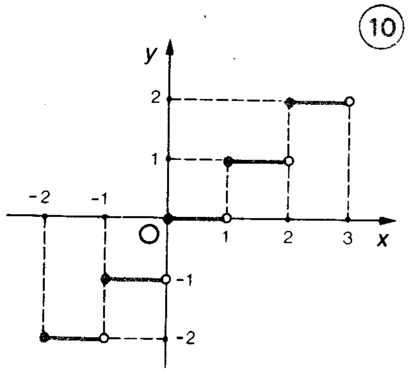
Άρα θα είναι και $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 3$.

Ομοίως ο περιορισμός της g στο $(-\infty, 1)$ είναι η συνάρτηση $g_2(x) = -x+4$ και είναι $\lim\limits_{x \to 1} g_2(x) = 3$.

Άρα είναι και $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 3$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 3$, θα έχουμε και $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$.

3. **Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση [x] δεν έχει όριο σε κανένα $x_0 \in \mathbb{Z}$.**



Πράγματι, η συνάρτηση [x] έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$. Ο περιορισμός της [x] στο (x_0, x_0+1) είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμές $[x_0]$ και συνεπώς

$$\lim_{x \to x_0^+} [x] = [x_0]$$

Ομοίως, ο περιορισμός της [x] στο (x_0-1, x_0) είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή $[x_0]-1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to x_0^-} [x] = [x_0]-1$

Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0^+} [x] \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} [x]$, η συνάρτηση [x] δεν έχει όριο στο x_0.

Ασκήσεις: 16, 17, 18

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΟΥ

Το όριο γενικά

3.10 Στα προηγούμενα δώσαμε τον ορισμό του ορίου μιας συνάρτησης στο $+\infty$, στο $-\infty$ και στο $x_0 \in \mathbb{R}$, γενικά δηλαδή σ' ένα σημείο $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Θα κάνουμε δυο βασικές παρατηρήσεις:

1. Προϋπόθεση για να έχει νόημα ένας τέτοιος ορισμός είναι η συνάρτηση να ορίζεται[1] σε σημεία «γειτονικά» του σ. Το σ λοιπόν δεν είναι «απομονωμένο» από το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι:

(1) Στο ίδιο το σ η συνάρτηση μπορεί να μην ορίζεται ή και αν ορίζεται δε μας ενδιαφέρει εδώ η τιμή της.

- Αν $\sigma \in \mathbb{R}$, σε κάθε διάστημα Δ_σ με **κέντρο** σ υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το σ.

- Αν $\sigma = +\infty$ $(-\infty)$ το A δεν είναι φραγμένο άνω (κάτω), που σημαίνει ότι και πάλι σε κάθε διάστημα Δ_σ με **άκρο** τώρα το σ, υπάρχουν σημεία του A.

Γενικά λοιπόν υποθέτουμε ότι σε κάθε τέτοιο διάστημα Δ_σ υπάρχουν σημεία του συνόλου A διαφορετικά από το σ. Είναι δηλαδή

$$(\Delta_\sigma \cap A) - \{\sigma\} \neq \varnothing$$

Το σημείο σ λέγεται **σημείο συσσωρεύσεως** του A. Συνεπώς:

Το όριο συνάρτησης έχει νόημα μόνο σε σημεία συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δεν έχει νόημα το όριο ακολουθίας στο $k \in \mathbb{N}$, γιατί το k δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathbb{N}$, αφού π.χ. το διάστημα $(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ δεν περιέχει άλλο, εκτός του k, στοιχείο του $\mathbb{N}$. Το μόνο σημείο συσσωρεύσεως του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$, γιατί σε κάθε διάστημα $(\alpha, +\infty)$ υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{N}$.

2. Όριο μιας συνάρτησης ορίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι σημείο ή άκρο διαστήματος που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της.

2. Όπως προκύπτει από τους ορισμούς των § 3.2, 3.3, 3.8 και 3.9 μια συνάρτηση f έχει στο σ (σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της A) όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν:

Για κάθε ανοικτό διάστημα Δ_L (με κέντρο L, αν $L \in \mathbb{R}$, ή με άκρο L, αν $L = +\infty$ ή $-\infty$), *οι τιμές της f* **σε μια περιοχή του σ** *ανήκουν όλες στο Δ_L*.

Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι:

Για κάθε ανοικτό διάστημα Δ_L υπάρχει αντίστοιχο διάστημα Δ_σ, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta_\sigma \cap A$, εκτός ίσως[1] του σ, να είναι $f(x) \in \Delta_L$.

(1) Η εξαίρεση είναι περιττή αν $\sigma \notin A$.

Γενικές ιδιότητες

3.11 Στα επόμενα θεωρούμε συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού A που έχουν όριο σ' ένα σημείο συσσωρεύσεως του A.

Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται η έκφραση «σε περιοχή του σ ισχύει η συνθήκη p», αυτό θα σημαίνει ότι υπάρχει διάστημα Δ_σ, τέτοιο ώστε η p ισχύει για κάθε x που ανήκει στο σύνολο

$$A_1 = \Delta_\sigma \cap A\text{-}\{\sigma\}$$

Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε **να περιορίζουμε τη συνάρτηση στο A_1**, αφού, όπως ξέρουμε (παρατηρήσεις § 3.2, 3.3 και 3.8), τα όρια παραμένουν αμετάβλητα.

Ύστερα από τις παραπάνω διευκρινίσεις οι γενικές ιδιότητες του ορίου των συναρτήσεων στο σ, διατυπώνονται ως εξής:

(Οι αποδείξεις, εντελώς ανάλογες με εκείνες που έγιναν στο κεφάλαιο 2, αφήνονται ως άσκηση).

1. Αν μια συνάρτηση f έχει στο σ όριο μηδέν και η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ, τότε η f·g έχει στο σ επίσης όριο μηδέν.

Η απόδειξη στην περίπτωση π.χ. $\sigma \in \mathbb{R}$ γίνεται ως εξής:

Αφού η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ, θα υπάρχει διάστημα Δ_σ κέντρου σ, άρα και το σύνολο $A_1 = \Delta_\sigma \cap A\text{-}\{\sigma\}$, καθώς και αριθμός $\varphi > 0$, τέτοια ώστε

$$\forall\, x \in A_1, \quad |g(x)| \leqslant \varphi \qquad (1)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\frac{\varepsilon}{\varphi} > 0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$, θα υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\forall\, x \in A_1, \quad 0 < |x-\sigma| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{\varphi}$$

$$\Rightarrow |f(x)|\,|g(x)| < \frac{\varepsilon}{\varphi}\cdot\varphi \qquad [\text{λόγω της } (1)]$$

$$\Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon$$

που σημαίνει $\lim\limits_{x\to\sigma}(f\cdot g)(x) = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\eta\mu x}{x}$, ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$, είναι γινόμενο της $\frac{1}{x}$ που έχει στο $+\infty$ όριο 0 με τη φραγμένη συνάρτηση ημx, θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

2. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f, g σε μια περιοχή του σ είναι $|g(x)| \leqslant |f(x)|$. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$, τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$

   Πράγματι για $x \in \mathbb{R}^*$, είναι $|x\eta\mu\frac{1}{x}| = |x|\,|\eta\mu\frac{1}{x}| \leqslant |x|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, θα έχουμε και

   $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0.$

2. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = 0$

   Πράγματι, για $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

   $$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

   Αλλά (§ 3.2, πρδ. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ και συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = 0$.

3. *Το κριτήριο μη σύγκλισης:* **Μια συνάρτηση f** *δεν έχει* **στο σ πεπερασμένο όριο**[1]**, αν** *υπάρχει* **$\varepsilon > 0$, ώστε σε** *κάθε* **διάστημα Δ_σ** *υπάρχουν* **x_1, x_2 τέτοια ώστε:**

$$|f(x_1)-f(x_2)| \geqslant \varepsilon$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ δεν έχει πεπερασμένο όριο στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$. Πράγματι, από κάθε διάστημα $(M, +\infty)$ εκλέγουμε σημεία της μορφής $x_1 = 2\nu\pi$ και $x_2 = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2}$ (αρκεί $\nu > \frac{M}{2\pi}$). Έτσι θα έχουμε $|f(x_1)-f(x_2)| = |0-1| = 1 \geqslant \varepsilon$ (αρκεί να

(1) Δηλαδή δεν έχει όριο ή έχει το $+\infty$ ή το $-\infty$

εκλέξουμε $\varepsilon \leqslant 1$, π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Άρα η f δεν έχει πεπερασμένο όριο στο $+\infty$.

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για το όριο στο $-\infty$.

---

4. Αν μια συνάρτηση έχει στο σ πεπερασμένο όριο *l*, τότε είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, π.χ. $\varepsilon = 1$. Τότε υπάρχει διάστημα Δ_σ, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap \Delta_\sigma$, εκτός ίσως του σ, να έχουμε $|f(x)-l| < 1$ ή ισοδύναμα

$$l-1 < f(x) < l+1$$

---

5. Αν μια συνάρτηση f έχει στο σ:

- **πεπερασμένο όριο, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)|$**
- **όριο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)| = +\infty$**

6. Έστω ότι μια συνάρτηση f έχει στο σ όριο $\neq 0$. Τότε σε μια περιοχή του σ οι τιμές της f έχουν το πρόσημο του ορίου της[1].

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν σ' ένα διάστημα Δ_σ οι τιμές της f είναι θετικές (αρνητικές) και υπάρχει στο σ το όριό της, τότε το όριο αυτό αποκλείεται να είναι αρνητικό (θετικό), αλλά δεν αποκλείεται να είναι 0. Π.χ. οι τιμές της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι θετικές, αλλά το όριό της στο $+\infty$ είναι 0.

2. Αν το όριο στο σ μιας συνάρτησης f είναι $l \in \mathbb{R}^*$, τότε όχι μόνο η f αλλά και η $\frac{1}{f}$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ.

   Πράγματι, αποδεικνύεται (§ 2.11) ότι υπάρχει διάστημα Δ_σ τέτοιο ώστε

$$\frac{|l|}{2} < |f(x)| < \frac{3|l|}{2}$$

Ασκήσεις: 19, 20

(1) Για την ενιαία διατύπωση της ιδιότητας αυτής θεωρούμε ως πρόσημο του $+\infty$ το + και του $-\infty$ το -.

Όρια και πράξεις

3.12 Τα θεωρήματα που συσχετίζουν όρια καί πράξεις συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

---

1. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν στο σ πεπερασμένα όρια. Τότε:

(i) $\lim\limits_{\sigma}(f+g) = \lim\limits_{\sigma} f + \lim\limits_{\sigma} g$

(ii) $\lim\limits_{\sigma}(f\cdot g) = (\lim\limits_{\sigma} f)\cdot(\lim\limits_{\sigma} g)$

(iii) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{\sigma}(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot\lim\limits_{\sigma} f$

(iv) Αν $\lim\limits_{\sigma} g \neq 0$, τότε $\lim\limits_{\sigma}\frac{1}{g} = \frac{1}{\lim\limits_{\sigma} g}$, $\lim\limits_{\sigma}\frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{\sigma} f}{\lim\limits_{\sigma} g}$

(v) Αν $\lim\limits_{\sigma} f > 0$ και $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $\lim\limits_{\sigma}\sqrt[k]{f} = \sqrt[k]{\lim\limits_{\sigma} f}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι προτάσεις (i) και (ii) επεκτείνονται επαγωγικά και για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το όριο στο 2 της συνάρτησης f με

$$f(x) = 2x^3-7x+\sqrt{2x-1}$$

Επειδή: $2x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$, το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [\frac{1}{2}, +\infty)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to2}(2x^3) = 2\lim\limits_{x\to2}(x\cdot x\cdot x) = 2\cdot 2^3 = 16$,

$\lim\limits_{x\to2}(7x) = 7\cdot 2 = 14$

και $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{2x-1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to2}(2x-1)} = \sqrt{3}$.

Συνεπώς θα είναι

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2}(2x^3)-\lim_{x\to2}(7x)+\lim_{x\to2}\sqrt{2x-1} = 16-14+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$$

2. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει στο σ όριο + ∞. Τότε:

I. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη κάτω σε μια περιοχή του σ, θα είναι

$$\lim_{\sigma}(f+g) = +\infty$$

II. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη κάτω σε μια περιοχή του σ από θετικό αριθμό, θα είναι

$$\lim_{\sigma}(f\cdot g) = +\infty$$

III. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη άνω σε μια περιοχή του σ από αρνητικό αριθμό, θα είναι

$$\lim_{\sigma}(f\cdot g) = -\infty$$

Ανάλογη διατύπωση γίνεται στην περίπτωση που η f έχει στο σ όριο -∞.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει ειδικότερα, αν η g έχει στο σ όριο L, και συγκεκριμένα

- Η περίπτωση I, όταν $L \neq -\infty$
- Η περίπτωση II, όταν $L > 0$ ή $L = +\infty$
- Η περίπτωση III, όταν $L < 0$ ή $L = -\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\lim_{x\to+\infty}(2\text{-συν}x+x^2) = +\infty$. Πράγματι, το $2\text{-συν}x+x^2$ είναι το άθροισμα των τιμών στο x των συναρτήσεων f με $f(x) = x^2$ και g με $g(x) = 2\text{-συν}x$. Η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο $+\infty$, ενώ η g είναι κάτω φραγμένη από το 1, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $1 \leqslant 2\text{-συν}x$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 2, θα είναι $\lim_{x\to+\infty}(2\text{-συν}x+x^2) = +\infty$.

2. Επίσης είναι $\lim_{x\to-\infty} x(\text{ημ}^2x-2) = +\infty$. Πράγματι, το $x(\text{ημ}^2x-2)$ είναι το γινόμενο των τιμών στο x των συναρτήσεων f με $f(x) = x$ και g με $g(x) = \text{ημ}^2x-2$. Η f έχει στο $-\infty$ όριο $-\infty$, ενώ η g είναι άνω φραγμένη από το -1, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\text{ημ}^2x-2 \leqslant -1$. Άρα θα είναι $\lim_{x\to-\infty} x(\text{ημ}^2x-2) = +\infty$.

3. (i) Αν $\lim_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to\sigma}\dfrac{1}{f(x)} = 0$

(ii) Αν $\lim_{x\to\sigma} f(x) = 0$, και σε μια περιοχή του σ είναι:

- **$f(x) > 0$, τότε $\lim_{x\to\sigma}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$**
- **$f(x) < 0$, τότε $\lim_{x\to\sigma}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty$**

Αν στον πίνακα της § 2.29 θέσουμε αντί α_ν και β_ν τις συναρτήσεις f και g αντιστοίχως, τότε θα έχουμε αντίστοιχο ανακεφαλαιωτικό πίνακα για τα θεωρήματα 1, 2 και 3.

Όρια και διάταξη

3.13 Σχετικά με το όριο συναρτήσεων στο σ ισχύουν και οι επόμενες προτάσεις που είναι ανάλογες με αντίστοιχες προτάσεις που αφορούν τη σύγκλιση, διάταξη και μονοτονία των ακολουθιών.

1. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f και g σε μια περιοχή του σ είναι $f(x) \leqslant g(x)$.

- **Αν οι f και g έχουν στο σ πεπερασμένα όρια, τότε $\lim_{x\to\sigma} f(x) \leqslant \lim_{x\to\sigma} g(x)$.**
- **Αν $\lim_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$.**
- **Αν $\lim_{x\to\sigma} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to\sigma} f(x) = -\infty$.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επειδή (§ 1.3) $x-1 < [x]$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$.

Ομοίως, επειδή $[x] \leqslant x$, θα έχουμε $\lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$.

2. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f, t, g σε μια περιοχή του σ είναι

$$f(x) \leqslant t(x) \leqslant g(x)$$

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο σ όριο $l\in\mathbb{R}$, τότε και η t έχει στο σ όριο l.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση P με**

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0$$

όπου $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_\nu \in \mathbb{R}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχτεί ότι

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$ έχουμε (§ 3.12, 1)

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha_k x^k) = \alpha_k \lim_{x\to x_0}(\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{k \text{ παράγοντες}}) = \alpha_k x_0^k$$

Τότε θα έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \dots + \lim_{x\to x_0}(\alpha_1 x) + \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0)$$

2. **Αν τα πολυώνυμα $P_1(x)$ και $P_2(x)$ έχουν κοινή ρίζα ρ, να βρεθεί το όριο στο ρ (ή ρ^+ ή ρ^-) της συνάρτησης $\frac{P_1}{P_2}$**

Επειδή $\lim_{x\to\rho}P_1(x) = P_1(\rho) = 0$ και $\lim_{x\to\rho}P_2(x) = P_2(\rho) = 0$, είναι φανερό ότι δε μπορούμε να εφαρμόσουμε, για το όριο στο ρ, τα θεωρήματα 1,iv ή 3,ii της § 3.12.

Έχουμε όμως $P_1(x) = (x-\rho)Q_1(x)$ και $P_2(x) = (x-\rho)Q_2(x)$ και συνεπώς για $x \neq \rho$,

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- **$Q_2(\rho) \neq 0$.** Τότε $\lim_{x\to\rho}\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim_{x\to\rho}\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{\lim_{x\to\rho}Q_1(x)}{\lim_{x\to\rho}Q_2(\rho)} = \frac{Q_1(\rho)}{Q_2(\rho)}$

- **$Q_1(\rho) = Q_2(\rho) = 0$.** Τότε εργαζόμαστε με τις συναρτήσεις Q_1 και Q_2 όπως αρχικά με τις P_1 και P_2.

- **$Q_1(\rho) \neq 0$ και $Q_2(\rho) = 0$.** Τότε $\lim_{x\to\rho}\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim_{x\to\rho}\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = +\infty$ ή $-\infty$

Π.χ. επειδή για $x \neq 2$, $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$, θα είναι

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-3} = -4$$

Επίσης για $x \neq 1$, έχουμε $\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}$.

Επειδή $\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x-2} = -3$, $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$ και $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$, θα έχουμε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2(x-2)} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2(x-2)} = +\infty.$$

Ασκήσεις: 21, 22, 23, 24, 25, 26

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνεχής συνάρτηση

3.14 Είδαμε ότι μια συνάρτηση f που έχει όριο σ' ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται στο σημείο αυτό, και αν ορίζεται, η τιμή της $f(x_0)$ μπορεί να διαφέρει από το $\lim_{x_0} f$. Όμως σε πολλές περιπτώσεις το όριο και η τιμή τής f στο x_0 συμπίπτουν, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

Π.χ. αν $f(x) = 2x-5$, είναι $\lim_{x\to3}f(x) = \lim_{x\to3}(2x-5) = 1 = f(3)$.

Εξάλλου η συνάρτηση f_1 με $f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}-\{2\}$ και είναι

$$\lim_{x\to2}f_1(x) = \lim_{x\to2}(x+2) = 4$$

Έτσι, αν f είναι μια επέκταση στο $\mathbb{R}$ της f_1 με π.χ. $f(2) = 5$, θα έχουμε

$$\lim_{x\to2}f(x) = \lim_{x\to2}f_1(x) = 4 \neq f(2)$$

Στην περίπτωση που ισχύει η (1) η συνάρτηση f χαρακτηρίζεται ως *συνεχής στο* x_0.

Για να έχουν νόημα τα μέλη της (1), στα επόμενα θεωρούμε συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού περιέχει ένα *διάστημα* Δ με $x_0 \in \Delta$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να περιορίζουμε τις συναρτήσεις στο Δ. Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ, λέγεται *συνεχής στο $x_0 \in \Delta$*, όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός διαστήματος, τότε λέγεται **συνεχής στο διάστημα αυτό.**

Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta$ με $x \neq x_0$

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

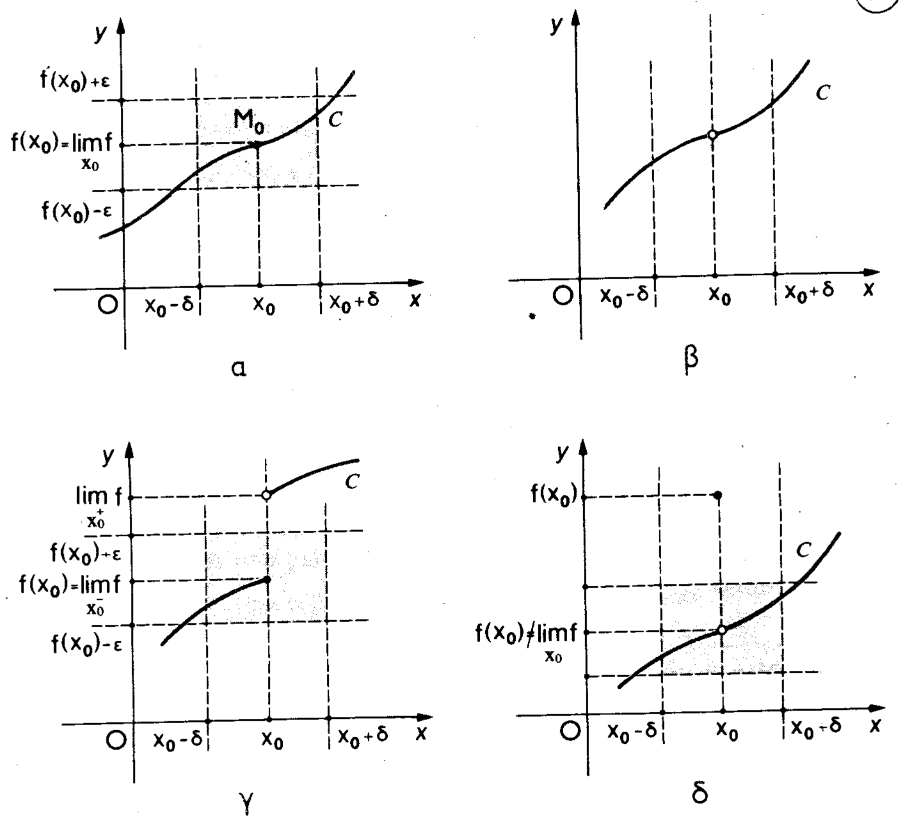
Η συνεπαγωγή όμως αυτή αληθεύει και όταν $x = x_0$.

Ώστε: **Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:**

$$\forall\, x \in \Delta, \quad |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

Έστω C η γραφική παράσταση της συνεχούς στο x_0 συνάρτησης f (σχ. 11).

11



Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζεται το ορθογώνιο των ευθειών $y = f(x_0)-\varepsilon$, $y = f(x_0)+\varepsilon$ και $x = x_0-\delta$, $x = x_0+\delta$. Σε κάθε τέτοιο ορθογώνιο (για οσοδήποτε μικρό ε) βρίσκονται, όχι μόνο το σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$, αλλά και άλλα «γειτονικά» του σημεία: όλα όσα έχουν τετμημένες στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Έτσι η C δε μπορεί να διακόπτεται στο σημείο M_0, είναι λοιπόν μια γραμμή «συνεχής» στο M_0 (σχ. 11α).

Όταν δεν ισχύει η $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή στις περιπτώσεις που:

- δεν υπάρχει το $f(x_0)$, δηλαδή η f δεν ορίζεται στο x_0
- δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- υπάρχουν και τα δύο, αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους

τότε η f λέγεται **ασυνεχής στο x_0** (σχ. 11 β,γ,δ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η σταθερή συνάρτηση u με $u(x) = c$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ (§ 3.8, πρδ. 1) είναι $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = c = u(x_0)$.
2. Ομοίως η ταυτοτική συνάρτηση ι με $\iota(x) = x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι (§ 3.8, πρδ. 2) είναι $\lim\limits_{x \to x_0} \iota(x) = x_0 = \iota(x_0)$.
3. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι και η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2+1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

   Πράγματι είναι $\lim\limits_{x \to x_0} (3x^2+1) = \lim\limits_{x \to x_0} (3x^2)+1 = 3x_0^2+1 = f(x_0)$

Ασκήσεις: 27, 28

Πλευρική συνέχεια

3.15 Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο $x_0 \in A$ και είναι:

- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, τότε η f λέγεται **συνεχής από δεξιά στο x_0.**
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, τότε η f λέγεται συνεχής **από αριστερά στο x_0.**

Π.χ. η συνάρτηση [x] είναι συνεχής από δεξιά σε κάθε $x_0 \in \mathbb{Z}$ (§ 3.9, εφαρ. 3), ενώ δεν είναι συνεχής από αριστερά στο x_0.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος της § 3.9 είναι ότι:

Μια συνάρτηση f ορισμένη στο $x_0 \in A$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, αν και μόνο αν είναι συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{3|x-1|}{2}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Η f ορίζεται στο $x_0 = 1$ και είναι $f(1) = 0$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3|x-1|}{2} = 0$.

Πράγματι, για $x \geqslant 1$ έχουμε $f(x) = \dfrac{3(x-1)}{2}$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$.

Δηλαδή η f είναι συνεχής από δεξιά στο 1.

Ομοίως για $x < 1$ έχουμε $f(x) = \dfrac{-3(x-1)}{2}$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$.

Δηλαδή η f είναι συνεχής από αριστερά στο 1.

Άρα σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Συνέχεια και πράξεις

3.16 Σχετικά με τις πράξεις συνεχών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g ορίζονται σ' ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$ και είναι $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:**

- **Οι συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, λf είναι συνεχείς στο x_0.**
- **Αν είναι $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχείς στο x_0.**
- **Αν είναι $f(x_0) > 0$, τότε και η συνάρτηση $\sqrt[k]{f}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ είναι συνεχής στο x_0.**

Πράγματι, επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο x_0, θα είναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Έτσι θα έχουμε π.χ.

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (fg)(x_0)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα και το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συνεχών συναρτήσεων σ' ένα διάστημα Δ, είναι επίσης συνεχής συνάρτηση στο Δ.

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

3.17 Στην § 3.14 είδαμε ότι η σταθερή και η ταυτοτική συνάρτηση είναι συνεχείς σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε τώρα τη συνέχεια άλλων βασικών συναρτήσεων.

I. **Συνέχεια πολυωνυμικής συνάρτησης.** Έστω η συνάρτηση P με

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu \neq 0$$

Επειδή η ταυτοτική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε συνεχής θα είναι (§ 3.16) και η συνάρτηση $\alpha_k x^k$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$. Έτσι όμως και η P θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Ώστε:

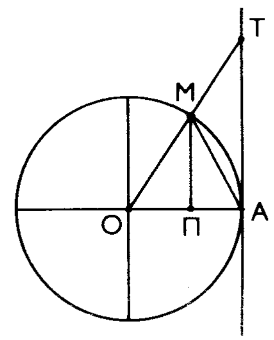
Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

II. **Συνέχεια ρητής συνάρτησης.** Συνέπεια της προηγούμενης περίπτωσης και του θεωρήματος της § 3.16, είναι ότι:

Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

III. **Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων.** Για την απόδειξη της συνέχειας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων θα αποδείξουμε πρώτα την πρόταση

(12)



$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |\eta\mu x| < |x| \qquad (1)$$

Στον τριγωνομετρικό κύκλο Ο (σχ. 12) θεωρούμε το τόξο ΑΜ με αλγεβρική τιμή $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$. Από τη γεωμετρία ξέρουμε ότι:

$$E_{(\tau\rho\iota\gamma.\ OAM)} < E_{(\tau o\mu.\ OAM)} < E_{(\tau\rho\iota\gamma.\ OAT)}$$

ή $\left|\frac{1}{2}(OA)(\Pi M)\right| < \left|\frac{1}{2}(OA)(\overset{\frown}{AM})\right| < \left|\frac{1}{2}(OA)(AT)\right|$

ή $\left|\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \eta\mu x\right| < \left|\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\right| < \left|\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \varepsilon\varphi x\right|$

ή τελικά $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}, \quad |\eta\mu x| < |x| < |\varepsilon\varphi x| \qquad (2)$

Το πρώτο μέρος της (2) ισχύει και για κάθε $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$, γιατί

$$|\eta\mu x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$$

Συνεπώς η (1) ισχύει γενικά

- **Συνέχεια ημιτόνου.** Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$|\eta\mu x - \eta\mu x_0| = 2\left|\eta\mu\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\eta\mu\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$< 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0| \qquad \text{[λόγω της (1)]}$$

Από τη σχέση αυτή, επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$, βρίσκουμε (§ 3.11, 2) $\lim\limits_{x\to x_0}(\eta\mu x - \eta\mu x_0) = 0$ και συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x = \eta\mu x_0$.

Ώστε:

Η συνάρτηση **ημ** *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$

- **Συνέχεια συνημιτόνου.** Επειδή για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι

$$|\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0| = \left|-2\eta\mu\frac{x+x_0}{2}\eta\mu\frac{x-x_0}{2}\right| < |x-x_0|$$

θα έχουμε ομοίως ότι:

Η συνάρτηση **συν** *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$

- **Συνέχεια εφαπτομένης.** Συνέπεια των παραπάνω και του θεωρήματος της § 3.16 είναι ότι:

Η συνάρτηση **εφ** *είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της*

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$1 < \left|\frac{x}{\eta\mu x}\right| < \left|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right| \qquad \text{ή} \qquad |\sigma\upsilon\nu x| < \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| < 1$$

Αλλά όμως για $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$, οι x και ημx είναι ομόσημοι και συνx > 0. Έτσι θα είναι

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$$

Επειδή τώρα $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, θα έχουμε και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$

2. **Να αποδειχτεί ότι** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$

Πράγματι, έχουμε $\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

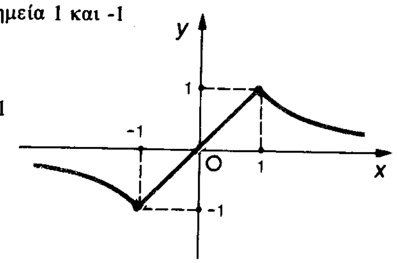
Έτσι θα είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

3. **Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| > 1 \\ x, & \text{αν } |x| \leqslant 1 \end{cases}$ **είναι συνεχής στο** $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (-1, 1)$ καθώς επίσης και σε κάθε $x_0 < -1$ και κάθε $x_0 > 1$.

Μένει να εξετάσουμε τη συνέχειά της στα σημεία 1 και -1



Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 1^-}f(x) = \lim_{x\to 1^-}x = 1$$

και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}f(x) = 1 = f(1)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο 1.

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}x = -1$, $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x} = -1$

και συνεπώς $\lim\limits_{x\to -1}f(x) = -1 = f(-1)$. Άρα η f είναι συνεχής στο -1.

Επομένως η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Το βασικό θεώρημα

$\boxed{3.18}$ Έστω g μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α, σ ένα σημείο συσσωρεύσεως του Α και

$$\lim_{x\to\sigma}g(x) = \sigma_1$$

Έστω ακόμη f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $B \supseteq g(A)$. Υποθέτουμε ότι το σ_1 είναι σημείο συσσωρεύσεως του $g(A)$ και ότι

$$\lim_{y \to \sigma_1} f(y) = L \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι η σύνθεση $f \circ g$ των συναρτήσεων f και g έχει στο σ όριο L. Στην περίπτωση που $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, απαιτείται η πρόσθετη προϋπόθεση ότι

$$\textbf{σε μια περιοχή του } \boldsymbol{\sigma} \text{ είναι } g(x) \neq \sigma_1 \qquad (2)$$

δηλαδή να υπάρχει διάστημα Δ_σ, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\Delta_\sigma \cap A)-\{\sigma\}$ είναι $g(x) \neq \sigma_1$.

Η απόδειξη για την περίπτωση $\sigma, \sigma_1, L \in \mathbb{R}$ γίνεται ως εξής:

Από τη (2) προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$, τέτοιο ώστε

$$\forall\, y \in g(A), \quad 0 < |y-\sigma_1| < \delta_1 \Rightarrow |f(y)-L| < \varepsilon \qquad (3)$$

Εξάλλου, θεωρώντας τον περιορισμό της g στο σύνολο $A_1 = \Delta_\sigma \cap A-\{\sigma\}$, η ισότητα $\lim\limits_{x \to \sigma} g(x) = \sigma_1$, σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \delta_1$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} \forall\, x \in A_1, \quad 0 < |x-\sigma| < \delta \;&\Rightarrow\; |g(x)-\sigma_1| < \delta_1 \\ &\Rightarrow 0 < |g(x)-\sigma_1| < \delta_1 && [\text{λόγω της (2)}] \\ &\Rightarrow\; |f(g(x))-L| < \varepsilon && [\text{λόγω της (3), επειδή } g(x) \in g(A)] \end{aligned}$$

Δηλαδή ο περιορισμός της $f \circ g$ στο A_1 έχει στο σ όριο L. Άρα είναι και

$$\lim_{x \to \sigma} (f \circ g)(x) = L$$

Η απόδειξη στις άλλες περιπτώσεις γίνεται με ανάλογη εργασία.

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι:**

- **Η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού A έχει στο σ όριο σ_1.**
- **Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $B \supseteq g(A)$ έχει στο σ_1 όριο L.**

Αν σε μια περιοχή του σ είναι $g(x) \neq \sigma_1$, τότε

$$\lim_{\sigma} (f \circ g) = L$$

Στην ειδική περίπτωση $A = \mathbb{N}$, οπότε κατ' ανάγκη $\sigma = +\infty$, η g είναι μια ακολουθία (α_ν) με όριο το σημείο συσσωρεύσεως σ_1 του $g(\mathbb{N})$.

Οι όροι α_ν ανήκουν στο B και είναι $\alpha_\nu \neq \sigma_1$ (τουλάχιστο σε μια περιοχή του $+\infty$, δηλαδή για $\nu > k \in \mathbb{N}$). Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = L$ θα είναι και $\lim\limits_{\nu \to +\infty} f(\alpha_\nu) = L$.

Συνεπώς, αντικαθιστώντας για λόγους απλότητας το σ_1 με σ και το B με A, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A έχει στο σ όριο L, τότε για κάθε ακολουθία (α_ν) σημείων του A με $\lim \alpha_\nu = \sigma$ και $\alpha_\nu \neq \sigma$, η αντίστοιχη ακολουθία $f(\alpha_\nu)$ των τιμών τής συνάρτησης έχει επίσης όριο L.**

Από το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ότι, αν υπάρχει ακολουθία (α_ν) με όριο σ, τέτοια ώστε η αντίστοιχη ακολουθία $f(\alpha_\nu)$ **να μην έχει όριο**, τότε και η συνάρτηση f **δεν έχει όριο** στο σ.

Εξάλλου αποδεικνύεται(1) ότι ισχύει και το *αντίστροφο* του προηγούμενου πορίσματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το θεώρημα εφαρμόζεται, εφόσον εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις του, και στις περιπτώσεις που η f είναι ακολουθία (οπότε $\sigma_1 = +\infty$) ή ακόμη όταν και οι δυο συναρτήσεις είναι ακολουθίες.

Συνέχεια και σύνθεση

3.19 Στο θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου υποθέτουμε ότι $\sigma_1 \in B$ και ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής(2) στο σ_1. Τότε, επειδή $L = \lim\limits_{\sigma_1} f(\sigma_1)$, θα έχουμε και

$$\lim_{\sigma} (f \circ g) = f(\sigma_1)$$

Αν επιπλέον είναι $\sigma \in A$ και η g είναι συνεχής στο σ, τότε θα είναι $\sigma_1 = \lim\limits_{\sigma} g = g(\sigma)$ και συνεπώς

$$\lim_{\sigma} (f \circ g) = f(\sigma_1) = f(g(\sigma)) = (f \circ g)(\sigma)$$

που σημαίνει ότι η $f \circ g$ είναι συνεχής στο σ.

---

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

(2) Εφόσον η f είναι συνεχής, δεν απαιτείται η προϋπόθεση (2) της προηγούμενης παραγράφου (§ 3.14)

Έτσι έχουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο σ του πεδίου ορισμού της και η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο g(σ) του πεδίου ορισμού της, τότε και σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι συνεχής στο σ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = ημ(x^2-3)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = x^2-3$ και ημx οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Αλλαγή μεταβλητής

3.20 Έστω φ μια συνάρτηση και σ ένα σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της. Το πρόβλημα της εύρεσης του $\lim\limits_{σ} φ$, μπορεί να απλοποιηθεί με μετατροπή της φ σε σύνθεση $f \circ g$ δυο άλλων συναρτήσεων, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες εφαρμογής του βασικού θεωρήματος της § 3.18.

Τότε, επειδή $\lim\limits_{σ} φ = \lim\limits_{σ}(f \circ g) = \lim\limits_{σ_1} f$ με $\lim\limits_{σ} g = σ_1$

αν θέσουμε $g(x) = y$, το ζητούμενο $\lim\limits_{σ} φ$, δηλαδή το $\lim\limits_{x \to σ} f(g(x))$, ανάγεται στο $\lim\limits_{y \to σ_1} f(y)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{x}$ υπολογίζεται ως εξής:

Έχουμε $\frac{εφ3x}{x} = 3 \cdot \frac{εφ3x}{3x}$

Έστω $g(x) = 3x = y$ και $f(y) = \frac{εφy}{y}$. Τότε $\frac{εφ3x}{3x} = f(g(x))$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0}(3x) = 0$ και (§ 3.17, εφ. 2) $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$, θα έχουμε και

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} f(g(x)) = 1$. Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{x} = 3 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{3x} = 3$.

2. Επίσης είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} xημ\frac{1}{x} = 1$.

Πράγματι είναι:

$$xημ\frac{1}{x} = \frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

και, αν θέσουμε $g(x) = \frac{1}{x}$ και $f(y) = \frac{ημy}{y}$, θα έχουμε $xημ\frac{1}{x} = f(g(x))$

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{y \to 0} \frac{ημy}{y} = 1$, θα είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(g(x)) = 1$.

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} xημ\frac{1}{x} = 1$

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ, εκτός ίσως του $x_0 \in Δ$. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

1. Αν θέσουμε $x = x_0+h$, το σύνολο $I_0 = \{h: x_0+h \in Δ\}$ είναι διάστημα που περιέχει το 0. Αν ορίσουμε στο I_0 τη συνάρτηση g με $g(h) = x_0+h$, θα έχουμε

$$\lim_{h \to 0} g(h) = x_0 \qquad \text{και} \qquad g(I_0) = Δ$$

Τότε, επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, θα έχουμε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = L$, δηλαδή

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = L$$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η προηγούμενη ισότητα, τότε θέτουμε $h = x-x_0$ και στο σύνολο Δ ορίζουμε τη συνάρτηση g_1 με $g_1(x) = x-x_0$.

Έτσι θα έχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to x_0} f(g_1((x)) = L$, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = L} \qquad (4)$$

2. Αν για $x_0 \neq 0$ θέσουμε $x = x_0h$, το σύνολο $I_1 = \{h: x_0h \in Δ\}$ είναι διάστημα που περιέχει το 1.

Τότε, όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 1} f(x_0h) = L} \qquad (5)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Η συνάρτηση g με $g(x) = x^α$ ($x > 0$, $α \in \mathbb{R}$) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+$.**

Θα δείξουμε πρώτα ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Αρκεί να δείξουμε $\lim\limits_{x \to 1} x^α = 1^α = 1$ ή ισοδύναμα $\lim\limits_{x \to 1}(x^α-1) = 0$.

Έστω $k_0 \in \mathbb{Z}$, τέτοιος ώστε $k_0 \leqslant α < k_0+1$. Τότε:

- για $x > 1$ έχουμε: $x^{k_0} \leqslant x^α < x^{k_0+1} \Leftrightarrow x^{k_0}-1 \leqslant x^α-1 < x^{k_0+1}-1$

και επειδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση x^k είναι (§ 3.17, I) συνεχής στο 1, θα είναι

$$\lim_{x \to 1^+}(x^α-1) = 0 \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x \to 1^+} x^α = 1$$

● για $0 < x < 1$, θα είναι $\frac{1}{x} > 1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to 1^-} (\frac{1}{x})^a = 1$ ή $\lim\limits_{x \to 1^-} x^a = 1$

Συνεπώς είναι $\lim\limits_{x \to 1} x^a = 1$ και η g είναι συνεχής στο 1.

Έστω τώρα $x_0 > 0$. Τότε, αν θέσουμε $x = x_0 h$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} x^a = x_0^a$. (1)

Έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} x^a = x_0^a \Leftrightarrow \lim_{h \to 1} [(x_0 h)^a - x_0^a] = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 1} [x_0^a (h^a - 1)] = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 1} (h^a - 1) = 0$$

Αλλά η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε και η (1) είναι αληθής.

Άρα η g είναι συνεχής σε κάθε $x_0 > 0$.

2. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

Για την απόδειξη της παραπάνω ισότητας υποθέτουμε $x > 1$. Τότε, επειδή

$$[x] \leqslant x < [x]+1 \qquad (1)$$

θα έχουμε

$$1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{[x]} \qquad (2)$$

Αλλά λόγω της (1) είναι $(1+\frac{1}{x})^{[x]} \leqslant (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{x})^{[x]+1}$

και λόγω της (2) $(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^{[x]}$ και $(1+\frac{1}{x})^{[x]+1} \leqslant (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

Έτσι θα έχουμε:

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} \qquad (3)$$

Έστω τώρα $g(x) = [x]$ και $f(v) = (1+\frac{1}{v+1})^v$. Τότε $(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} = f(g(x))$.

Αλλά είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Εξάλλου επειδή $(1+\frac{1}{v+1})^v = (1+\frac{1}{v+1})^{v+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{v+1})}$ και $\lim (1+\frac{1}{v+1})^{v+1} = e$,

$\lim (1+\frac{1}{v+1}) = 1$, θα είναι και $\lim\limits_{v \to +\infty} f(v) = e$.

Έτσι θα έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(g(x)) = e$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = e$

Τότε από την (3) θα έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.

Ασκήσεις: 36, 37, 38, 39, 40

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχτεί ότι:
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$, (ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+2} = 1$, (iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

2. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2+c) = -\infty$ $(c \in \mathbb{R})$, (ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$.

3. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x-5}{x+2} = 2$, (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$

4. Να αποδειχθεί ότι: (i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+7} = -\infty$, (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2-5x) = +\infty$

5. Να βρείτε, αν η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

6. Να βρείτε το όριο της f με $f(x) = 3 - \frac{|x+1|}{x}$ στο $+\infty$ καθώς και στο $-\infty$ και κατόπιν να διαπιστώσετε ότι οι ευθείες $y = 2$ και $y = 4$ είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

7. Να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5-7x+9)$, (ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$, (iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^8+7x^2+6x)$, (iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$

8. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3-9x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^3-9x}$ και κατόπιν να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \frac{x^2}{x^3-9x}$ έχει την ευθεία $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

9. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1-x)(x^2-3)}{2x^3-1}$, (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-5x^4}{9x^2-2}$

10. Να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2)(1+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2})$, (ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|}$, (iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

11. Αν υπάρχουν να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}$, (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}$, (iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-x}{2x+1}$, (iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3-x}$, (v) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$

12. Να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$, (ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, (iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$, (iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^2(x-1)} + \sqrt[3]{x^2(x+1)})$

13. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$

14. Αν $\mu \in \mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+\mu x$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+\mu x$

15. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτοι της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, (ii) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$, (iii) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

16. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to2} (2x+1) = 5$, (ii) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

17. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x+1}{x} = +\infty$, (ii) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{|x|\,(x+1)}{x} = -1$

18. Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x \leqslant 2 \\ x-1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ είναι

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 5$ και $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 1$

19. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to0} (x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}) = 0$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x^2+1} = 0$, (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2-1} = 0$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x+5}{3x+4} - \dfrac{4}{3}\right) = 0$

20. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο στο 0 της συνάρτησης f με $f(x) = \eta\mu\dfrac{1}{x}$

21. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+4}{2x+5}$, (ii) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$, (iii) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$, (iv) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$, (v) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-1}$.

22. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}$, (ii) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$

23. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to5}(12+\sqrt{x-5})$, (ii) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, (iii) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, (iv) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

24. Δίνονται οι συναρτήσεις

f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & ,\text{αν } x \neq 3 \\ 1 & ,\text{αν } x = 3 \end{cases}$ και g με $g(x) = \begin{cases} x^2 & ,\text{αν } x \in [-2,2) \\ 1 & ,\text{αν } x = 2 \\ 3x-2 & ,\text{αν } x > 2 \end{cases}$

Να υπολογιστούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)$, (iii) $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$

25. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = x+\dfrac{|x|}{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$ (ii) $f(x) = -\dfrac{(1+x)|x|}{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$

(iii) $f(x) = x - [x]$ στο σημείο $x_0 = 5$.

26. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+\eta\mu x)$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{2x^2-3}{4x} - \sigma\upsilon\nu 2x)$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2(2-\eta\mu x)}{x+1}$

27. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 0 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 1$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x \leqslant 0 \\ 1-4x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x < 2 \\ x^2, & \text{αν } x \geqslant 2 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 2$

(iv) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$ (v) $f(x) = x-\sqrt{x-[x]}$ στο σημείο $x_0 = -5$

28. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με

(i) $f(x) = |x|-x$, (ii) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

29. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } -1 \leqslant x < 4 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & \text{αν } x \geqslant 4 \end{cases}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{αν } x < -1 \\ 2x, & \text{αν}, -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

30. Να προσδιορίσετε το α ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

31. Να προσδιορίσετε τα α και β ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha x+1, & \text{αν } x \geqslant 0 \\ x+\beta, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

32. Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\eta\mu x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$, (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\varepsilon\varphi x}$

33. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x-1}{3-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{|x|}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

34. Να προσδιορίσετε τα α και β ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} -2\,\eta\mu x, & \alpha\nu\ x \leqslant -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x+\beta, & \alpha\nu\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \end{cases}$$

να είναι συνεχης στο IR.

35. Να προσδιοριστεί το λ ώστε η συνάρτηση

f με $f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x+\lambda\eta\mu x, & \alpha\nu\ x\in[0, \dfrac{\pi}{4}] \\ (2\lambda+1)\ \varepsilon\varphi x, & \alpha\nu\ x\in(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$

να είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \dfrac{\pi}{2})$.

36. Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 5x}{2x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha x}{\beta x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$, (v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{\eta\mu x-\eta\mu\frac{\pi}{4}}$ (α, β∈IR*)

37. Με κατάλληλες ακολουθίες να δειχτεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu\,\dfrac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$.

38. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

(i) f με $f(x) = \eta\mu\sqrt{1-x^2}$, (ii) g με $g(x) = \sigma\upsilon\nu\,(\eta\mu 5x)$

39. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[[x]]{x} = 1$.

40. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ x > 0 \\ x, & \alpha\nu\ x \leqslant 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ \eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x = 0. \end{cases}$

41. Αν η συνάρτηση f: [α, β] → IR είναι συνεχής στο [α, β] και δε μηδενίζεται για καμιά τιμή του x∈[α, β], τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β].

42. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+5x^3-x^2+x-1 = 0$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα (0, 1).

43. Αν f και g είναι δυο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [0, 1] τέτοιες, ώστε f(0) = g(1) και f(1) = g(0), να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈[0, 1] τέτοιος ώστε f(ξ) = g(ξ).

44. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

45. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ (α > 0).

46. Να υπολογίσετε τα όρια

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ (α > 0), (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$

47. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 1, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

48. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \alpha\nu\ x \leqslant 1 \\ x-2+\ln x, & \alpha\nu\ 1 < x \leqslant 2 \\ \ln x, & \alpha\nu\ x > 2 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \alpha\nu\ x \leqslant 1 \\ 1+\ln x, & \alpha\nu\ x > 1 \end{cases}$